中国科学 : 数学　2025 年　第 55 卷　第 1 期 : 75 ～ 92
SCIENTIA SINICA　Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论　文

平面迷向 L_p 对偶 Minkowski 问题

献给彭家贵教授 80 寿辰

李海中*, 万耀, 张益嘉

清华大学数学科学系, 北京 100084

E-mail: lihz@tsinghua.edu.cn, y-wan19@mails.tsinghua.edu.cn, zhang-yj23@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2024-04-01; 接受日期: 2024-05-24; 网络出版日期: 2024-08-26; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11831005) 资助项目

摘要　本文给出平面迷向 L_p 对偶 Minkowski 问题的综述, 即研究以下方程:

$$u^{1-p}(u_\theta^2+u^2)^{\frac{q-2}{2}}(u_{\theta\theta}+u)=1,\quad \theta\in\mathbb{S}^1. \tag{1}$$

特别地, 当 $p=1$ 且 $4<q\leqslant 5$ 时, 通过对一个含参积分的理论分析和数值估计, 本文证明方程 (1) 解的唯一性.

关键词　L_p 对偶 Minkowski 问题　完全非线性常微分方程　分类

MSC (2020) 主题分类　35J96, 52A10, 34C25

1　引言

经典 Brunn-Minkowski 理论是凸几何理论的核心, 其通过 Minkowski 和来研究 Euclid 空间中凸体的几何测度与几何不等式. 经典的 Minkowski 问题为, 寻找单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上的给定 Borel 测度是某个凸体对应的曲面面积测度的充分必要条件. 对于离散的给定测度, 该问题由 Minkowski [61,62] 解决. 对于更一般的给定测度, Aleksandrov [1] 及 Fenchel 和 Jessen [18] 独立解决了解的存在性问题. 经典 Minkowski 问题解的正则性由 Lewy [42]、Nirenberg [63]、Cheng 和 Yau [16] 及 Pogorelov [64] 解决. 更多内容可以参见 Schneider 的书籍 [65].

近几十年来, 该理论发展出著名的 L_p Brunn-Minkowski 理论. Firey [19] 引入了凸体的 Firey p- 和这一概念, Lutwak [54,55] 在其基础上引入了 L_p 曲面面积测度并提出了 L_p Minkowski 问题, 其要求刻画凸体的 L_p 曲面面积测度. L_p Minkowski 问题包含一些重要情形, 如经典 Minkowski 问题 ($p=1$)、对数 Minkowski 问题 ($p=0$) 和中心仿射 Minkowski 问题 ($p=-n$). 当 $p>1$ 时, Lutwak [54] 解决了 L_p Minkowski 问题中给定的测度为偶测度的情形, Chou 和 Wang [17] 解决了没有偶测度假设的情形. 文

英文引用格式: Li H Z, Wan Y, Zhang Y J. The planar isotropic L_p dual Minkowski problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 75–92, doi: 10.1360/SSM-2024-0096

献 [2,7,10,31,56,59,70,71] 在 L_p Minkowski 问题的关键情形中作出了贡献. L_p Minkowski 问题的解被用来建立 L_p 仿射 Sobolev 不等式, 文献 [24,57,58] 等在这方面作出了贡献. 此外, 文献 [9,16,35,38,53,59] 也深入地研究了该问题.

除了 L_p Minkowski 问题, 对曲面面积测度的研究还发展出 Christoffel-Minkowski 理论. Lutwak[54] 定义了第 k 个 p- 曲面面积测度, 相应的预定第 k 个 p- 曲面面积测度问题被称为 L_p Christoffel-Minkowski 问题. 当 $p=1$ 且 $1 \leqslant k < n$ 时, 该问题为经典 Christoffel-Minkowski 问题, Guan 和 Ma[22] 在给定测度的密度 f 为 k- 凸函数的情形下给出了凸解的存在性. 当 $p \geqslant k+1$ 时, Hu 等[26] 在 $f^{\frac{1}{p+k-1}}$ 满足球凸条件情形下给出了凸解的存在性. 当 $1 < p < k+1$ 时, Guan 和 Xia[23] 在 $f^{\frac{1}{p+k-1}}$ 满足球凸条件和偶条件的情形下给出了光滑解的存在性. 其他相关研究可参见文献 [11,16,20,21,36,65].

Huang 等[32] 引入了对偶曲率测度并提出了对偶 Minkowski 问题, 其要求刻画凸体的第 q 个对偶曲率测度. 第 q 个对偶 Minkowski 问题包含一些重要情形, 如对数 Minkowski 问题 ($q=n+1$) 和 Aleksandrov 问题 ($q=0$). Huang 等[32] 解决了 $0 < q < n+1$ 且给定的测度为偶测度的情形, Böröczky 等[6] 和 Zhao[69] 分别给出了 $0 < q < n+1$ 且 q 为整数时该问题的解的充要条件, Böröczky 等[8] 给出了 $q > 0$ 且 q 为非整数时的一个充分条件, 其他研究参见文献 [15,25,33,41,51,68].

Lutwak 等[60] 提出了 L_p 对偶 Minkowski 问题: 给定一个 $\mathbb{S}^n$ 上 Borel 测度 μ, 寻找 μ 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中某个凸体 K 的第 (p,q) 个对偶曲率测度 $\tilde{C}_{p,q}$ 的充分必要条件. 特别地, 当 $q=n+1$ 时该问题为 L_p Minkowski 问题, 当 $p=0$ 时该问题为对偶 Minkowski 问题, 而当 $q=0$ 时该问题被称为 L_p Aleksandrov 问题. 更多的研究参见文献 [5,12,14,34,50,66].

在光滑情形, 当给定测度 μ 的密度为 f 时, L_p 对偶 Minkowski 问题变为如下在 $\mathbb{S}^n$ 上的 Monge-Ampère 型方程:

$$u^{1-p}(u^2+|\nabla u|^2)^{\frac{q-n}{2}}\det(\nabla^2 u+uI)=f, \tag{1.1}$$

其中 f 是 $\mathbb{S}^n$ 上给定的光滑正函数, u 是凸体的支撑函数, ∇u 和 $\nabla^2 u$ 分别是 u 在 $\mathbb{S}^n$ 上关于规范正交基的梯度和 Hessian 矩阵. 当密度函数 f 是常值的, 即给定测度 μ 是迷向的 (又称各向同性的) 时, 称该问题为迷向 L_p 对偶 Minkowski 问题.

本文对 Euclid 平面中迷向 L_p 对偶 Minkowski 问题的相关研究进行综述. 平面迷向 L_p 对偶 Minkowski 问题对应的是如下在 $\mathbb{S}^1$ 上的二阶常微分方程:

$$u^{1-p}(u_\theta^2+u^2)^{\frac{q-2}{2}}(u_{\theta\theta}+u)=1, \tag{1.2}$$

其中 $u:\mathbb{S}^1\to(0,+\infty)$ 是一个平面闭凸曲线的支撑函数. 若 (1.2) 的解作为支撑函数对应的闭曲线在平面中是嵌入的, 则称其为嵌入解. 由于 $u\equiv 1$ 显然是一个嵌入解, 因此讨论 (1.2) 嵌入解的分类和唯一性. 该研究对 Euclid 空间中 L_p 对偶 Minkowski 问题的研究具有基本且重要的意义.

关于方程 (1.2) 解的唯一性, 当 $q=2$ 时, Andrews[2] 对 (1.2) 的解进行了完全分类. 通过极大值原理可知, 当 $q<p$ 时解是唯一的 (参见文献 [34]), 而当 $p=q$ 时解在收缩变换意义下唯一 (参见文献 [14]). Chen 等[12] 证明了当 $-2\leqslant p<q\leqslant \min\{2,p+2\}$ 时 (1.2) 的偶函数解必为常值. Chen 和 Li[14] 证明了 $1<p<q\leqslant 2$ 时 (1.2) 的解必为常值.

关于方程 (1.2) 解的非唯一性, Huang 和 Jiang[30] 证明了 $p=0$ 且 $q\geqslant 6$ 为偶数的情形. Jiang 等[39] 证明了当 $p<0$、$q-p>16$ 且 $q\geqslant 2$ 为偶数时, 对任意的整数 $m\in[4,\sqrt{q-p})$, 存在一个 (1.2) 的解, 其最小正周期为 $\frac{2\pi}{m}$. Chen 等[13] 证明了当 $pq\geqslant 0$、$q-p>4$, 或者 $p<0<q$、$1+\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$、$q-p>4$ 时 (1.2) 存在非常值的解. Jiang 等[40] 证明了当 $q\geqslant 2$、$-\frac{q}{q-1}<p\leqslant 0$ 且 $q-p>4$ 时 (1.2) 存在至少

$[\sqrt{q-p}]$ 个解, 而当 $q \geqslant 2$、$p \leqslant -\frac{q}{q-1}$ 且 $q-p>9$ 时 (1.2) 存在至少 $[\sqrt{q-p}-1]$ 个解, 其中 $[\cdot]$ 表示取整函数.

