

文章编号: 1002-0268 (2000) S1-0049-03

抗差最小二乘法在桥梁控制网平差中的应用

李伟东¹, 张文春¹, 朱伟刚²

(1. 吉林建筑工程学院, 吉林 长春 130021; 2 长春工程学院, 吉林 长春 130021)

摘要: 以抗差最小二乘法理论为基础, 探讨在桥梁控制网平差中选择适当的估计方法, 合理地确定等价权, 进行抗差估计的方法。
关键词: 抗差最小二乘法; 桥梁控制网; 等价权
中图分类号: U44; O241.5 **文献标识码:** A

Application of Robustified Least Squares Method in Bridge Control Net

LI Wei-dong¹, ZHANG Wen-chun¹, ZHU Wei-gang²

(1. Jilin Institute of Architecture and Civil Engineering, Jilin Changchun 130021, China;
2 Changchun Engineering Institute, Jilin Changchun 130021, China)

Abstract: The paper introduced a method of how to apply in bridge control net the rational principle of equivalent weight so as to execute classical estimators based on robustified least squares method.
Key words: Robustified least squares method; Bridge control net; Equivalent weight

经典最小二乘原理, 是测量数据处理中使用最广泛的方法。因其不涉及观测数据的分布特征, 对于严格符合正态分布的观测数据, 具有最优一致无偏且方差最小的特性, 对于服从其它分布的数据, 其估值亦具有无偏且方差最小的性质。这也是最小二乘估计作为经典测量平差理论的核心且百年不衰的根本原因。

但是, 经典的最小二乘法不具备抵御粗差的能力, 它要求观测数据必须严格满足某一种分布, 否则粗差的影响将会使最小二乘估值受到干扰甚至使人无法接受。而事实上, 在我们获得的各种测量数据中, 严格服从正态分布的数据几乎不存在, 由于受到观测条件的限制, 观测数据可能要受到污染。因此, 抗差估计的理论, 就是在粗差存在的情况下, 选择适当的估计准则对观测数据进行处理, 并使最后得到的参数估值受粗差的影响减少到最低程度, 以求得到近似于正常情况下的统计结果。

1 抗差最小二乘原理

1.1 抗差最小二乘法

抗差估计又称为广义极大似然估计 (M 估计), 是经典的极大似然估计的推广。

设有一组相互独立的观测子样 $\{l_i\} \ i=1, 2, \dots, n$, 各观测子样的权为 $\{p_i\}$, 根据测量平差原理可得其观测方程为

$$L + \Delta = AX \tag{1}$$

因观测子样的真误差为未知, 故相应的误差方程式可写为

$$V = AX - L \tag{2}$$

式中, l —— $n \times 1$ 阶观测向量;
 A —— $n \times m$ 阶系数矩阵;
 X —— $m \times 1$ 阶未知参数向量;
 X —— x 的估值;

Δ —— $n \times 1$ 阶观测误差向量;

V ——观测值改正数 (余差) 向量。

经典最小二乘法估计准则为

$$V^T P V = \min \quad (3)$$

而 M 估计则可由下面的准则函数来定义, 即

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \min \quad (4)$$

上式中 ρ 是适当选择的凸函数, 设 ψ 是适当的单调、正半轴非降函数且 $\rho'(v) = \psi(v)$, 则由 (4) 式得

$$\sum_{i=1}^n \psi(v_i) \cdot a_i = 0 \quad (5)$$

式中, v_i 为第 i 个观测值余差, 若令

$$\frac{\psi(v_i)}{v_i} = \omega_i \quad (6)$$

则 (5) 式变为

$$\sum_{i=1}^n \omega_i v_i a_i = 0 \quad (7)$$

式中的 ω_i 称为权因子。

$$\text{令 } \bar{P} = \left\{ \bar{P}_i \right\} = \left\{ P_i \omega_i \right\}$$

这里我们称为 $\bar{P}_i$ 等价权。式 (7) 可表示为

$$A^T \bar{P} V = 0 \quad (8)$$

其相应的法方程为

$$A^T \bar{P} A X - A^T \bar{P} L = 0 \quad (9)$$

$$X = (A^T \bar{P} A)^{-1} A^T \bar{P} L \quad (10)$$

由此可见, M 估计可通过引入等价权的概念化为最小二乘形式, 且当 $\omega_i = 1$ 时, M 估计退化为经典最小二乘估计。

1.2 等价权的含义

M 估计是通过观测值 $\{l_i\}$ 求参数 $\{x_j\}$ 的估值, $\{v_i\}$ 为观测值 $\{l_i\}$ 的余差, 其准则函数为

$$\int \rho(v) \cdot f(l) \cdot dl = \min \quad (11)$$

$$\text{或 } \sum_{i=1}^n p_i \left[\frac{\partial}{\partial v_i} \rho(v) \right] \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(v) \cdot a_{ij} = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, m)$$

