具有扩散项的广义 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程孤立波与周期波

杜增吉*, 林晓洁, 余姗姗

江苏师范大学数学与统计学院, 徐州 221116

E-mail: duzengji@163.com, linxiaojie@163.com, Yushanshancz@163.com

收稿日期: 2020-05-12; 接受日期: 2020-07-13; 网络出版日期: 2020-09-27; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871251 和 11771185) 资助项目

摘要 本文研究具有弱向后扩散项的广义 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程; 通过运用动力系统方法, 特别是几何奇异摄动理论和不变流形理论, 得到方程孤立波解与周期波解的存在性; 通过计算 Abel 积分的比值得到波速的单调性. 同时给出了方程极限波速的上下界和周期波解的一些性质.

关键词 广义 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程 孤立波 周期波 几何奇异摄动 Abel 积分

MSC (2020) 主题分类 34C25, 34D15, 35C07

1 引言

随着对非线性偏微分方程行波解深入研究, 一些数学模型被应用于研究倾斜平面上液体层波动的流体力学行为^[1,2], 推动物理学领域的发展, 如 Camassa-Holm (CH) 方程^[3]、Degasperis-Procesi 方程^[4]、Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程^[5]、Korteweg-de Vries (KdV) 方程^[6]和 Novikov 方程^[7]等波方程. 近年来, Novikov 方程受到了广泛的关注, 具体形式如下:

$$u_t - u_{xxt} = u^2 u_{xxx} + 3u u_x u_{xx} - 4u^2 u_x, \quad (1.1)$$

这是 Novikov^[7]在研究三次非线性非局部的偏微分方程对称分类中发现的. 与 CH 方程相同的是, Novikov 方程也有尖峰孤波解 (peakon). 该方程非线性部分是三次的而非二次的. Ni 和 Zhou^[8]给出了方程 (1.1) 强解持久性的两个结果.

在方程 (1.1) 的基础上, Zhao 和 Zhou^[9]考虑了如下的 Novikov 方程:

$$u_t - u_{xxt} = u^2 u_{xxx} + 3u u_x u_{xx} - 4u^4 u_x, \quad (1.2)$$

英文引用格式: Du Z J, Lin X J, Yu S S. Solitary wave and periodic wave for a generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation with diffusion term (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 133–154, doi: 10.1360/SCM-2020-0413

与 Novikov 方程不同的是, 该方程将方程 (1.1) 中的非线性项 $u^2 u_x$ 替换为 $u^4 u_x$, 利用 $\tanh$ 函数扩展法得到了多个精确的行波解. Nizhnik^[10] 研究了如下 Nizhnik-Novikov-Veselov (NNV) 方程:

$$\begin{cases} u_t + k u_{xxx} + b u_{yyy} = 3k(uv)_x + 3l(uw)_y, \\ u_x = v_y, \\ u_y = w_x, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 b, k 和 l 为常数且 $kl \neq 0$. 后来广义的 NNV 方程引起了许多学者的广泛关注. 例如, Peng^[11] 研究了如下关于广义的 NNV 方程的双周期解问题:

$$\begin{cases} u_t + k u_{xxx} + b u_{yyy} + s u_x + q u_y = 3k(uv)_x + 3l(uw)_y, \\ u_x = v_y, \\ u_y = w_x, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 b, k, l, s 和 q 是常数且 $kl \neq 0$. 利用 WTC (Wiess-Tabor-Carnevale) 截断法得到了方程 (1.4) 含有两个任意函数的通解. Chen 和 Dong^[12] 将广义直接法与经典的 Lie 方法相结合得到了更为一般的解.

行波解对应于相关常微分方程的同宿轨和异宿轨. 一般地, 这样的轨道可以通过几何奇异摄动理论来找到 (参见文献 [13–16]), 它保证了不变流形的存在, 然后将问题归结为在这个流形上的一个扰动快慢系统进行研究. 几何奇异摄动理论是研究微分方程行波解的非常有用的工具和方法 (参见文献 [17–19]). 此外, 几何奇异摄动理论还可用于检测快慢极限环 (参见文献 [20]). 许多学者都对系统中的非法向双曲点感兴趣, 因为这影响了系统的快慢极限环的结构 (参见文献 [21]). 此外, Abel 积分理论为研究孤立波与周期波的存在性以及它们的性质提供了有效的方法. 如果孤立波速和周期波速可以用 Abel 积分的比值来表示, 那么就可以应用解析函数和代数几何理论^[22–24] 来进一步分析这些系统, 进而得到波速的上下界和它的单调性. 例如, Ogawa^[25] 利用几何奇异摄动理论和 Abel 积分理论研究了如下的 ε -族方程:

$$u_t + u u_x + u_{xxx} + \varepsilon(u_{xx} + u_{xxx}) = 0, \quad (1.5)$$

其中 ε 是一个充分小的正参数. 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 方程 (1.5) 就退化为 KdV 方程. 最初, 许多学者可能会研究方程 (1.5) 有着与 KdV 方程类似的解. 然而, 对于一些物理现象, 例如, Reynolds 数大或者表面张力小都依附于小的正参数 ε . 所以解决这一问题不仅对于数学还有其他应用领域都非常重要. 这对于研究非线性波系统中色散和不稳定性的作用有着重要作用. 此外, 许多文献研究了带有扰动的微分方程和系统, 如扰动 KdV 方程^[6, 17]、扰动 BBM 方程^[5, 26]、扰动 CH 方程^[14, 27] 和扰动反应扩散系统^[28] 等.