Liu 和 Lu [52] 研究了对偶 Minkowski 问题, 并证明了 $p=0$ 且 $1 \leqslant q \leqslant 4$ 时 (1.2) 的解必为常值. 根据对偶关系, 他们也证明了当 $q=0$ 且 $-4 \leqslant p \leqslant -1$ 时 (1.2) 解的唯一性. 针对证明中的困难, 他们结合理论分析和数值估计的方法进行了研究.

对所有的实数 p 和 q, Li 和 Wan [43] 对 (1.2) 的嵌入解进行了分类.

定理 1.1 方程 (1.2) 的嵌入解的分类如下:

情形 1 $q-p \leqslant 0$.

子情形 1° 如果 $q<p$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 2° 如果 $q=p$, 则嵌入解在收缩变换意义下是唯一的.

情形 2 $0<q-p \leqslant 1$.

子情形 1° 如果 $(p,q)=(1,2)$, 则任意的嵌入解都有如下形式:

$$u(\theta)=1+\lambda\cos(\theta-\theta_0), \quad \lambda \geqslant 0, \quad \theta_0 \in [0,2\pi),$$

这在平移变换意义下是唯一的.

子情形 2° 如果 $(p,q)=(-2,-1)$, 则任意的嵌入解都有如下形式:

$$u(\theta)=\frac{\sqrt{1-\mu^2\sin^2(\theta-\theta_0)}-\mu\cos(\theta-\theta_0)}{1-\mu^2}, \quad 0 \leqslant \mu < 1, \quad \theta_0 \in [0,2\pi).$$

子情形 3° 如果 $q-p=1$ 且 $(p,q) \neq (1,2), (-2,-1)$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 4° 如果 $q-p<1$ 且 $q \leqslant 2p$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 5° 如果 $q-p<1$、$q>2p$ 且 $2q \leqslant p$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 6° 如果 $q-p<1$、$q>2p$ 且 $2q>p$, 则恰好存在两个嵌入解.

情形 3 $1<q-p \leqslant 4$.

子情形 1° 如果 $(p,q)=(-2,2)$, 则任意的嵌入解都有如下形式:

$$u(\theta)=\sqrt{\lambda^2\cos^2(\theta-\theta_0)+\lambda^{-2}\sin^2(\theta-\theta_0)}, \quad \lambda>0, \quad \theta_0 \in [0,2\pi),$$

这在旋转变换和幺模仿射变换意义下是唯一的.

子情形 2° 如果 $q \geqslant 2p$、$2q \geqslant p$ 且 $1<q-p \leqslant 3$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 3° 如果 $q \geqslant 2p$、$2q \geqslant p$、$3<q-p \leqslant 4$ 且 $(p,q) \neq (-2,2)$.

子情形 3.1° 如果更进一步有 $p \geqslant -2$ 且 $q \leqslant 2$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 3.2° 如果更进一步有 $q>2$ 且 $p \geqslant \frac{2q}{2+q}$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 3.3° 如果更进一步有 $q>2$ 且 $p<\frac{2q}{2+q}$, 则若非常值嵌入解存在, 其必为 π- 周期的.

子情形 3.4° 如果更进一步有 $p<-2$ 且 $q \leqslant \frac{2p}{2-p}$, 则嵌入解是唯一的.

子情形 3.5° 如果更进一步有 $p<-2$ 且 $q>\frac{2p}{2-p}$, 则若非常值嵌入解存在, 其必为 π- 周期的.

子情形 4° 如果 $q \geqslant 2p$ 且 $2q<p$, 则恰好存在两个嵌入解.

子情形 5° 如果 $q<2p$, 则恰好存在两个嵌入解.

情形 4 $(k-1)^2<q-p \leqslant k^2$, $k \geqslant 3$.

子情形 1° 如果 $q \geqslant 2$ 且 $p \leqslant -2$, 则恰好存在 $k-2$ 个嵌入解.

子情形 2° 如果 $q \geqslant 2$、$p < \frac{2q}{2+q}$ 且 $-2 < p \leqslant -1$, 则至少存在 $k-2$ 个嵌入解.

子情形 2.1° 如果更进一步有 $p > \frac{q}{1-q}$ 且 $k=3$, 则至少存在两个嵌入解.

子情形 3° 如果 $q \geqslant 2$、$p < \frac{2q}{2+q}$ 且 $p > -1$, 则至少存在 $k-1$ 个嵌入解.

子情形 4° 如果 $q \geqslant 2$、$p \geqslant \frac{2q}{2+q}$、$p > -2$ 且 $q \geqslant 2p$, 则恰好存在 $k-1$ 个嵌入解.

子情形 5° 如果 $q \geqslant 2$、$p \geqslant \frac{2q}{2+q}$、$p > -2$ 且 $q < 2p$, 则恰好存在 k 个嵌入解.

子情形 6° 如果 $p \leqslant -2$、$q > \frac{2p}{2-p}$ 且 $1 \leqslant q < 2$, 则至少存在 $k-2$ 个嵌入解.

子情形 6.1° 如果更进一步有 $q < \frac{p}{1+p}$ 且 $k=3$, 则至少存在两个嵌入解.

子情形 7° 如果 $p \leqslant -2$、$q > \frac{2p}{2-p}$ 且 $q < 1$, 则至少存在 $k-1$ 个嵌入解.

子情形 8° 如果 $p \leqslant -2$、$q \leqslant \frac{2p}{2-p}$、$q < 2$ 且 $2q \geqslant p$, 则恰好存在 $k-1$ 个嵌入解.

子情形 9° 如果 $p \leqslant -2$、$q \leqslant \frac{2p}{2-p}$、$q < 2$ 且 $2q < p$, 则恰好存在 k 个嵌入解.

进一步地, 如果 $p < q$ 且 $(p,q) \neq (1,2)$, $(-2,-1)$ 或 $(-2,2)$, 若整数 k 严格介于 $\sqrt{q-p}$ 和 $\Xi(p,q)$ 之间, 则存在一个非常值的对应 k- 重对称曲线 $\Gamma_{k,p,q}$ 的嵌入解, 其中

$$\Xi(p,q) = \begin{cases} \dfrac{2(q-p)}{q}, & \text{如果 } 0 \leqslant p < q, \\ 2, & \text{如果 } p < 0 < q, \\ \dfrac{2(p-q)}{p}, & \text{如果 } p < q \leqslant 0. \end{cases}$$

为了直观起见, 用图 1 来表示方程 (1.2) 的嵌入解的个数.

Li 和 Wan [45] 使用 Ivaki 和 Milman [37] 的方法, 证明了在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中迷向 L_p Minkowski 问题解的唯一性, 其中 $-n-1 < p \leqslant -1$, $n+1 \leqslant q \leqslant n+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{(1+p)(n+1+p)}{n(n+2)}}$. 利用对偶关系, Li 和 Wan [45] 也得到了当 $1 \leqslant q < n+1$ 和 $-n-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{(1-q)(n+1-q)}{n(n+2)}} \leqslant p \leqslant -n-1$ 时的唯一性结果. 特别地, 在 Euclid 平面中, 当 $q > 2$ 且 $p+3 < q \leqslant 2\sqrt{\frac{5+p}{3}}$, 或者 $p < -2$ 且 $-2\sqrt{\frac{5-q}{3}} \leqslant p < q-3$ 时, Li 和 Wan [45] 结合文献 [43] 中的结果证明了迷向 L_p Minkowski 问题解的唯一性.

在双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中, Li 和 Xu [49] 引入了双曲 p- 和的概念, 发展了 horospherical p-Brunn-Minkowski 理论. 他们对 h- 凸有界区域定义了 horospherical p- 面积测度, 并且提出和研究了 horospherical p-Minkowski 问题和 horospherical p-Brunn-Minkowski 不等式. Li 和 Xu [49] 给出了当 $p \geqslant -n$ 时迷向 horospherical p-Minkowski 问题解的分类, 并且证明了当给定函数为偶函数时 horospherical p-Minkowski 问题解的存在性. Li 等 [47] 提出了离散 horospherical p-Minkowski 问题, 并且证明了当给定离散测度为偶测度时解的存在性. 在双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 中, Li 和 Wan [46] 给出了迷向 horospherical p-Minkowski 问题解的分类, Li 和 Wan [44] 得到了当 $p=-1$ 时 horospherical p-Minkowski 问题的存在性结果. 在双曲空间中用曲率流证明几何不等式的研究参见文献 [3, 4, 27–29, 48, 67].

本文研究当 $p=1$ 时的 L_p 对偶 Minkowski 问题的嵌入解, 此时方程 (1.2) 转化为

$$(u_\theta^2+u^2)^{\frac{q-2}{2}}(u_{\theta\theta}+u)=1. \tag{1.3}$$

由定理 1.1 可知, 当 $4 < q \leqslant 5$ 时, 若方程 (1.3) 的非常值解存在, 则其必为 π- 周期的. 本文改进了此时方程 (1.3) 的嵌入解的刻画结果, 即证明了嵌入解的唯一性:

定理 1.2 当 $q \in (4,5]$ 时, 方程 (1.3) 有唯一的嵌入解, 即常值解.