式中, $\rho(v)$ 是适当选择的极值函数, $\frac{\partial \rho(v)}{\partial v_i} = \psi(v)$, $f(l)$ 为经验概率密度。

$$\text{令 } \bar{p}_i = p_i \left[\frac{\partial \rho(v)}{\partial v} \cdot \frac{1}{v} \right]_i = p_i \cdot \frac{\psi(v)}{v_i} = p_i \omega_i \quad (12)$$

由上式可见, 等价权包含了原观测值的权和由 $\rho(v)$ 或 $\psi(v)$ 函数规定的权因子, 即等价权是观测值余差 v 的函数。这意味着抗差最小二乘估计的权是“后验”的。

1.3 抗差最小二乘法的计算原理

抗差最小二乘估计是通过等价权将抗差估计与最小二乘法有机地结合起来, 因此, 抗差估计的根本之处在于权函数的设计。

权函数的作用在于: 将所有的观测数据划分为正常观测值、可利用观测值和粗差观测值 3 个部分; 对于正常观测值, 使其保持原有的权不变, 对余差较大的可利用观测值进行降权处理, 而那些粗差观测值, 则使其权为零。经过这样的处理, 我们就可以根据各个观测值及“后验”权, 利用经典最小二乘法, 求得最接近于正常情况下的参数估值。

2 桥梁控制网的抗差计算

目前, 桥梁施工控制网的形式大多仍采用测角方式, 同时测量 1~2 条基线边, 为使抗差估计的计算更为简洁, 做如下假设:

- (1) 不考虑基线测量误差对控制网的影响;
- (2) 角度观测值作为独立观测值处理;

(3) 为简化计算, 我们直接引入 IGG (中国科学院测量与地球物理研究所的英文缩写) 方案的权因子设计, 并加以适当的改化, 即得

$$\omega(u) = \begin{cases} 1 & |u| \leq k \\ \frac{k}{|u|} & k < |u| \leq 3 \\ 0 & |u| > 3 \end{cases} \quad (13)$$

式中, k 可取 1 ~ 1.5, $u = \frac{(l - ax)}{\sigma}$, $\sigma = \sqrt{\frac{(l - ax)^2}{n-1}}$ 。

同时, 根据工程测量实际, 结合《工程测量规范》要求, 取 $3|m|$ 为极限误差 (正常情形下, 超过 3 倍中误差的误差出现概率为 3%), 即取 $m < \Delta \leq 3m$ 的观测值认为是可利用观测值。

在上述前提下, 可采用直接平差法直接对观测值进行平差。同时, 顾及抗差最小二乘的权是观测值余差的函数, 它的精度虽要求不高, 但必须保证 v 取可靠的近似值, 否则会导致抗差最小二乘估值受到干扰。为此, 可选择抗差能力较强的数学模型。为使实际应用更为简单, 采用平均分配原则的近似平差法求得 v 的近似值, 并根据式 (13) 计算各观测值等价权 $\{\bar{P}_i\}$, 建立条件方程式

$$BX + W = 0 \quad (\bar{P} \text{ 为等价权})$$

$$\text{得 } V = \bar{P}^{-1} A^T (A \bar{P}^{-1} A^T)^{-1} (-W)$$

$$X = X + V$$

精度评定与条件平差相同。

3 算例

某桥梁控制网为大地四边形形式，其最小二乘平差结果见表 1 第 3 列。

表 1

角号	角度观测值	不含粗差	含粗差	
		<i>LS</i>	<i>LS</i> *	<i>M</i>
1	48°57′48″	48°57′46.9″	48°57′45.5″	48°57′46.6″
2	37°03′28″	37°03′28.7″	37°03′28.8″	37°03′28.3″
3	24°41′24″	24°41′25.6″	24°41′25.3″	24°41′25.2″
4	69°17′15″	69°17′18.8″	69°17′20.4″	69°17′19.9″
5	45°32′38″	45°32′40.4″	45°32′42.0″	45°32′40.6″
6	40°28′31″	40°28′35.2″	40°28′32.4″	40°28′34.3″
7	61°20′26″	61°20′24.8″	61°20′24.6″	61°20′25.2″
8	32°38′19″	32°38′19.6″	32°38′21.0″	32°38′19.9″

将 6 号角值加入－6″的粗差后，分别用经典最小

二乘法和抗差最小二乘法求得了平差角值（见表 1 第 4、5 列），其中抗差最小二乘估计的前期观测值余差（改正数）采用近似平差得到，并求得单位权中误差 $m_0=\pm3.3''$ ，在计算等价权时取 $k=1$ 。

4 结论

当观测数据中含有粗差时，经典最小二乘法平差的结果明显受到了污染，而利用抗差最小二乘估计的结果更接近于正常情况下的估值。所以，在桥梁控制测量中应用抗差最小二乘法代替经典最小二乘法进行数据处理，不仅减小了粗差对于平差结果的影响，使估计结果更加可靠，而且，其计算方法也简单易行、容易实现。

参考文献:

[1] 周江文等著. 抗差最小二乘法. 华中理工大学出版社, 1997
[2] 陶本藻等编. 测量平差基础, 测绘出版社, 1978