本文考虑如下带有扰动和局部时滞核的广义 NNV 方程:

$$\begin{cases} u_t + k u_{xxx} + b u_{yyy} + s u_x + q u_y + \tau(u_{xx} + u_{yy}) = 3k[(f * u)v]_x + 3l[(f * u)w]_y, \\ u_x = v_y, \\ u_y = w_x, \end{cases} \quad (1.6)$$

其中 b, k, l, s 和 q 均为常数, $kl \neq 0$ 且 τ 为一个小的正参数, u_t, u_x, u_y, v_y 和 w_x 都为发展项, u_{xx} 为耗散项, u_{xxx} 和 u_{yyy} 均为扩散项, $(f * u)v$ 和 $(f * u)w$ 两项为非线性项, $\tau(u_{xx} + u_{yy})$ 为扰动项,

$f * u$ 为时空卷积代表分布时滞. 这里 $f * u$ 定义如下:

$$f * u(x, y, t) = \int_{-\infty}^t f(t-i)u(x, y, i)di,$$

$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 满足如下的正规化假设条件, 即对于任意的 $t > 0$, 有 $f(t) \geq 0$, 并且有 $\int_0^\infty f(t)dt = 1$. 本文中讨论的弱局部时滞核为

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau > 0.$$

如果在系统 (1.6) 中非线性项 $(f * u)u$ 无时滞, 则可令 $p = -\frac{t-i}{\tau}$, 然后得到如下方程:

$$\begin{aligned} f * u(x, y, t) &= \int_{-\infty}^t f(t-s)u(x, y, i)di \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-i}{\tau}} u(x, y, i)di \\ &= \int_{-\infty}^0 e^p u(x, y, t+p\tau)dp. \end{aligned}$$

对方程的两边取极限, 可得

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} f * u(x, y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^p u(x, y, t+p\tau)dp = u(x, y, t) \int_{-\infty}^0 e^p dp = u(x, y, t).$$

因此, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 有 $f * u(x, y, t) \rightarrow u(x, y, t)$. 此时, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 系统 (1.6) 退化为系统 (1.4).

本文余下内容安排如下: 第 2 节介绍几何奇异摄动理论的一些基本知识. 第 3 节研究不含时滞和扰动情形下的广义 NNV 方程同宿轨道与周期轨道存在性. 第 4 节运用几何奇异摄动理论研究带有扰动和局部时滞核的广义 NNV 方程的孤波解和周期波解的存在性. 第 5 节运用 Abel 积分理论研究周期 T 的单调性和上下界.

2 预备知识

本节给出由 Fenichel^[16] 提出的几何奇异摄动理论的一些基本知识. 考虑系统

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y, \varepsilon), \\ y'(t) = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $' = \frac{d}{dt}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $n, l \geq 1$, ε 是一个实参数, f 和 g 在集合 $V \times I$ 上是 C^∞ 的, 这里 $V \in \mathbb{R}^{n+l}$ 且 I 是包含 0 的开区间. 作时间尺度变换 $\tau = \varepsilon t$, 则系统 (2.1) 转化为

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) = f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y}(t) = g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\dot{\cdot} = \frac{d}{d\tau}$, 称 (2.1) 为快系统, (2.2) 为慢系统. 只要 $\varepsilon \neq 0$, 则快系统 (2.1) 与慢系统 (2.2) 是等价的.

定义 2.1^[17] 如果在流形 M_0 上满足 $f(x, y, 0) = 0$, 则称 M_0 为临界流形. 如果系统 (2.1) 在流形 M_0 上的每一点处的线性化在虚轴上恰好具有 $\dim M_0$ 个特征值, 则称流形 M_0 为法向双曲的.

定义 2.2^[16] 如果集合 M 存在一个邻域 V , 使得没有轨迹可以离开 M 同时也在 V 内, 则称集合 M 在系统 (2.1) 流的作用下是局部不变的. 换句话说, 如果对于所有的 $x \in M$, $x \cdot [0, t] \subset V$, 都有 $x \cdot [0, t] \subset M$, 则称其为局部不变的. 当 $t < 0$ 时, 将 $[0, t]$ 替换为 $[t, 0]$ 也有相同的定义.

下面给出 Fenichel 不变流形定理和隐函数定理.

引理 2.1^[16] 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (2.1) 存在一个紧的、法向双曲的临界流形 M_0 , 并且 M_0 包含在集合 $\{f(x, y, 0) = 0\}$ 中. 对于任意的 $0 < r < +\infty$, 如果 $\varepsilon > 0$ 充分小, 则存在一个流形 M_ε , 满足

- (I) 在系统 (2.1) 流的作用下是局部不变的;
- (II) 关于 x, y 和 ε 是 C^r 的;
- (III) 流形表示为 $M_\varepsilon = \{(x, y) : x = h^\varepsilon(y)\}$, 其中 h^ε 是某 C^r 函数且 y 在某一紧集 K 上;
- (IV) 在 $O(\varepsilon)$ 邻域内, 存在局部不变的稳定流形和不稳定流形 $W^s(M_\varepsilon)$ 和 $W^u(M_\varepsilon)$, 且分别微分同胚于 $W^s(M_0)$ 和 $W^u(M_0)$.

定义 2.3^[14] 假设 $u(x, y, t) = \phi(x + y - ct) =: \phi(\xi)$ 是系统 (1.4) 的一个行波解, 如果满足 $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = 0$, 其中 $c > 0$ 为波速, 则称 $u(x, y, t)$ 为系统 (1.4) 的一个孤波解.

引理 2.2^[29] 令 G 是定义在 $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2$ 上的连续可微实函数. 假设 G 满足条件

$$G(X_0, Y_0) = Z_0, \quad \frac{\partial G}{\partial Y}(X_0, Y_0) \neq 0,$$

则存在开区间 U 和 V , 其中 $X_0 \in U$, $Y_0 \in V$ 和唯一的连续可微函数 $F: U \rightarrow V$, 满足

$$G[X, F(X)] = Z_0, \quad \forall X \in U$$

和

$$\frac{dY}{dX}(Y_0) = F'(Y_0) = \frac{-[\frac{\partial G}{\partial X}(X_0, Y_0)]}{[\frac{\partial G}{\partial Y}(X_0, Y_0)]}.$$

3 无时滞与扰动的系统同宿轨道与周期轨道的存在性

本节将证明系统 (1.6) 不含时滞与扰动的情形, 即

$$\begin{cases} u_t + ku_{xxx} + bu_{yyy} + su_x + qu_y = 3k(uv)_x + 3l(uw)_y, \\ u_x = v_y, \\ u_y = w_x \end{cases}$$

的孤波解与周期波解的存在性. 文献 [11, 12] 分别利用了 WTC 截断法和经典的 Lie 方法研究了方程 (1.4). 但文献 [11, 12] 并没有讨论方程 (1.4) 的平衡点和性态.