结合文献 [43] 中的结果, 本文得到如下推论:

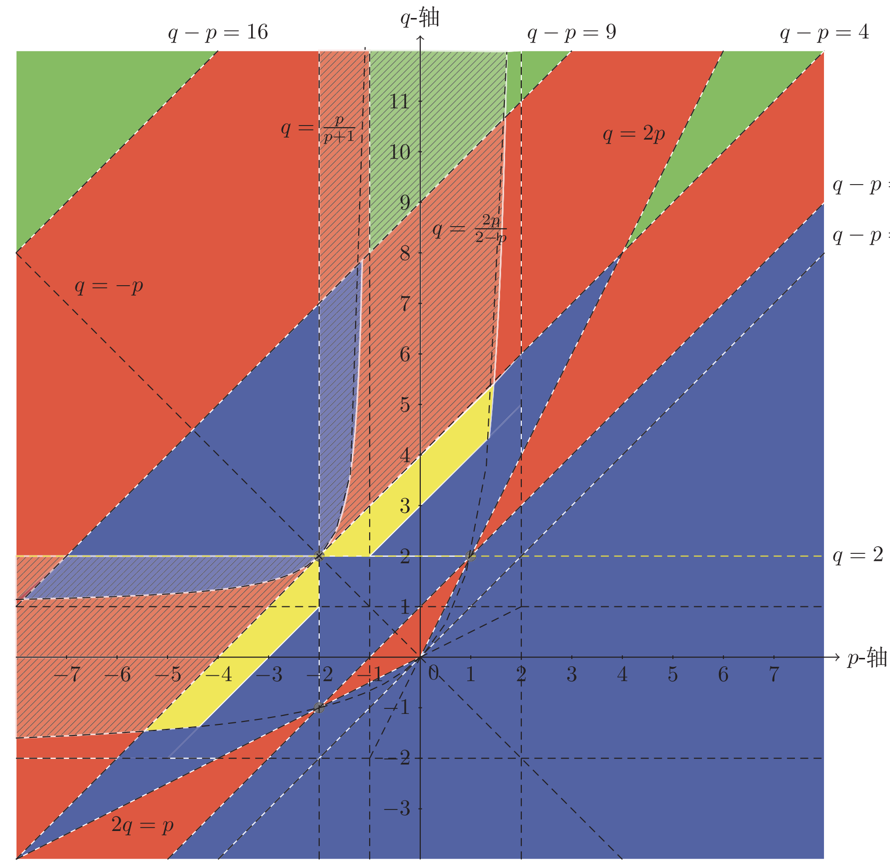

图 1　方程 (1.2) 嵌入解的个数 k 以如下方式表示: 蓝色区域: $k=1$. 红色区域: $k=2$. 绿色区域: $k=3$. 带阴影的蓝色区域: $k\geqslant 1$. 带阴影的红色区域: $k\geqslant 2$. 带阴影的绿色区域: $k\geqslant 3$. 黄色区域: 非常值解若存在则必为 π- 周期的

推论 1.1　(1) 当 $q\in(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,5]$ 时, 方程 (1.3) 有唯一嵌入解, 即常值解.

(2) 当 $q=1$ 时, 方程 (1.3) 有无穷多个嵌入解, 均为常值解. 它们在收缩变换意义下是唯一的.

(3) 当 $q=2$ 时, 方程 (1.3) 有无穷多个嵌入解, 其形式为

$$u(\theta)=1+\lambda\cos(\theta-\theta_0),\quad \lambda\geqslant 0,\quad \theta_0\in[0,2\pi).$$

它们在平移变换意义下是唯一的.

(4) 当 $q\in(5,+\infty)$ 时, 方程 (1.3) 至少存在 $\lceil\sqrt{q-1}\,\rceil-1$ 个嵌入解, 其中 $\lceil x\rceil$ 为不小于 x 的最小整数.

本文证明定理 1.2 的方法是受到 Andrews[2]、Li 和 Wan[43]、Liu 和 Lu[52] 的启发. Andrews[2] 通过研究一个广义含参积分的性质与值分布, 给出了平面迷向 L_p Minkowski 问题解的分类. Li 和 Wan[43] 应用 Andrews 的方法, 通过研究与方程 (1.2) 对应的一族广义含参积分的性质与值分布, 给出了平面迷向 L_p 对偶 Minkowski 问题解的分类. Liu 和 Lu[52] 研究了对偶 Minkowski 问题, 结合对广义含参积分的理论分析和数值计算, 得到了当 $p=0$ 时方程 (1.2) 解的分类, 其中在 $3<q\leqslant 4$ 情形得到比文献 [43] 更强的刻画, 即嵌入解是唯一的.

当 $q=-1$ 时, 方程 (1.2) 化为如下形式:

$$u^{1-p}(u_\theta^2+u^2)^{-\frac{3}{2}}(u_{\theta\theta}+u)=1. \tag{1.4}$$

根据 Chen 等 [12] 给出的 L_p 对偶 Minkowski 问题解之间的对偶关系, 由定理 1.2 可推得方程 (1.4) 嵌入解的分类:

推论 1.2 (1) 当 $p \in [-5,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,+\infty)$ 时, 方程 (1.4) 有唯一嵌入解, 即常值解.

(2) 当 $p=-1$ 时, 方程 (1.4) 有无穷多个嵌入解, 均为常值解. 它们在收缩变换意义下是唯一的.

(3) 当 $p=-2$ 时, 方程 (1.4) 有无穷多个嵌入解, 其形式为

$$u(\theta)=\frac{\sqrt{1-\mu^2\sin^2(\theta-\theta_0)}-\mu\cos(\theta-\theta_0)}{1-\mu^2},\quad \mu\in[0,1),\quad \theta_0\in[0,2\pi).$$

(4) 当 $p \in (-\infty,-5)$ 时, 方程 (1.4) 至少存在 $\lceil\sqrt{-p-1}\,\rceil-1$ 个嵌入解.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节构造一个与 (1.3) 的嵌入解相关的周期函数 $\Theta(q,r)$. 第 3 节研究当 $4<q\leqslant 5$ 时 $\Theta(q,r)$ 的极限值、单调性与凸性. 第 4 节给出定理 1.2 的证明.

2 周期函数 $\Theta(q,r)$

设 $u(\theta)$ 是当 $p=1$ 时平面迷向 L_p 对偶 Minkowski 问题的一个嵌入解, 即 u 满足方程

$$(u_\theta^2+u^2)^{\frac{q-2}{2}}(u_{\theta\theta}+u)=1. \tag{2.1}$$

当 $q\leqslant 1$ 时, 由极大值原理可得方程 (2.1) 的解必为常值 (参见文献 [30]). 当 $q=2$ 时, 方程 (2.1) 化为 $u_{\theta\theta}+u=1$, 可以直接解得 $u(\theta)=1+\lambda\cos(\theta-\theta_0)$. 因此, 以下不妨设 $q>1$ 且 $q\neq 2$, 则可以将方程 (2.1) 改写为

$$\frac{2}{q}((u_\theta^2+u^2)^{\frac{q}{2}})_\theta=2u_\theta.$$

这表明

$$(u_\theta^2+u^2)^{\frac{q}{2}}-qu=E, \tag{2.2}$$

其中 E 为积分常数.

注意到方程 (2.1) 的嵌入解为周期函数, 可以将 $u(\theta)$ 的最大值和最小值分别记为 u_+ 和 u_-. 由 (2.2) 可得

$$u_\pm^q-qu_\pm=E.$$

由于 u^q-qu 关于 u 在 $(0,1)$ 上递减, 在 $(1,+\infty)$ 上递增, 对任意的 $E\in(1-q,0)$, $u^q-qu=E$ 恰有两个解, 分别为 u_+ 和 u_-. 首先证明 $u_->0$.

引理 2.1 对任意的 $q>1$ 且 $q\neq 2$, 设 u 为方程 (2.1) 的任意非负 C^2 解, 则 u 恒为正.

证明 假设引理不成立, 不妨设 $u(0)=0$, 由 u 是非负的知 $\theta=0$ 为 u 的一个极小值点, 此时有 $u_\theta(0)=0$, 代入方程 (2.2) 知 $E=0$. 考虑 u 的极大值点取值 u_+, 从 $u_+^q-qu_+=0$ 可解得 $u_+=q^{\frac{1}{q-1}}$.

设曲线段的支撑函数 u 满足 $E=0$ 时的方程 (2.2), 且两端取到 u 的相邻的极小值 0 与极大值 u_+, 则其全曲率 $\Xi(q)$ 为

$$\Xi(q)=\int_{\theta_-}^{\theta_+}d\theta=\int_{u_-}^{u_+}\frac{du}{u_\theta}=\int_0^{q^{\frac{1}{q-1}}}(q^{\frac{2}{q}}u^{\frac{2}{q}}-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

作变量代换 $v=u^{\frac{q-1}{q}}$, 有

$$\Xi(q)=\int_0^{q^{\frac{1}{q}}}\frac{q}{q-1}(q^{\frac{2}{q}}-v^2)^{-\frac{1}{2}}dv=\frac{q}{2q-2}\pi.$$

由 Guass-Bonnet 定理可知, 以 u 为支撑函数的平面嵌入闭曲线 Γ 的全曲率为 2π. 另外, 当闭曲线 Γ 上的点围绕其一圈时, 支撑函数取到相邻的极小值与极大值的曲线段出现 $2k$ 次, 其中 k 为一个正整数, 则它的全曲率为 $2k\Xi(q)$. 因此, 有 $\Xi(q)=\frac{\pi}{k}$. 但当 $q\in(1,2)$ 时, $\Xi(q)>\pi$; 当 $q>2$ 时, $\frac{\pi}{2}<\Xi(q)<\pi$. 这推导出了一个矛盾, 因此 u 恒为正. □

由引理 2.1 知 $u_->0$, 从而记 $r=\frac{u_+}{u_-}>1$, 则有

$$u_-=\left(\frac{q(r-1)}{r^q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

和

$$E=\left(\frac{q(r-1)}{r^q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left(\frac{q(r-r^q)}{r^q-1}\right). \tag{2.3}$$

利用 (2.2) 和 (2.3), 可以得到

$$u_\theta=\pm\left[\left(\left(\frac{q(r-1)}{r^q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left(\frac{q(r-r^q)}{r^q-1}\right)+qu\right)^{\frac{2}{q}}-u^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 设曲线段的支撑函数 u 满足 (2.2), 且两端分别与以原点为中心且半径为 1 和 r 的圆相切, 则其全曲率 $\Theta(q,r)$ 为

$$\begin{aligned}\Theta(q,r)&=\int_{\theta_-}^{\theta_+}d\theta=\int_{u_-}^{u_+}\frac{du}{u_\theta}\\&=\int_1^r\frac{dx}{\sqrt{((\frac{q(r-1)}{r^q-1})^{\frac{1}{q-1}}(\frac{q(r^1-r^q)}{r^q-1})(u_-)^{-q}+q(u_-)^{1-q}x)^{\frac{2}{q}}-x^2}}\\&=\int_1^r\frac{ds}{\sqrt{(1+\frac{r^q-1}{r-1}(x-1))^{\frac{2}{q}}-x^2}},\end{aligned}$$

其中作变量替换 $x=\frac{u}{u_-}\in(1,r)$. 从而可以证明如下的引理:

引理 2.2　如果对任意的 $q\in(4,5]$ 和 $r\in(1,+\infty)$, 有 $\frac{\pi}{2}<\Theta(q,r)<\pi$, 则方程 (2.1) 有唯一的嵌入解, 即常值解.

证明　假设方程 (2.1) 存在一个非常值的嵌入解 $u(\theta)$, 应用 Guass-Bonnet 定理, 通过与引理 2.1 相同的推导过程, 有 $\Theta(q,r)=\frac{\pi}{k}$, 这与条件矛盾. 因此, 完成了引理 2.2 的证明. □

在以下两节研究当 $4<q\leqslant 5$ 时 $\Theta(q,r)$ 的值分布.

3　$\Theta(q,r)$ 的性质

本节研究 $\Theta(q,r)$ 的性质. 首先对于 $\Theta(q,r)$ 的极限值和特殊值, 有如下的引理:

引理 3.1 [43]　$\Theta(q,r)$ 关于 q 和 r 是连续的, 且有

$$\lim_{r\to 1^+}\Theta(q,r)=\frac{\pi}{\sqrt{q-1}},\quad q>1, \tag{3.1}$$

$$\lim_{r\to +\infty}\Theta(q,r)=\frac{q}{q-1}\frac{\pi}{2},\quad q>1, \tag{3.2}$$

$$\Theta(2,r)=\pi,\quad r>1. \tag{3.3}$$

考虑 $\Theta(q,r)$ 关于 q 的单调性, 有如下的引理:

引理 3.2 [43]　对任意的 $r>1$ 和 $q>1$, $\Theta(q,r)$ 关于 q 是严格递减的.

由 (3.3) 和引理 3.2, 当 $4<q\leqslant 5$ 时, 有

$$\Theta(5,r)\leqslant\Theta(q,r)<\Theta(2,r)=\pi,\quad r>1. \tag{3.4}$$

因此, 只需要证明对任意的 $r>1$ 和 $q\in(4,5]$, 都有 $\Theta(q,r)>\frac{\pi}{2}$.

为了方便起见, 以下记 $\Theta(5,r)$ 为 $\Theta(r)$, 并作变量替换 $t=\frac{x-1}{r-1}\in(0,1)$, 有

$$\Theta(r)=\int_1^r\frac{dx}{\sqrt{(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1))^{\frac{2}{5}}-x^2}}=\int_0^1\frac{(r-1)dt}{\sqrt{(1+(r^5-1)t)^{\frac{2}{5}}-(1+(r-1)t)^2}}. \tag{3.5}$$

为了研究 $\Theta(r)$ 的下界, 需要以下引理:

引理 3.3　令 $F(r)=\frac{\Theta(r)}{r-1}$. 对任意的 $r>1$, $F(r)$ 是严格递减的和严格凸的.

证明　对任意的 $r>1$ 和 $0<t<1$, 令

$$A(r,t)=(1+(r^5-1)t)^{\frac{2}{5}}-(1+(r-1)t)^2,$$
$$B(r,t)=(1+(r^5-1)t)^{\frac{1}{5}},$$

则有 $A>0$ 和 $1<B<r$. 进一步地, 由直接计算可得

$$B_r(r,t)=tr^4B^{-4}>0, \tag{3.6}$$

$$A_r(r,t)=2t(r^4B^{-3}-(1+(r-1)t))>0, \tag{3.7}$$

$$A_{rr}(r,t)=2t(4r^3B^{-3}-3r^8B^{-8}t-t)>0, \tag{3.8}$$

$$A_{rrr}(r,t)=24tr^2B^{-3}(2tr^5B^{-5}-1)(tr^5B^{-5}-1). \tag{3.9}$$

由 (3.5) 可得 $F(r)=\int_0^1A^{-\frac{1}{2}}dt$, 则对任意的 $r>1$, 都有

$$F'(r)=\int_0^1(A^{-\frac{1}{2}})_rdt=-\frac{1}{2}\int_0^1A^{-\frac{3}{2}}A_rdt<0,$$

从而 $F(r)$ 是严格递减的.

接下来, 证明 $F(r)$ 的凸性. 我们断言: 对任意的 $r>1$ 和 $0<t\leqslant\frac{1}{1+r^5}$, 都有

$$J(r,t):=(r^4-(1+(r-1)t)B^3)(4r^3B^{-3}-3tr^8B^{-8}-t)-3r^2\frac{B^2-(1+(r-1)t)^2}{t}>0. \tag{3.10}$$

假设断言 (3.10) 成立, 以下给出 $F''(r)>0$ 的证明, 其中

$$F''(r)=\int_0^1(A^{-\frac{1}{2}})_{rr}dt=\frac{1}{4}\int_0^1A^{-\frac{5}{2}}(3A_r^2-2AA_{rr})dt.$$

令 $G(r,t)=3A_r^2(r,t)-2A(r,t)A_{rr}(r,t)$, 由于 $G(1,t)=0$, 所以只需要证明对于 $r>1$ 和 $0<t<1$, 有

$$G_r(r,t)=4A_r(r,t)A_{rr}(r,t)-2A(r,t)A_{rrr}(r,t)>0. \tag{3.11}$$

使用反证法, 假设存在 $r_0>1$ 和 $0<t_0<1$ 使得 $G_r(r_0,t_0)\leqslant 0$. 由 $A>0$、(3.7) 和 (3.8), 有 $A_{rrr}(r_0,t_0)>0$. 又由 $t_0r_0^5B^{-5}(r_0,t_0)=\frac{r_0^5t_0}{1+(r_0^5-1)t_0}\in(0,1)$, 从 (3.9) 可得 $t_0r_0^5B^{-5}(r_0,t_0)\leqslant\frac{1}{2}$, 即 $0<t_0\leqslant\frac{1}{1+r_0^5}$. 结合断言 (3.10), 有

$$G_r(r_0,t_0)=\frac{32t_0^2}{B^3(r_0,t_0)}J(r_0,t_0)>0,$$

这与假设矛盾. 因此, (3.11) 对 (r,t) 恒成立, 结合 $G(1,t)=0$ 可以得到 $G(r,t)>0$, 以及

$$F''(r)=\frac{1}{4}\int_0^1 A^{-\frac{5}{2}}Gdt>0.$$

综上, 在断言 (3.10) 成立的情形下, 完成了 $F(r)$ 严格凸性的证明.

最后, 给出断言 (3.10) 的证明. 为了方便起见, 记

$$J(r,t)=I_1(r,t)I_2(r,t)-3r^2I_3(r,t),$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1(r,t)&=r^4-(1+(r-1)t)B^3=\frac{B^3}{2t}A_r>0,\\
I_2(r,t)&=4r^3B^{-3}-3r^8B^{-8}t-t=\frac{1}{2t}A_{rr}>0,\\
I_3(r,t)&=\frac{B^2-(1+(r-1)t)^2}{t}=\frac{1}{t}A>0.
\end{aligned}$$

接下来证明对任意的 $r>1$ 和 $0<t\leqslant\frac{1}{1+r^5}$, 都有 $J_t(r,t)<0$ 和 $J(r,\frac{1}{1+r^5})>0$.