令

$$\phi(\xi) = u(x, y, t), \quad \phi_1(\xi) = v(x, y, t), \quad \phi_2(\xi) = w(x, y, t), \quad \xi = x + y - ct, \quad (3.1)$$

其中波速 $c > 0$. 将系统 (3.1) 代入系统 (1.4), 得到如下系统:

$$\begin{cases} (s + q - c)\phi' + (k + b)\phi''' = 3k(\phi\phi_1)' + 3l(\phi\phi_2)', \\ \phi' = \phi_1', \\ \phi' = \phi_2', \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $' = \frac{d}{d\xi}$. 对系统 (3.2) 中的方程进行积分, 可得

$$\begin{cases} (s+q-c)\phi + (k+b)\phi'' = 3k(\phi\phi_1) + 3l(\phi\phi_2), \\ \phi = \phi_1, \\ \phi = \phi_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

将系统 (3.3) 中的第 2 和 3 个方程代入第 1 个方程, 则有

$$(s+q-c)\phi - 3(k+l)\phi^2 + (k+b)\phi'' = 0, \quad (3.4)$$

系统 (3.4) 等价于如下的一阶方程组:

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = 3\frac{k+l}{k+b}\phi^2 - \frac{s+q-c}{k+b}\phi, \end{cases} \quad (3.5)$$

其中 $k+b \neq 0, k+l \neq 0$. 经过计算可知系统 (3.5) 具有首次积分

$$H(\phi, \psi) = -\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{k+l}{k+b}\phi^3 - \frac{s+q-c}{2(k+b)}\phi^2. \quad (3.6)$$

由 (3.6), 根据相平面分析方法, 可得如下定理.

定理 3.1 系统 (3.5) 在相平面 (ϕ, ψ) 上有两个平衡点 $E_1(0,0)$ 和 $E_2(\frac{s+q-c}{3(k+l)}, 0)$, 有如下结论成立:

(i) 若 $c > s+q, k+b > 0, k+l > 0$, 则 E_1 是鞍点, E_2 是中心, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_1 处有一个同宿轨道 (见图 1(a)).

(ii) 若 $c > s+q, k+b > 0, k+l < 0$, 则 E_1 是鞍点, E_2 是中心, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_1 处有一个同宿轨道 (见图 1(b)).

(iii) 若 $c > s+q, k+b < 0, k+l > 0$, 则 E_1 是中心, E_2 是鞍点, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_2 处有一个同宿轨道 (见图 1(c)).

(iv) 若 $c > s+q, k+b < 0, k+l < 0$, 则 E_1 是中心, E_2 是鞍点, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_2 处有一个同宿轨道 (见图 1(d)).

(v) 若 $c < s+q, k+l > 0, k+l > 0$, 则 E_1 是中心, E_2 是鞍点, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_2 处有一个同宿轨道 (见图 1(e)).

(vi) 若 $c < s+q, k+b > 0, k+l < 0$, 则 E_1 是中心, E_2 是鞍点, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_2 处有一个同宿轨道 (见图 1(f)).

(vii) 若 $c < s+q, k+b < 0, k+l > 0$, 则 E_1 是鞍点, E_2 是中心, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_1 处有一个同宿轨道 (见图 1(g)).

(viii) 若 $c < s+q, k+b < 0, k+l < 0$, 则 E_1 是鞍点, E_2 是中心, 且系统 (3.5) 在平衡点 E_1 处有一个同宿轨道 (见图 1(h)).

图 1 系统 (3.5) 平衡点的同宿轨道和周期轨道. (a) $c > s + q, k + b > 0, k + l > 0$; (b) $c > s + q, k + b > 0, k + l < 0$; (c) $c > s + q, k + b < 0, k + l > 0$; (d) $c > s + q, k + b < 0, k + l < 0$; (e) $c < s + q, k + b > 0, k + l > 0$; (f) $c < s + q, k + b > 0, k + l < 0$; (g) $c < s + q, k + b < 0, k + l > 0$; (h) $c < s + q, k + b < 0, k + l < 0$

证明 系统 (3.5) 的线性化矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6(k+l)}{k+b}\phi - \frac{s+q-c}{k+b} & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) 当 $c > s + q$, $k + l > 0$, $k + b > 0$ 时, 有

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6(k+l)}{k+b}\phi - \frac{s+q-c}{k+b} & 0 \end{vmatrix}_{E_1(0,0)} = \frac{s+q-c}{k+b} < 0, \quad \text{Tr}(A) = 0,$$

且

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6(k+l)}{k+b}\phi - \frac{s+q-c}{k+b} & 0 \end{vmatrix}_{E_2(\frac{s+q-c}{3(k+l)}, 0)} = -\frac{s+q-c}{k+b} > 0, \quad \text{Tr}(A) = 0,$$

由常微分方程定性理论可知平衡点 E_1 是鞍点, E_2 是中心.

下面考虑 $H(\phi, \psi) = h$ 为一个水平曲线的情形. 当 $h = 0$ 时, 点 E_1 处对应有一个同宿轨道, 即

$$\left(\phi, \pm \phi \sqrt{\frac{2(k+l)\phi - (s+q-c)}{k+b}} \right), \quad \frac{s+q-c}{2(k+l)} \leq \phi \leq 0.$$

当 $h \in (0, -\frac{m^3}{54a^2n})$ 时, 存在一组周期轨道, 即系统 (3.5) 存在一个同宿轨道.

类似地, 可以证明 (ii)–(viii) 的情形成立. □

4 广义的 NNV 方程孤波解和周期波解的存在性

本节讨论系统 (1.6) 在满足 $0 < \tau \ll 1$ 和 $c < s + q$, $k + b < 0$, $k + l < 0$ 条件下 (即定理 3.1(viii), 其他情形类似) 的孤波解和周期波解的存在性.

4.1 极限波速 c_0 的存在性

作行波变换

$$\phi(\xi) = u(x, y, t), \quad \phi_1(\xi) = v(x, y, t), \quad \phi_2(\xi) = w(x, y, t), \quad \xi = x + y - ct.$$

令

$$\eta(\xi) = \int_0^\infty \frac{1}{\tau} e^{-\frac{i}{\tau}} \phi(\xi + ci) di, \quad (4.1)$$

则可得

$$\begin{cases} (s+q-c)\phi' + (k+b)\phi''' + 2\tau\phi'' = 3k(\eta\phi_1)' + 3l(\eta\phi_2)', \\ \phi' = \phi_1', \\ \phi' = \phi_2', \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $' = \frac{d}{d\xi}$. 对于系统 (4.2) 中的方程进行积分并取积分常数为 0, 可得

$$\begin{cases} (s+q-c)\phi + (k+b)\phi'' + 2\tau\phi' = 3k(\eta\phi_1) + 3l(\eta\phi_2), \\ \phi = \phi_1, \\ \phi = \phi_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

根据系统 (4.2) 和 (4.1), 可得

$$\begin{cases} (s+q-c)\phi + (k+b)\phi'' + 2\tau\phi' - 3(k+l)\eta\phi = 0, \\ \eta' = \frac{1}{c\tau}(\eta - \phi). \end{cases} \quad (4.4)$$

定义 $\phi' = \psi$, 则系统 (4.4) 可以转换为如下的等价系统:

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = \frac{3(k+l)}{k+b}\eta\phi - \frac{s+q-c}{k+b}\phi - \frac{2\tau\psi}{k+b}, \\ c\tau\eta' = \eta - \phi. \end{cases} \quad (4.5)$$

注意到, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 有 $\eta \rightarrow \phi$ 并且可以得到不含时滞与扰动的系统. 由奇异摄动理论可知, 当 $\tau > 0$ 时, 通过时间尺度变换, 可以将系统 (4.5) 转化成等价的问题进行研究. 作变换 $\xi = \tau z$, 则慢系统 (4.5) 转换为如下的快系统:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \tau\psi, \\ \dot{\psi} = \tau\left(\frac{3(k+l)}{k+b}\eta\phi - \frac{s+q-c}{k+b}\phi - \frac{2\tau\psi}{k+b}\right), \\ c\dot{\eta} = \eta - \phi, \end{cases} \quad (4.6)$$

其中 $\dot{\cdot} = \frac{d}{dz}$. 当 $\tau \rightarrow 0$, 则慢系统 (4.5) 和快系统 (4.6) 就分别退化为

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = \frac{3(k+l)}{k+b}\eta\phi - \frac{s+q-c}{k+b}\phi, \\ 0 = \eta - \phi \end{cases} \quad (4.7)$$

和

$$\begin{cases} \dot{\phi} = 0, \\ \dot{\psi} = 0, \\ c\dot{\eta} = \eta - \phi. \end{cases} \quad (4.8)$$

显然, 退化系统 (4.7) 是一个微分代数系统, 描述被约束在如下集合上的慢变量的变化情况:

$$M_0 = \{(\phi, \psi, \eta) \in \mathbb{R}^3 : \eta = \phi\},$$

这是退化系统 (4.8) 上的一个 2 维平衡点集合 (不变流形) 和退化系统 (4.7) 上的一个 2 维不变流形. 当 $\tau = 0$ 时, 快系统 (4.6) 的线性化矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

有 3 个特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ 和 $\lambda_3 = \frac{1}{c}$, 实部为 0 的平衡点的个数等于 2, 与不变流形 M_0 的维数相等. 根据定义可知流形 M_0 是法向双曲的. 当 $\tau > 0$ 充分小时, 存在一个扰动不变流形 M_τ , 这个扰动流形在 $O(\tau)$ 邻域内于 M_0 微分同胚. 由引理 2.1 知, 这个不变流形 M_τ 可以表示为

$$M_\tau = \{(\phi, \psi, \eta) : \eta = \phi + g(\phi, \psi, \tau)\},$$

且当函数 g 是一个定义在紧集上的光滑函数时, 有 $g(\phi, \psi, 0) = 0$. 因此, 函数 g 关于小参数 τ 的 Taylor 展式为

$$g(\phi, \psi, \tau) = \tau g_1(\phi, \psi) + \tau^2 g_2(\phi, \psi) + \cdots.$$

将 $\eta = \phi + g(\phi, \psi, \tau)$ 代入慢系统 (4.5), 则有

$$c\tau \left\{ \phi' + \tau \left(\frac{\partial g_1}{\partial \phi} \phi' + \frac{\partial g_1}{\partial \psi} \psi' \right) + O(\tau^2) \right\} = \phi + \tau g_1 + O(\tau^2) - \phi.$$

通过简单计算可得如下的渐近展开式:

$$g = c\tau\psi + O(\tau^2).$$

因此有

$$M_\tau = \{(\phi, \psi, \eta) : \eta = \phi + c\tau\psi + O(\tau^2)\}.$$

下面研究慢系统 (4.5) 中包含在 M_τ 上的流, 这个流由下列系统给出:

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = \frac{3(k+l)}{k+b}\phi^2 - \frac{s+q-c}{k+b}\phi + \tau \left(\frac{3(k+l)c\phi\psi}{k+b} - \frac{2\psi}{k+b} \right) + O(\tau^2). \end{cases} \quad (4.9)$$

这是一个正则摄动系统.

如果在相平面 (ϕ, ψ) 上讨论形如系统 (4.9) 的正则摄动问题, 则容易验证系统周期轨道的存在性. 我们可以通过水平曲线 H 研究未扰系统 (3.5) 的动力学行为. 为了研究方便, 令 $m = s+q-c$, $n = k+b$, $a = k+l$ 且 $m > 0$, $n < 0$, $a < 0$, 则系统 (3.5) 等价于如下的系统:

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = \frac{3a}{n}\phi^2 - \frac{m}{n}\phi. \end{cases} \quad (4.10)$$

对于 $\frac{m}{3a} < \lambda < 0$, 固定一个初始值 $(\lambda, 0)$. 令 $(\phi(\xi), \psi(\xi))$ 为系统 (4.10) 的满足初始条件 $(\phi, \psi)(0) = (\lambda, 0)$ 的解, 则存在 $\xi_1 < 0$ 和 $\xi_2 > 0$, 使得 $\psi(\xi) > 0$, $\xi_1 < \xi < 0$, 且 $\psi(\xi_1) = 0$; 以及 $\psi(\xi) < 0$, $0 < \xi < \xi_2$, 且 $\psi(\xi_2) = 0$. 函数 $\psi(\xi)$ 的图像如图 2 所示. 类似于文献 [22], 定义函数 Φ 为

 图 2 (网络版彩图) 函数 $\psi(\xi)$ 的图像

$$\Phi(\lambda, c, \tau) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} H' d\xi,$$

其中

$$H' = -\psi\psi' + \frac{3a}{n}\phi^2\phi' - \frac{m}{n}\phi\phi' = -\tau\psi^2\left(\frac{3a}{n}c\phi - \frac{2}{n}\right) + O(\tau^2),$$

则 $\Phi(\lambda, c, \tau)$ 表示 ξ 轴上两个点的水平差:

$$\Phi(\lambda, c, \tau) = H(\phi(\xi_2), \psi(\xi_2)) - H(\phi(\xi_1), \psi(\xi_1)).$$