通过直接的计算, 可以得到

$$\frac{\partial I_1}{\partial t}=-(r-1)B^3-\frac{3}{5}(1+(r-1)t)(r^5-1)B^{-2}<0$$

和

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial t}&=-\frac{12}{5}r^3(r^5-1)B^{-8}-1-3r^8B^{-8}+\frac{24}{5}r^8(r^5-1)B^{-13}t\\
&<-1-3r^8B^{-8}-\frac{12}{5}r^8(r^5-1)B^{-8}\left(r^{-5}-\frac{2t}{1+(r^5-1)t}\right)\\
&<-3r^8B^{-8},
\end{aligned}\tag{3.12}$$

其中 (3.12) 最后的不等式中用到了 $t<\frac{1}{1+r^5}$. 由于代数不等式 $(1+x)^{\frac{3}{5}}-1-\frac{3}{5}x\geqslant-\frac{3}{25}x^2$ 对任意的 $x>0$ 成立, 所以有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_3}{\partial t}&=\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{5}(r^5-1)tB^{-3}-B^2-(r-1)^2t^2+1\right)\\
&=-(r-1)^2+\frac{B^{-3}}{t^2}\left(\frac{2}{5}(r^5-1)t-B^5+B^3\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(r-1)^2 + \frac{B^{-3}}{t^2}\left((1+(r^5-1)t)^{\frac{3}{5}} - 1 - \frac{3}{5}(r^5-1)t\right) \\
&\geqslant -(r-1)^2 - \frac{3}{25}B^{-3}(r^5-1)^2.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t} &< I_1\frac{\partial I_2}{\partial t} - 3r^2\frac{\partial I_3}{\partial t} \\
&< -3r^8B^{-8}(r^4-(1+(r-1)t)B^3) + 3r^2\left((r-1)^2 + \frac{3}{25}B^{-3}(r^5-1)^2\right) \\
&= -3r^2B^{-8}\left(r^{10} - (1+(r-1)t)r^6B^3 - (r-1)^2B^8 - \frac{3}{25}(r^5-1)^2B^5\right). \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

令 $K(r,t) = r^{10} - (1+(r-1)t)r^6B^3 - (r-1)^2B^8 - \frac{3}{25}(r^5-1)^2B^5$, 由 $B_t(r,t) > 0$ 可知 $K_t(r,t) < 0$, 则对任意的 $0 < t \leqslant \frac{1}{1+r^5}$, 都有

$$
\begin{aligned}
K(r,t) &\geqslant K\left(r, \frac{1}{1+r^5}\right) \\
&= r^{10} - \frac{r^5+r}{r^5+1}r^6\left(\frac{2r^5}{1+r^5}\right)^{\frac{3}{5}} - (r-1)^2\left(\frac{2r^5}{1+r^5}\right)^{\frac{8}{5}} - \frac{3}{25}(r^5-1)^2\left(\frac{2r^5}{1+r^5}\right). \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

令 $\tilde{K}(r) = r^{-5}(1+r^5)^{\frac{8}{5}}K(r, \frac{1}{1+r^5})$, 则 $\tilde{K}(1) = 0$, 并且对任意的 $r > 1$ 有

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}'(r) &= -6\cdot 2^{\frac{3}{5}}r^2 + 16\cdot 2^{\frac{3}{5}}r^3 - 15\cdot 2^{\frac{3}{5}}r^4 - 9\cdot 2^{\frac{3}{5}}r^8 + \frac{167}{25}\frac{r^4}{(1+r^5)^{\frac{2}{5}}} + \frac{486}{25}\frac{r^9}{(1+r^5)^{\frac{2}{5}}} + \frac{247}{25}\frac{r^{14}}{(1+r^5)^{\frac{2}{5}}} \\
&> 2^{-\frac{2}{5}}\left(-\frac{133}{25}r^2 + 32r^3 - 30r^4 + \frac{486}{25}r^7 - 18r^8 + \frac{247}{25}r^{12}\right) \\
&= 2^{-\frac{2}{5}}\left(\frac{133}{25}(r^3-r^2) + 9(r^7-2r^8+r^{12}) + r^3\left(\frac{667}{25} - 30r + \frac{261}{25}r^4 + \frac{22}{25}r^9\right)\right) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

从而 $\tilde{K}(r) > 0$. 对任意的 $r > 1$ 和 $0 < t \leqslant \frac{1}{1+r^5}$, 结合 (3.14) 可得 $K(r,t) > 0$. 再由 (3.13) 可知 $J(r,t)$ 关于 t 是严格单调递减的.

现在可以证明断言 (3.10): 由 $J(r,t)$ 关于 t 的单调性, 对任意的 $0 < t \leqslant \frac{1}{1+r^5}$, 都有

$$
\begin{aligned}
J(r,t) &\geqslant J\left(r, \frac{1}{1+r^5}\right) \\
&= r^4(1 - 2^{\frac{3}{5}}(1+r^4)(1+r^5)^{-\frac{8}{5}})(2^{\frac{7}{5}}(1+r^5)^{\frac{3}{5}} - 3\cdot 2^{-\frac{8}{5}}(1+r^5)^{\frac{3}{5}} - (1+r^5)^{-1}) \\
&\quad - 3r^4(2^{\frac{2}{5}}(1+r^5)^{\frac{3}{5}} - (1+r^4)^2(1+r^5)^{-1}).
\end{aligned}
$$

为了证明 $J(r, \frac{1}{1+r^5}) > 0$, 注意到

$$
2^{\frac{7}{5}}(1+r^5)^{\frac{3}{5}} - 3\cdot 2^{-\frac{8}{5}}(1+r^5)^{\frac{3}{5}} - (1+r^5)^{-1} > 2^{\frac{2}{5}}(1+r^5)^{\frac{3}{5}},
$$

接下来只需要证明

$$
\begin{aligned}
0 &< r^4(1+r^5)^{-1}(2^{\frac{2}{5}}(1+r^5)^{\frac{8}{5}} - 2(1+r^4) - 3\cdot 2^{\frac{2}{5}}(1+r^5)^{\frac{8}{5}} + 3(1+r^4)^2) \\
&= r^4(1+r^5)^{-1}(3(1+r^4)^2 - 2(1+r^4) - 2^{\frac{7}{5}}(1+r^5)^{\frac{8}{5}}).
\end{aligned}
$$

令 $L(r)=3(1+r^4)^2-2(1+r^4)-2^{\frac{7}{5}}(1+r^5)^{\frac{8}{5}}$. 直接计算可得

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{L'(r)}{r^3}\right)=32r^3(3-2^{-\frac{3}{5}}((1+r^{-5})^{\frac{3}{5}}+3(1+r^{-5})^{-\frac{2}{5}}))\geqslant 32(3-2^{\frac{7}{5}})r^3>0,$$

其中用到当 $\lambda=1+r^{-5}\in(1,2)$ 时 $\lambda^{\frac{3}{5}}+3\lambda^{-\frac{2}{5}}>4$ 的结果. 结合 $L'(1)=8$ 可得 $\frac{L'(r)}{r^3}>0$, 从而 $L'(r)>0$. 又由 $L(1)=0$ 可得 $L(r)>0$, 从而 $J(r,t)\geqslant J(r,\frac{1}{1+r^5})>0$, 即证明了断言 (3.10).

综上所述, 至此完成了引理 3.3 的证明. □

4　定理 1.2 的证明

本节对 $r\in(1,+\infty)$ 分 3 种情形进行讨论, 证明 $\Theta(r)>\frac{\pi}{2}$ 成立. 再结合引理 2.2 和 (3.4), 从而给出定理 1.2 的证明.

4.1　$r\in(1,1.18]$ 的情形

当 $r\in(1,1.18]$ 时, 利用 $\Theta(r)$ 在 $r=1$ 处的 Taylor 展开进行计算, 可以证明如下引理:

引理 4.1　对任意的 $r\in(1,1.18]$, 都有 $\Theta(r)>\frac{\pi}{2}$.

证明　令 $\varphi(r,t)=(1+(r^5-1)t)^{\frac{2}{5}}-(1+(r-1)t)^2$ 和 $\delta=r-1$, 则 $\Theta(r)=\int_0^1\delta\varphi^{-\frac{1}{2}}(r,t)dt$. 将 $\varphi(r,t)$ 在 $r=1$ 处 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned}\varphi(r,t)=4t(1-t)\delta^2\bigg[&1+(1-2t)\delta+\frac{1}{2}(1-11t+13t^2)\delta^2\\&+\frac{1}{10}(1-74t+286t^2-234t^3)\delta^3+R(r_t,t)\delta^4\bigg],\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $r_t\in(1,r)$,

$$\begin{aligned}R(s,t)&=\frac{\frac{\partial^6\varphi}{\partial s^6}(s,t)}{6!\cdot 4t(1-t)}\\&=\frac{s^4t}{10}(1+(s^5-1)t)^{-\frac{28}{5}}(-63+(189+448s^5)t\\&\quad-(189+896s^5+358s^{10})t^2+(63+448s^5+358s^{10}+28s^{15})t^3).\end{aligned}$$

为了给出 $\Theta(r)$ 当 $r\in(1,1.18]$ 时的下界, 本文给出 $R(r_t,t)$ 的估计.