因此, $\Phi(\lambda, c, \tau) = 0$ 当且仅当它是系统 (4.9) 的一个周期解, 即 $\phi(\xi_1) = \phi(\xi_2)$. 下面求解 $\Phi = 0$. 令 $\tilde{\Phi}(\lambda, c, \tau) = \Phi(\lambda, c, \tau)/\tau$, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 有

$$\tilde{\Phi}_0(\lambda, c) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\Phi}(\lambda, c, \tau) = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\psi_0^2 \left(\frac{3a}{n} c \phi_0 - \frac{2}{n} \right) \right] d\xi.$$

故 (ϕ_0, ψ_0) 是系统 (4.10) 的一个解, 并且这个积分是在一个水平曲线 $H = H(\lambda, 0) = h$ 上进行的, 其中 $h \in (0, -\frac{m^3}{54a^2n})$. 所以有

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(\lambda, c) &= - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\psi_0^2 \left(\frac{3a}{n} c \phi_0 - \frac{2}{n} \right) \right] d\xi \\ &= - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\frac{3a}{n} c \phi_0 \psi_0^2 - \frac{2}{n} \psi_0^2 \right) d\xi \\ &= - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\frac{3a}{n} c \phi_0 (\phi_0')^2 - \frac{2}{n} (\phi_0')^2 \right) d\xi \\ &= - \left[-\frac{3ac}{2n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \phi_0^2 \phi_0'' d\xi - \frac{2}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[-\frac{3ac}{2n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{n}{3a} \left(\frac{3a}{n} \phi_0^2 - \frac{m}{n} \phi_0 + \frac{m}{n} \phi_0 \right) \phi_0'' d\xi - \frac{2}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi \right] \\
&= - \left[-\frac{c}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0'')^2 d\xi + \frac{mc}{2n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi - \frac{2}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi \right] \\
&= \frac{c}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0'')^2 d\xi - \left(\frac{mc}{2n} - \frac{2}{n} \right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi.
\end{aligned}$$

故极限波速 c_0 可由方程

$$-\left(\frac{mc_0}{2n} - \frac{2}{n}\right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi + \frac{c_0}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0'')^2 d\xi = 0 \quad (4.11)$$

给出. 类似地, 我们可以研究系统的同宿轨道. 定义函数

$$\Psi(c, \tau) = - \int_{-\infty}^0 H'(\phi, \psi) d\xi - \int_0^{\infty} H'(\phi, \psi) d\xi.$$

函数 $\Psi(c, \tau)$ 中的两个积分式分别表示在零点处的一维不稳定流形和稳定流形上的两个解.

类似于以上讨论, 定义 $\tilde{\Psi}(\lambda, c, \tau)$, 并可以计算出

$$\tilde{\Psi}_0(\lambda, c) = - \left(\frac{mc}{2n} - \frac{2}{n} \right) \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_0')^2 d\xi + \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_0'')^2 d\xi,$$

其中 ϕ_0 是系统 (4.10) 的一个解, 积分是在曲线 $H = 0$ 上进行的. 所以, 极限波速 c_0 的条件与方程 (4.11) 相同.

4.2 极限波速 c_0 的单调性

本节通过运用 Abel 积分理论, 讨论极限波速 c_0 的单调性. 同时给出极限波速 c_0 的上下界. 记 Q 和 R 分别为

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0'')^2 d\xi, \quad R = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi.$$

记

$$f(\phi) := \frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2,$$

则有

$$f(\phi) - k = \frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2 - k.$$

记 $\frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2 - k = 0$ 的两个非负根分别为 $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$, 其中

$$\frac{m}{2a} \leq \alpha(k) < \beta(k) \leq 0, \quad 0 < h < -\frac{m^3}{54a^2n} \quad \text{且} \quad 0 < k < -\frac{m^3}{27a^2n},$$

则函数 $f(\phi)$ 如图 3 所示. 所以, 轨道 $(\phi(\xi), \psi(\xi))$ 在水平曲线 $H = h = \frac{k}{2}$ 上, 其中 $\psi = \frac{d\phi}{d\xi}$. 根据系统 (4.10) 可以得到

$$Q = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left(\frac{3a}{n} \phi^2 - \frac{m}{n} \phi\right)^2}{E(\phi)} d\phi, \quad R = \int_{\alpha}^{\beta} E(\phi) d\phi.$$

因此,

$$E(\phi) = \sqrt{\frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2 - k},$$

 图 3 (网络版彩图) 函数 $f(\phi)$ 的图像

其中 Q 和 R 都是仅与 k 相关的函数. 函数 Q 和 R 可由下述积分表示出来:

$$J_n(k) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi^n E(\phi) d\phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

则有

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\phi^n}{E(\phi)} d\phi = -2J'_n(k).$$

因此, Q 和 R 可以分别表示为

$$Q = -\frac{18a^2}{n^2} J'_4(k) + \frac{12am}{n^2} J'_3(k) - \frac{2m^2}{n^2} J'_2(k), \quad R = J_0.$$

下面研究 J_0 和 J_1 的基本性质.

引理 4.1 根据 $J_0(k)$ 和 $J_1(k)$ 的积分表达式, 可得

$$\lim_{k \rightarrow 0} J_0(k) = \frac{n^2}{15a^2} \left(-\frac{m}{n} \right)^{\frac{5}{2}}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} J_1(k) = -\frac{2n^3}{105a^3} \left(-\frac{m}{n} \right)^{\frac{7}{2}}, \quad \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \frac{J_1(k)}{J_0(k)} = \frac{m}{3a}.$$

证明 根据 $J_0(k)$ 的定义, 可得

$$\lim_{k \rightarrow 0} J_0(k) = \int_{\frac{m}{2a}}^0 \sqrt{\frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2} d\phi = \int_{\frac{m}{2a}}^0 -\phi \sqrt{\frac{2a}{n} \phi - \frac{m}{n}} d\phi.$$

令

$$r = \frac{2a}{n} \phi - \frac{m}{n},$$

则有

$$\lim_{k \rightarrow 0} J_0(k) = \int_{\frac{m}{2a}}^0 -\phi \sqrt{\frac{2a}{n} \phi - \frac{m}{n}} d\phi$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{-\frac{m}{n}} \left(\frac{n}{2a}r + \frac{m}{2a} \right) \sqrt{r} d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n}{a}r + \frac{m}{a} \right) \right] \\
&= - \frac{n}{2a} \int_0^{-\frac{m}{n}} \left(\frac{n}{2a}r + \frac{m}{2a} \right) \sqrt{r} d(r) \\
&= \frac{n^2}{15a^2} \left(-\frac{m}{n} \right)^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

类似地, 可以证明

$$\lim_{k \rightarrow 0} J_1(k) = -\frac{2n^3}{105a^3} \left(-\frac{m}{n} \right)^{\frac{7}{2}}.$$

由 $\frac{m}{2a} \leq \alpha(k) \leq \phi \leq \beta(k) \leq 0$ 可得

$$\alpha(k) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \alpha(k) E(\phi) d\phi}{\int_{\alpha}^{\beta} E(\phi) d\phi} \leq \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \phi E(\phi) d\phi}{\int_{\alpha}^{\beta} E(\phi) d\phi} \leq \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \beta(k) E(\phi) d\phi}{\int_{\alpha}^{\beta} E(\phi) d\phi} = \beta(k).$$

因此有

$$\alpha(k) \leq \frac{J_1(k)}{J_2(k)} \leq \beta(k).$$

由 $\lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \alpha(k) = \frac{m}{3a}$ 和 $\lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \beta(k) = \frac{m}{3a}$, 可以得到

$$\lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \frac{J_1(k)}{J_0(k)} = \frac{m}{3a}.$$

证毕. □

引理 4.2 $J = \Lambda_1(k)J', J'' = \Lambda_2(k)J'$, 其中

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} J_0 \\ J_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1(k) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}k & \frac{2m^2}{15na} \\ \frac{2mk}{35a} & \frac{2}{7} \left(\frac{2m^3}{15na^2} + 3k \right) \end{pmatrix}, \\
\Lambda_2(k) &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\frac{9k}{2} & -\frac{m^2}{2na} \\ -\frac{3mk}{2a} & \frac{9k}{2} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \frac{m^3k}{na^2} + 27k^2.
\end{aligned}$$

证明 由

$$E^2 = \frac{2a}{n}\phi^3 - \frac{m}{n}\phi^2 - k,$$

可得

$$2E \frac{dE}{d\phi} = \frac{6a}{n}\phi^2 - \frac{2m}{n}\phi.$$

进一步可以计算出

$$\begin{aligned}
J_0 &= \int_{\alpha}^{\beta} E d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} E^2 \frac{d\phi}{E} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{2a}{n}\phi^3 - \frac{m}{n}\phi^2 - k \right) \frac{d\phi}{E} \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\frac{2a}{n}\phi - \frac{m}{n} \right) \phi^2 - k \right] \frac{d\phi}{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{n}{3a} \left(\frac{2a}{n} \phi - \frac{m}{n} \right) \left(E \frac{dE}{d\phi} + \frac{m}{n} \phi \right) - k \right] \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{2}{3} \phi E \frac{dE}{d\phi} + \frac{2m}{3n} \phi^2 - \frac{m}{3a} E \frac{dE}{d\phi} - \frac{m^2}{3na} \phi - k \right] \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{2}{3} \phi - \frac{m}{3a} \right) dE + \frac{2m}{3n} \int_{\alpha}^{\beta} \phi^2 \frac{d\phi}{E} - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{m^2}{3na} \phi + k \right) \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{2}{3} \phi - \frac{m}{3a} \right) dE + \frac{2m}{9a} \int_{\alpha}^{\beta} \left(E \frac{dE}{d\phi} + \frac{m}{n} \phi \right) \frac{d\phi}{E} - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{m^2}{3na} \phi + k \right) \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{2}{3} \phi - \frac{m}{9a} \right) dE + \frac{2m^2}{9na} J_1'(k) + 2kJ_0'(k) \\
 &= -\frac{2}{3} J_0(k) + \frac{2m^2}{9na} J_1'(k) + 2kJ_0'(k),
 \end{aligned}$$

故有

$$J_0 = \frac{6}{5} k J_0' + \frac{2m^2}{15na} J_1'.$$

类似于 J_0 的计算, 可得 J_1 为

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi E d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \phi E^2 \frac{d\phi}{E} = \int_{\alpha}^{\beta} \phi \left(\frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2 - k \right) \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\phi^2 \left(\frac{2a}{n} \phi^2 - \frac{m}{n} \phi \right) - k\phi \right] \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{n}{3a} \left(E \frac{dE}{d\phi} + \frac{m}{n} \phi \right) \left(\frac{2a}{n} \phi^2 - \frac{m}{n} \phi \right) - k\phi \right] \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{2}{3} \phi^2 E \frac{dE}{d\phi} - \frac{m}{3a} \phi E \frac{dE}{d\phi} + \frac{2m}{3n} \phi^3 - \frac{m^2}{3na} \phi^2 - k\phi \right] \frac{d\phi}{E} \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{2}{3} \phi^2 - \frac{m}{3a} \phi \right] dE + \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{m}{3a} \left(\frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2 - k + k \right) - k\phi \right] \frac{d\phi}{E} \\
 &= \frac{m}{3a} J_0 - \frac{4}{3} J_1 + \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{m}{3a} (E^2 + k) - k\phi \right] \frac{d\phi}{E} \\
 &= \frac{m}{3a} J_0 - \frac{4}{3} J_1 + \frac{m}{3a} J_0 - \frac{2mk}{3a} J_0' + 2kJ_1' \\
 &= \frac{2m}{3a} J_0 - \frac{4}{3} J_1 - \frac{2mk}{3a} J_0' + 2kJ_1',
 \end{aligned}$$

即

$$J_1 = \frac{2mk}{35a} J_0' + \frac{2}{7} \left(\frac{2m^3}{15na^2} + 3k \right) J_1'.$$

所以有

$$J = \Lambda_1(k) J'.$$

根据上述证明可知, $J'' = \Lambda^{-1}(I - \Lambda_1') J'$ 成立, 其中 I 为单位矩阵, 且有

$$\Lambda_1' = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ \frac{2m}{35a} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

因此可得

$$I - \Lambda'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2m}{35a} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

和

$$\Lambda_1^{-1}(k) = \frac{105}{4\Delta} \begin{pmatrix} \frac{2}{7}(\frac{2m^3}{15na^2} + 3k) - \frac{2m^2}{15na} \\ -\frac{2mk}{35a} & \frac{6k}{5} \end{pmatrix}.$$

所以,

$$J'' = \Lambda_1^{-1}(I - \Lambda'_1)J' = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\frac{9k}{2} & -\frac{m^2}{2na} \\ -\frac{3mk}{2a} & \frac{9k}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_0 \\ J'_1 \end{pmatrix} = \Lambda_2(k)J'.$$