接下来证明对任意的 $r\in(1,1.18]$ 和 $t\in(0,1)$, 都有 $R(r,t)\leqslant\frac{14}{5}$. 为此, 令

$$\begin{aligned}\psi(r,t)&=10(1+(r^5-1)t)^{\frac{28}{5}}\left(\frac{14}{5}-R(r,t)\right)\\&=28(1+(r^5-1)t)^{\frac{28}{5}}-r^4t(-63+(189+448r^5)t\\&\quad-(189+896r^5+358r^{10})t^2+(63+448r^5+358r^{10}+28r^{15})t^3),\end{aligned}$$

只需要证明 $\psi(r,t)\geqslant 0$. 我们有

$$\psi_r(r,t)=28r^3t(9(1-t)^3-144r^5t(1-t)^2+179r^{10}t^2(1-t)-19r^{15}t^3+28r(1+(r^5-1)t)^{\frac{23}{5}}).$$

若 $t \in (0, \frac{1}{2})$, 通过直接计算, 对任意的 $r \in (1, 1.18]$, 都有

$$\begin{aligned} &19r^{15}t^3 < 19r^{15}t^2(1-t) < 44r^{10}t^2(1-t), \\ &28r(1+(r^5-1)t)^{\frac{23}{5}} > 28r > 97r^5t(1-t)^2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中在 (4.2) 中用到当 $t \in (0,1)$ 时 $t(1-t)^2 \leqslant \frac{4}{27}$ 的结果. 因此, 对 $t \in (0, \frac{1}{2})$, 有

$$\begin{aligned} \psi_r(r,t) &> 28r^3t(9(1-t)^3 - 47r^5t(1-t)^2 + 135r^{10}t^2(1-t)) \\ &= 28r^3t(1-t)\left(\left(3(1-t) - \frac{47}{6}r^5t(1-t)\right)^2 + \frac{2651}{36}r^{10}t^2\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

若 $t \in [\frac{1}{2}, 1)$, 对任意的 $r \in (1, 1.18]$, 都有

$$\begin{aligned} &9(1-t)^3 - 144r^5t(1-t)^2 + 179r^{10}t^2(1-t) > 0, \\ &28r(1+(r^5-1)t)^{\frac{23}{5}} > 28r^{15}t^3 > 19r^{15}t^3. \end{aligned}$$

因此, 对 $t \in [\frac{1}{2}, 1)$, 有 $\psi_r(r,t) > 0$. 从而对任意的 $r \in (1, 1.18]$ 和 $t \in (0,1)$, 都有

$$\psi(r,t) \geqslant \psi(1,t) = 28 + 63t - 637t^2 + 1443t^3 - 897t^4 \geqslant 0.$$

综上, 证明了 $R(r,t) \leqslant \frac{14}{5}$.

由 (4.1) 和 $R(r,t) \leqslant \frac{14}{5}$, 有

$$\varphi(r,t) \leqslant 4t(1-t)\delta^2(1+X), \tag{4.3}$$

其中

$$X = (1-2t)\delta + \frac{1}{2}(1 - 11t + 13t^2)\delta^2 + \frac{1}{10}(1 - 74t + 286t^2 - 234t^3)\delta^3 + \frac{14}{5}\delta^4.$$

对 $\delta \in (0, 0.18]$ 和 $t \in (0,1)$, 直接计算可得 $-0.8 < X < 0.6$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+X}} \geqslant 1 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 - \frac{5}{16}X^3. \tag{4.4}$$

令 $Y = 1 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 - \frac{5}{16}X^3$, 结合 (4.3) 和 (4.4) 可得

$$\Theta(r) = \int_0^1 \delta\varphi^{-\frac{1}{2}}(r,t)dt \geqslant \int_0^1 \frac{Y}{\sqrt{4t(1-t)}}dt.$$

将 (4.3) 代入 Y 的定义, 有

$$Y = 1 + \frac{1}{2}(-1+2t)\delta - \frac{1}{8}(-1 - 10t + 14t^2)\delta^2 + \frac{1}{80}(1 + 56t - 394t^2 + 356t^3)\delta^3 + Z\delta^4,$$

其中 Z 是关于 t 和 δ 的多项式. 通过直接的数值计算可得

$$\inf_{t\in(0,1),\, \delta\in(0,0.18]} Z > -\frac{23}{10}.$$

综上, 对任意的 $\delta \in (0, 0.18]$, 都有

$$\Theta(r) \geqslant \int_0^1 \frac{Y - Z\delta^4}{\sqrt{4t(1-t)}}dt + \int_0^1 \frac{Z\delta^4}{\sqrt{4t(1-t)}}dt > \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{32}\delta^2 - \frac{3}{32}\delta^3\right) - \frac{23\pi}{20}\delta^4 > \frac{\pi}{2}.$$

因此, $\Theta(r) > \frac{\pi}{2}$ 在 $r \in (1, 1.18]$ 上成立. □

4.2　$r \in [4, +\infty)$ 的情形

当 $r \in [4, +\infty)$ 时, 由 (3.5) 中 $\Theta(r)$ 的表达式, 通过 $\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1))^{\frac{2}{5}}-x^2}}$ 的下界估计, 有如下引理:

引理 4.2　对任意的 $r \in [4, +\infty)$, 都有 $\Theta(r) > \frac{\pi}{2}$.

证明　注意到 $\int_1^r \frac{dx}{\sqrt{(r-x)(r+x-2)}} = \frac{\pi}{2}$, 令

$$
\begin{aligned}
\eta(r,x) &= (r-x)(r+x-2) - \left(\left(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1)\right)^{\frac{2}{5}} - x^2\right) \\
&= 2x + r(r-2) - \left(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1)\right)^{\frac{2}{5}}.
\end{aligned}
$$

对任意的 $r \in [4, +\infty)$ 和 $x \in (1, r)$, 都有 $\eta(r, r) = 0$ 和

$$
\begin{aligned}
\eta_x(r,x) &= 2 - \frac{2(r^5-1)}{5(r-1)}\left(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1)\right)^{-\frac{3}{5}} \\
&< 2 - \frac{2(r^5-1)}{5(r-1)} r^{-3} \\
&< 2 - \frac{2(r+1)}{5} \\
&\leqslant 0,
\end{aligned}
$$

从而 $\eta(x, r) > 0$. 因此, 由 (3.5) 得到

$$
\Theta(r) = \int_1^r \frac{dx}{\sqrt{(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1))^{\frac{2}{5}} - x^2}} > \int_1^r \frac{dx}{\sqrt{(r-x)(r+x-2)}} = \frac{\pi}{2}.
$$

证毕. □

4.3　$r \in (1.18, 4)$ 的情形

当 $r \in (1.18, 4)$ 时, 本小节应用引理 3.3 和数值计算的方法来证明 $\Theta(r) > \frac{\pi}{2}$.

首先, 为了利用数值计算估计 $\Theta(r)$ 在特定点的取值范围, 应用文献 [52] 中的技巧到函数

$$
T(x) = \left(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1)\right)^{\frac{2}{5}}.
$$

记 $\Delta T(y,z) = \frac{T(z)-T(y)}{z-y}$, 给定正整数 k, 可以利用以下辅助函数来确定 $\Theta(r)$ 的上界和下界:

$$
\begin{aligned}
m_k(r) &= \sum_{i=1}^{k} \tilde{m}\left(1+\frac{r-1}{k}(i-1), 1+\frac{r-1}{k}i\right), \\
M_k(r) &= \sum_{i=1}^{k} \tilde{M}\left(1+\frac{r-1}{k}(i-1), 1+\frac{r-1}{k}i\right),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{m}(y,z) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{z-\frac{1}{2}T'(z)}{\sqrt{(T'(z))^2 + 4z(T(z)-T'(z))}}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 2\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{y-\frac{1}{2}T'(z)}{\sqrt{(T'(z))^2+4z(T(z)-T'(z))}}\right)^{\frac{1}{2}},\\
\tilde{M}(y,z) &= 2\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{z-\frac{1}{2}\Delta T(y,z)}{\sqrt{(\Delta T(y,z))^2+4z(T(z)-\Delta T(y,z))}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad - 2\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{y-\frac{1}{2}\Delta T(y,z)}{\sqrt{(\Delta T(y,z))^2+4z(T(z)-\Delta T(y,z))}}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

具体而言, 有以下引理:

引理 4.3 对任意的 $r>1$ 和正整数 k, 都有 $m_k(r)<\Theta(r)<M_k(r)$.

证明 由于

$$
T''(x) = -\frac{6}{25}\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right)^2\left(1+\frac{r^5-1}{r-1}(x-1)\right)^{-\frac{8}{5}} < 0,
$$

所以 $T(x)$ 是严格凹的. 对于 $i=0,1,\dots,k$, 令 $x_i = 1+\frac{r-1}{k}i$, 则对任意的 $x\in(x_i,x_{i+1})$, 都有

$$
0 \leqslant T(x_i)+\Delta T(x_i,x_{i+1})(x-x_i)-x^2 < T(x)-x^2 < T(x_i)+T'(x_i)(x-x_i)-x^2.
$$

由此得出

$$
\begin{aligned}
\Theta(r) &= \int_1^r \frac{dx}{\sqrt{T(x)-x^2}} = \sum_{i=1}^k \int_{1+\frac{r-1}{k}(i-1)}^{1+\frac{r-1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{T(x)-x^2}}\\
&> \sum_{i=1}^k \int_{1+\frac{r-1}{k}(i-1)}^{1+\frac{r-1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{T(x_i)+T'(x_i)(x-x_i)-x^2}}\\
&= \sum_{i=1}^k \tilde{m}\left(1+\frac{r-1}{k}(i-1), 1+\frac{r-1}{k}\right)\\
&= m_k(r).
\end{aligned}
$$

类似地, 有 $\Theta(r)<M_k(r)$. □

结合引理 3.3 和 4.3, 可以用 $m_k(r)$ 和 $M_k(r)$ 在一个区间上 3 个点处的值来判断 $\Theta(r)>\frac{\pi}{2}$ 在该区间上是否成立.