证毕. □

引理 4.3 积分表达式 J_2 、 J_3 和 J_4 均由 J_0 和 J_1 线性表示, 即

$$J_2 = \frac{m}{3a}J_1, \quad J_3 = \frac{1}{11}\left(\frac{nk}{a}J_0 + \frac{4m^2}{3a^2}J_1\right), \quad 13J_4 = \frac{5mnk}{11a^2}J_0 + \left(\frac{20m^3}{33a^3} + \frac{2nk}{a}\right)J_1.$$

证明 根据 J_2 、 J_3 和 J_4 的表达式可得

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi^2 E d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{n}{3a} \left(E \frac{dE}{d\phi} + \frac{m}{n} \phi \right) E d\phi = \frac{m}{3a} J_1, \\ J_3 &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi^3 E d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{n}{3a} \left(E \frac{dE}{d\phi} + \frac{m}{n} \phi \right) \phi E d\phi \\ &= \frac{n}{3a} \int_{\alpha}^{\beta} \phi E^2 dE + \frac{m}{3a} \int_{\alpha}^{\beta} \phi^2 E d\phi \\ &= \frac{n}{3a} \int_{\alpha}^{\beta} \phi \left(\frac{2a}{n} \phi^3 - \frac{m}{n} \phi^2 - k \right) dE + \frac{m}{3a} J_2 \\ &= \frac{n}{3a} \left(-\frac{8a}{n} J_3 + \frac{3m}{n} J_2 + k J_0 \right) + \frac{m}{3a} J_2 \\ &= -\frac{8}{3} J_3 + \frac{4m}{3a} J_2 + \frac{nk}{3a} J_0, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{11} \left(\frac{nk}{a} J_0 + \frac{4m^2}{3a^2} J_1 \right), \\ J_4 &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi^4 E d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{n}{3a} \left(E \frac{dE}{d\phi} + \frac{m}{n} \phi \right) \phi^2 E d\phi \\ &= \frac{n}{3a} \int_{\alpha}^{\beta} \phi^2 E^2 dE + \frac{m}{3a} \int_{\alpha}^{\beta} \phi^3 E d\phi \\ &= \frac{n}{3a} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{2a}{n} \phi^5 - \frac{m}{n} \phi^4 - k \phi^2 \right) dE + \frac{m}{3a} J_3 \\ &= -\frac{n}{3a} \int_{\alpha}^{\beta} E \left(\frac{10a}{n} \phi^4 - \frac{4m}{n} \phi^3 - 2k \phi \right) d\phi + \frac{m}{3a} J_3 \\ &= -\frac{1}{3} \left(10J_4 - \frac{4m}{a} J_3 - \frac{2nk}{a} J_1 \right) + \frac{m}{3a} J_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{10}{3}J_4 + \frac{4m}{3a}J_3 + \frac{2nk}{3a}kJ_1 + \frac{m}{3a}J_3 \\
 &= -\frac{10}{3}J_4 + \frac{5m}{3a}J_3 + \frac{2nk}{3a}J_1,
 \end{aligned}$$

即有

$$13J_4 = \frac{5mnk}{11a^2}J_0 + \left(\frac{20m^3}{33a^3} + \frac{2nk}{a}\right)J_1.$$

证毕. □

由引理 4.2 和 4.3, 可以将 Q 和 R 由 J_0 和 J_1 表示出来, 即

$$\begin{aligned}
 Q &= -\frac{18a^2}{n^2}J_4' + \frac{12ma}{n^2}J_3' - \frac{2m^2}{n^2}J_2' \\
 &= -\frac{18a^2}{13n^2} \left[\frac{5mn}{11a^2}(J_0 + kJ_0') + \frac{20m^3}{33a^3}J_1' + \frac{2n}{a}J_1 + \frac{2nk}{a}J_1' \right] \\
 &\quad + \frac{12ma}{11n^2} \left[\frac{n}{a}J_0 + \frac{nk}{a}J_0' + \frac{4m^2}{3a^2}J_1' \right] - \frac{2m^3}{3n^2a}J_1' \\
 &= \frac{6mk}{7n}J_0' + \left(-\frac{2m^3}{21n^2a} - \frac{36ak}{7n} \right)J_1' \\
 &= \left(\frac{m^4k}{a^2n^2\Delta} + \frac{27mk^2}{n\Delta} \right)J_0 - \left(\frac{6m^3k}{an^2\Delta} + \frac{162ak^2}{n\Delta} \right)J_1 \\
 &= \frac{m}{n}J_0 - \frac{6a}{n}J_1
 \end{aligned}$$

和

$$R = J_0, \quad R' = J_0'.$$

定义 $X = \frac{Q}{R}$, 下面讨论 X 的单调性. 根据上面 Q 和 R 的表达式, 有

$$X = \frac{Q}{R} = \frac{m}{n} - \frac{6a}{n} \frac{J_1}{J_0}.$$

记 $\tilde{X} = \frac{J_1}{J_0}$ 和 $Z = \frac{J_1'}{J_0'}$. 下面给出关于 $\tilde{X}$ 和 Z 的性质.

引理 4.4 当 $k \in (0, -\frac{m^3}{27a^2n})$ 时, 有 $Z'(k) < 0$ 和 $\tilde{X}'(k) < 0$ 成立.

证明 根据 $Z(k)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}
 Z'(k) &= \frac{1}{(J_0')^2}(J_1''J_0' - J_1'J_0'') \\
 &= \frac{1}{2na\Delta}(m^2Z^2 + 18nakZ - 3mnk) \\
 &= \frac{1}{2na\Delta} \left(m^2 \left(Z + \frac{9nak}{m^2} \right)^2 - \frac{3n^2a^2\Delta}{m^2} \right).
 \end{aligned}$$

由引理 4.2 可知 $\Delta < 0$, 故由上式 $Z'(k)$ 的表达式可以得到 $Z'(k) < 0$.