引理 4.4 令 $\underline{m}_k$ 是 m_k 的一个下界, $\overline{M}_k$ 是 M_k 的一个上界, δ 是一个足够小的正数. 给定 $1<r_1<r_2$, 若存在 $\hat{r}\in(r_1,r_2)$ 满足

$$
\underline{m}_k(\hat{r}) < \frac{\pi}{2},\quad \frac{\overline{M}_k(\hat{r}-\delta)}{\hat{r}-\delta-1} > \frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1} > \frac{\overline{M}_k(\hat{r}+\delta)}{\hat{r}+\delta-1},
$$

$$
P(r_1,\hat{r}) = \frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1}(r_1-1) + \left(\frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1} - \frac{\overline{M}_k(\hat{r}+\delta)}{\hat{r}+\delta-1}\right)\frac{\hat{r}-r_1}{m}(r_1-1) - \frac{\pi}{2} > 0, \tag{4.5}
$$

$$
Q(r_2,\hat{r}) = \frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1}(r_2-1) + \left(\frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1} - \frac{\overline{M}_k(\hat{r}-\delta)}{\hat{r}-\delta-1}\right)\frac{r_2-\hat{r}}{\delta}(r_2-1) - \frac{\pi}{2} > 0, \tag{4.6}
$$

则对任意的 $r\in[r_1,r_2]$, 都有 $\Theta(r)>\frac{\pi}{2}$.

证明 应用引理 4.3, 有 $\underline{m}_k(r)<m_k(r)<\Theta(r)<M_k(r)<\overline{M}_k(r)$. 当 $r\in[r_1,\hat{r}]$ 时, 由引理 3.3 可知 $\frac{\Theta(r)}{r-1}$ 是严格单调递减的和严格凸的, 从而

$$
\frac{\Theta(r)}{r-1} \geqslant \frac{\Theta(\hat{r})}{\hat{r}-1} + \left(\frac{\Theta(\hat{r})}{\hat{r}-1} - \frac{\Theta(\hat{r}+\delta)}{\hat{r}+\delta-1}\right)\frac{\hat{r}-r}{\delta} \geqslant \frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1} + \left(\frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1} - \frac{\overline{M}_k(\hat{r}+\delta)}{\hat{r}+\delta-1}\right)\frac{\hat{r}-r}{\delta}.
$$

这表明

$$
\begin{aligned}
\Theta(r) &\geqslant \frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1}(r-1)+\left(\frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1}-\frac{\overline{M}_k(\hat{r}+\delta)}{\hat{r}+\delta-1}\right)\frac{\hat{r}-r}{\delta}(r-1) \\
&> \frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1}(r_1-1)+\left(\frac{\underline{m}_k(\hat{r})}{\hat{r}-1}-\frac{\overline{M}_k(\hat{r}+\delta)}{\hat{r}+\delta-1}\right)\frac{\hat{r}-r_1}{\delta}(r_1-1) \\
&> \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

同理可以证明 $r \in [\hat{r}, r_2]$ 的情形. □

最后, 应用引理 4.4, 可以通过数值计算严格地证明 $\Theta(r) > \frac{\pi}{2}$ 成立.

引理 4.5 对任意的 $r \in (1.18, 4)$, 都有 $\Theta(r) > \frac{\pi}{2}$.

证明 将 $(1.18, 4)$ 分割成若干个区间分别进行证明. 令 $k = 20{,}000$, $\delta = \frac{1}{1{,}000}$. 在每个分割的区间 $[r_1, r_2]$ 上, 选取合适的 $\hat{r}$, 在 r_1、r_2 和 $\hat{r}$ 处分别计算 m_k 和 M_k 使误差足够小, 并对其在第 6 位小数进行向上取整和向下取整得到相应的 $\underline{m}_k$ 和 $\overline{M}_k$. 接下来, 由 (4.5) 和 (4.6), 计算引理 4.4 中所述的 $P(r_1, \hat{r})$ 和 $Q(r_2, \hat{r})$. 最后, 通过验证 P 和 Q 均为正数, 应用引理 4.4, 可以证明在每个区间上都有 $\Theta(r) > \frac{\pi}{2}$.

举例来说, 当 $r_1 = 1.18$、$r_2 = 1.19$ 和 $\hat{r} = 1.185$ 时, 计算得到 $\overline{M}_k(\hat{r}-\delta) = 1.574966$, $\overline{M}_k(\hat{r}+\delta) = 1.575049$, $\underline{m}_k(\hat{r}) = 1.574955$, 代入 P 和 Q 知其大于 0, 从而 $\Theta(r) > \frac{\pi}{2}$ 对 $r \in (1.18, 1.19)$ 成立. 下面将所有的计算结果放于表 1 中.

由引理 4.4, 完成了此引理的证明. □

综上所述, 结合引理 4.1、4.2 和 4.5, 对任意的 $r \in (1, +\infty)$, 都有 $\Theta(5, r) = \Theta(r) > \frac{\pi}{2}$. 再由引理 2.2, 完成了定理 1.2 的证明.

表 1 引理 4.5 计算结果

r_1	r_2	$\hat{r}$	$\overline{M}_k(\hat{r}-\delta)$	$\underline{m}_k(\hat{r})$	$\overline{M}_k(\hat{r}+\delta)$	$P \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$
1.18	1.19	1.185	1.574966	1.574955	1.575049	23	27
1.19	1.20	1.195	1.575388	1.575378	1.575474	29	33
1.20	1.22	1.21	1.576051	1.576042	1.576142	4	12
1.22	1.24	1.23	1.576988	1.576981	1.577085	19	28
1.24	1.265	1.25	1.577982	1.577977	1.578084	34	10
1.265	1.295	1.28	1.579571	1.579569	1.579681	24	39
1.295	1.33	1.31	1.581269	1.581268	1.581386	49	35
1.33	1.37	1.35	1.583683	1.583684	1.583808	51	75
1.37	1.43	1.40	1.586908	1.586910	1.587041	33	69
1.43	1.51	1.47	1.591739	1.591742	1.591882	40	92
1.51	1.63	1.57	1.599116	1.599117	1.599267	23	103
1.63	1.77	1.70	1.609225	1.609221	1.609383	119	218
1.77	1.97	1.87	1.622815	1.622801	1.622975	150	288
1.97	2.27	2.12	1.642636	1.642603	1.642792	176	365
2.27	2.57	2.32	1.657845	1.657795	1.657994	750	124
2.57	3.07	2.82	1.692174	1.692077	1.692300	414	616
3.07	4	3.53	1.731619	1.731458	1.731716	63	110

致谢 感谢审稿人的仔细阅读和修改建议.

参考文献

1 Aleksandrov A D. On the theory of mixed volumes of convex bodies. III. Extension of two theorems of Minkowski on convex polyhedra to arbitrary convex bodies. Mat Sb, 1938, 3: 27–46
2 Andrews B. Classification of limiting shapes for isotropic curve flows. J Amer Math Soc, 2003, 16: 443–459
3 Andrews B, Chen X, Wei Y. Volume preserving flow and Alexandrov-Fenchel type inequalities in hyperbolic space. J Eur Math Soc (JEMS), 2023, 23: 2467–2509
4 Andrews B, Hu Y, Li H. Harmonic mean curvature flow and geometric inequalities. Adv Math, 2020, 375: 107393
5 Böröczky K J, Fodor F. The L_p dual Minkowski problem for $p > 1$ and $q > 0$. J Differential Equations, 2019, 266: 7980–8033
6 Böröczky K J, Henk M, Pollehn H. Subspace concentration of dual curvature measures of symmetric convex bodies. J Differential Geom, 2018, 109: 411–429
7 Böröczky K J, Lutwak E, Yang D, et al. The logarithmic Minkowski problem. J Amer Math Soc, 2013, 26: 831–852
8 Böröczky K J, Lutwak E, Yang D, et al. The dual Minkowski problem for symmetric convex bodies. Adv Math, 2019, 356: 106805
9 Böröczky K J, Trinh H T. The planar L-Minkowski problem for $0 < p < 1$. Adv Appl Math, 2017, 87: 58–81
10 Brendle S, Choi K, Daskalopoulos P. Asymptotic behavior of flows by powers of the Gaussian curvature. Acta Math, 2017, 219: 1–16
11 Bryan P, Ivaki M N, Scheuer J. Christoffel-Minkowski flows. Trans Amer Math Soc, 2023, 376: 2373–2393
12 Chen C, Huang Y, Zhao Y. Smooth solutions to the L_p dual Minkowski problem. Math Ann, 2019, 373: 953–976
13 Chen H, Chen S, Li Q R. Variations of a class of Monge-Ampère-type functionals and their applications. Anal PDE, 2021, 14: 689–716
14 Chen H, Li Q R. The L_p dual Minkowski problem and related parabolic flows. J Funct Anal, 2021, 281: 109139
15 Chen S, Li Q R. On the planar dual Minkowski problem. Adv Math, 2018, 333: 87–117
16 Cheng S Y, Yau S T. On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem. Comm Pure Appl Math, 1976, 29: 495–516
17 Chou K S, Wang X J. The L_p-Minkowski problem and the Minkowski problem in centroaffine geometry. Adv Math, 2006, 205: 33–83
18 Fenchel W, Jessen B. Mengenfunktionen und konvexe Körper. Danske Vid Selsk Mat Fys Medd, 1938, 16: 1–31
19 Firey W J. p-means of convex bodies. Math Scand, 1962, 10: 17–24
20 Gao S, Li H, Ma H. Uniqueness of closed self-similar solutions to σ_k^α-curvature flow. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 2018, 25: 45
21 Gao S, Li H, Wang X. Self-similar solutions to fully nonlinear curvature flows by high powers of curvature. J Reine Angew Math, 2022, 783: 135–157
22 Guan P, Ma X N. The Christoffel-Minkowski problem I: Convexity of solutions of a Hessian equation. Invent Math, 2003, 151: 553–577
23 Guan P, Xia C. L^p Christoffel-Minkowski problem: The case $1 < p < k + 1$. Calc Var Partial Differential Equations, 2018, 57: 69
24 Haberl C, Schuster F E. Asymmetric affine L_p Sobolev inequalities. J Funct Anal, 2009, 257: 641–658
25 Henk M, Pollehn H. Necessary subspace concentration conditions for the even dual Minkowski problem. Adv Math, 2018, 323: 114–141
26 Hu C, Ma X N, Shen C. On the Christoffel-Minkowski problem of Firey's p-sum. Calc Var Partial Differential Equations, 2004, 21: 137–155
27 Hu Y, Li H. Geometric inequalities for static convex domains in hyperbolic space. Trans Amer Math Soc, 2022, 375: 5587–5615
28 Hu Y, Li H. Blaschke-Santaló type inequalities and quermassintegral inequalities in space forms. Adv Math, 2023, 413: 108826
29 Hu Y, Li H, Wei Y. Locally constrained curvature flows and geometric inequalities in hyperbolic space. Math Ann, 2022, 382: 1425–1474
30 Huang Y, Jiang Y. Variational characterization for the planar dual Minkowski problem. J Funct Anal, 2019, 277: 2209–2236
31 Huang Y, Liu J, Xu L. On the uniqueness of L_p-Minkowski problems: The constant p-curvature case in $\mathbb{R}^3$. Adv Math, 2015, 281: 906–927

32 Huang Y, Lutwak E, Yang D, et al. Geometric measures in the dual Brunn-Minkowski theory and their associated Minkowski problems. Acta Math, 2016, 216: 325–388
33 Huang Y, Lutwak E, Yang D, et al. The L_p-Aleksandrov problem for L_p-integral curvature. J Differential Geom, 2018, 110: 1–29
34 Huang Y, Zhao Y. On the L_p dual Minkowski problem. Adv Math, 2018, 332: 57–84
35 Hug D, Lutwak E, Yang D, et al. On the L_p Minkowski problem for polytopes. Discrete Comput Geom, 2005, 33: 699–715
36 Ivaki M N. Deforming a hypersurface by principal radii of curvature and support function. Calc Var Partial Differential Equations, 2019, 58: 1
37 Ivaki M N, Milman E. Uniqueness of solutions to a class of isotropic curvature problems. Adv Math, 2023, 435: 109350
38 Jian H, Lu J, Zhu G. Mirror symmetric solutions to the centro-affine Minkowski problem. Calc Var Partial Differential Equations, 2016, 55: 41
39 Jiang Y, Wang Z, Wu Y. Multiple solutions of the planar L_p dual Minkowski problem. Calc Var Partial Differential Equations, 2021, 60: 89
40 Jiang Y, Wang Z, Wu Y. Variational analysis of the planar L_p dual Minkowski problem. Math Ann, 2023, 386: 1201–1235
41 Jiang Y, Wu Y. On the 2-dimensional dual Minkowski problem. J Differential Equations, 2017, 263: 3230–3243
42 Lewy H. On differential geometry in the large. I. Minkowski's problem. Trans Amer Math Soc, 1938, 43: 258–270
43 Li H, Wan Y. Classification of solutions for the planar isotropic L_p dual Minkowski problem. arXiv:2209.14630, 2022
44 Li H, Wan Y. The Christoffel problem in the hyperbolic plane. Adv Appl Math, 2023, 150: 102557
45 Li H, Wan Y. Uniqueness of solutions to some classes of anisotropic and isotropic curvature problems. J Funct Anal, 2024, 287: 110471
46 Li H, Wan Y. Classification of solutions to the isotropic horospherical p-Minkowski problem in hyperbolic plane. arXiv:2405.04301, 2024
47 Li H, Wan Y, Xu B. The discrete horospherical p-Minkowski problem in hyperbolic space. Adv Math, 2024, 453: 109851
48 Li H, Wei Y, Xiong C. A geometric inequality on hypersurface in hyperbolic space. Adv Math, 2014, 253: 152–162
49 Li H, Xu B. Hyperbolic p-sum and horospherical p-Brunn-Minkowski theory in hyperbolic space. arXiv:2211.06875, 2022
50 Li Q R, Liu J, Lu J. Nonuniqueness of solutions to the L_p dual Minkowski problem. Int Math Res Not IMRN, 2022, 2022: 9114–9150
51 Li Q R, Sheng W, Wang X J. Flow by Gauss curvature to the Aleksandrov and dual Minkowski problems. J Eur Math Soc (JEMS), 2020, 22: 893–923
52 Liu Y N, Lu J. On the number of solutions to the planar dual Minkowski problem. arXiv:2209.15385, 2022
53 Lu J, Wang X J. Rotationally symmetric solutions to the L_p-Minkowski problem. J Differential Equations, 2013, 254: 983–1005
54 Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory. I. Mixed volumes and the Minkowski problem. J Differential Geom, 1993, 38: 131–150
55 Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory. II. Affine and geominimal surface areas. Adv Math, 1996, 118: 244–294
56 Lutwak E, Oliker V. On the regularity of solutions to a generalization of the Minkowski problem. J Differential Geom, 1995, 41: 227–246
57 Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p affine isoperimetric inequalities. J Differential Geom, 2000, 56: 111–132
58 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Sharp affine L_p Sobolev inequalities. J Differential Geom, 2002, 62: 17–38
59 Lutwak E, Yang D, Zhang G. On the L_p-Minkowski problem. Trans Amer Math Soc, 2004, 356: 4359–4370
60 Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p dual curvature measures. Adv Math, 2018, 329: 85–132
61 Minkowski H. Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder. Nachr Ges Wiss Göttingen, 1897, 1897: 198–219
62 Minkowski H. Volumen und Oberfläche. Math Ann, 1903, 57: 447–495
63 Nirenberg L. The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Comm Pure Appl Math, 1953, 6: 337–394
64 Pogorelov A V. The Minkowski Multidimensional Problem (Scripta Series in Mathematics). Washington DC: V. H. Winston & Sons; New York-Toronto-London: Halsted Press [John Wiley & Sons], 1978
65 Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2014
66 Sheng W, Xia S. The planar L_p dual Minkowski problem. Sci China Math, 2021, 64: 1637–1648

67 Wang G, Xia C. Isoperimetric type problems and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the hyperbolic space. Adv Math, 2014, 259: 532–556
68 Zhao Y. The dual Minkowski problem for negative indices. Calc Var Partial Differential Equations, 2017, 56: 18
69 Zhao Y. Existence of solutions to the even dual Minkowski problem. J Differential Geom, 2018, 110: 543–572
70 Zhu G. The logarithmic Minkowski problem for polytopes. Adv Math, 2014, 262: 909–931
71 Zhu G. The L_p Minkowski problem for polytopes for $0 < p < 1$. J Funct Anal, 2015, 269: 1070–1094

The planar isotropic L_p dual Minkowski problem

Haizhong Li, Yao Wan & Yijia Zhang

Abstract In this paper, we provide an overview of the planar isotropic L_p dual Minkowski problem, i.e., the study of the following equation:

$$u^{1-p}(u_\theta^2+u^2)^{\frac{q-2}{2}}(u_{\theta\theta}+u)=1, \quad \theta\in\mathbb{S}^1. \tag{1}$$

Furthermore, when $p=1$ and $4<q\leqslant 5$, by using theoretical analysis and numerical estimation for a parameter integral, we prove the uniqueness of solutions to the equation (1).

Keywords L_p **dual Minkowski problem, fully nonlinear ordinary differential equation, classification**

MSC(2020) 35J96, 52A10, 34C25

doi: 10.1360/SSM-2024-0096