下证 $\tilde{X}'(k) < 0$. 假设对于某个 $k_0 \in (0, -\frac{m^3}{27a^2n})$, 满足 $\tilde{X}'(k_0) = 0$. 由 $\tilde{X}$ 和 Z 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
 J_0'\tilde{X} + J_0\tilde{X}' &= J_1', \\
 J_0''\tilde{X} + 2J_0'\tilde{X}' + J_0\tilde{X}'' &= J_1'', \\
 J_0'Z &= J_1',
 \end{aligned}$$

$$J_0''Z + J_0'Z' = J_1''.$$

所以,

$$\begin{aligned}\tilde{X}''(k_0) &= \frac{J_1''(k_0) - J_0''(k_0)\tilde{X}(k_0) - 2J_0'(k_0)\tilde{X}'(k_0)}{J_0(k_0)} \\ &= \frac{J_1''(k_0) - J_0''(k_0)\tilde{X}(k_0)}{J_0(k_0)} \\ &= \frac{J_0'(k_0)J_1''(k_0) - J_0''(k_0)J_1'(k_0)}{J_0(k_0)J_0'(k_0)} \\ &= \frac{J_0'(k_0)(J_0'(k_0)J_1''(k_0) - J_0''(k_0)J_1'(k_0))}{J_0(k_0)(J_0'(k_0))^2} \\ &= \frac{J_0'(k_0)Z'(k_0)}{J_0(k_0)}.\end{aligned}$$

因为 $J_0(k_0) > 0$, $J_0'(k_0) < 0$ 和 $Z'(k_0) < 0$, 故有 $\tilde{X}''(k_0) > 0$. 所以关于 $\tilde{X}'(k)$, 下列两种情形至少有一种成立:

- (i) 当 $k \in (0, k_0)$ 时, $\tilde{X}'(k) < 0$; 当 $k \in (k_0, -\frac{m^3}{27a^2n})$ 时, $\tilde{X}'(k) > 0$;
- (ii) 当 $k \in (0, -\frac{m^3}{27a^2n})$ 时, $\tilde{X}'(k) < 0$.

其次根据 J_0 和 J_1 的关系式

$$J_0 = \frac{6}{5}kJ_0' + \frac{2m^2}{15na}J_1'$$

和

$$J_1 = \frac{2mk}{35a}J_0' + \frac{2}{7}\left(\frac{2m^3}{15na^2} + 3k\right)J_1',$$

可得

$$\frac{2m}{7a} - \frac{J_1}{J_0} = \frac{6k}{7J_0}J_0'\left(\frac{m}{3a} - \frac{J_1'}{J_0'}\right).$$

因为 $\tilde{X}'(k_0) = 0$, 故有

$$\frac{J_1'(k_0)J_0(k_0) - J_0'(k_0)J_1(k_0)}{J_0^2(k_0)} = 0,$$

即有

$$Z(k_0) = \tilde{X}(k_0).$$

所以,

$$\frac{2m}{7a} - \tilde{X}(k_0) = \frac{6k_0}{7} \frac{J_0'}{J_0} \left(\frac{m}{3a} - \tilde{X}(k_0) \right).$$

进一步有

$$\left(\frac{2m}{7a} - \tilde{X}(k_0) \right) \left(\frac{m}{3a} - \tilde{X}(k_0) \right) < 0.$$

所以有 $\tilde{X}(k_0) \in (\frac{m}{3a}, \frac{2m}{7a})$.

最后根据引理 4.1 可得情形 (ii) 成立, 即, 当 $k \in (0, -\frac{m^3}{27a^2n})$ 时, $\tilde{X}'(k) < 0$. □

经过计算可得

$$X = \frac{m}{n} - \frac{6a}{n}\tilde{X}.$$

因此有

$$X' = -\frac{6a}{n} \tilde{X}'.$$

由引理 4.4 易证 X 的单调性. 此外由引理 4.2, 可得

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{J_1(k)}{J_0(k)} = \frac{2m}{7a}, \quad \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \frac{J_1(k)}{J_0(k)} = \frac{m}{3a},$$

即

$$\lim_{k \rightarrow 0} \tilde{X}(k) = \frac{2m}{7a}, \quad \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \tilde{X}(k) = \frac{m}{3a}.$$

因此,

$$\lim_{k \rightarrow 0} X(k) = -\frac{5m}{7n}, \quad \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} X(k) = -\frac{m}{n}.$$

根据上述引理, 可得如下结果:

定理 4.1 令 $X(k) = \frac{Q}{R}$, 对于 $0 < k < -\frac{m^3}{27a^2n}$, 则有 $X'(k) > 0$. 进一步有

$$\lim_{k \rightarrow 0} X(k) = -\frac{5m}{7n} \quad \text{和} \quad \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} X(k) = -\frac{m}{n}.$$

根据方程 (4.11), 可得极限波速 c_0 满足

$$c_0 = \frac{4}{m - nX(k)}.$$

对于 $k \in (0, -\frac{m^3}{27a^2n})$ 时, 可以解出极限波速

$$c_0 = \frac{4}{m - nX(k)} \in \left(\frac{2}{m}, \frac{7}{3m} \right).$$

进一步由 $k = 2h$ 可得

$$c_0(h) = \frac{4}{m - nX(h)} \in \left(\frac{2}{m}, \frac{7}{3m} \right),$$

其中 $h \in (0, -\frac{m^3}{54a^2n})$. 因为

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial c}(\lambda(k), c_0, 0) = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0'')^2 d\xi + \left(-\frac{m}{2n} \right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\phi_0')^2 d\xi \neq 0,$$

类似地可得 $\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial c} \neq 0$. 由引理 2.2 可以求出方程 $\tilde{\Phi} = 0$ 和 $\tilde{\Psi} = 0$ 的解, 即当 $k \in [0, -\frac{m^3}{27a^2n})$, 且 $\tau \in (0, \tau^*)$ 足够小时, 存在一个光滑函数 $c_k(\tau) = c(\tau, k)$, 使得对于 $0 < k < -\frac{m^3}{27a^2n}$, $0 < \tau < \tau^*$, 有 $\tilde{\Phi}(\alpha(k), c(\tau, k), \tau) = 0$; 对于 $k = 0$, $0 < \tau < \tau^*$, 有 $\tilde{\Psi} = (c(\tau, k), \tau) = 0$.

下面的定理描述系统 (1.6) 的孤波解和周期波解的存在性.

定理 4.2 假设 $m > 0$, $n < 0$, $a < 0$, 则有以下结论成立:

(i) 存在 $\tau^* > 0$, $\tau \in [0, \tau^*)$ 足够小, $h \in [0, -\frac{m^3}{54a^2n})$, 使得系统 (1.6) 有行波解 $u = \phi(\tau, h, c, \xi)$, 其中 $c = c(\tau, h)$, $\phi(\tau, h, c, \xi)$ 是系统 (4.4) 的一个解且满足

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\tau, h, c, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \phi(\tau, h, c, 0) < 0.$$

进一步当 $h = 0$ 或 $h \in (0, -\frac{m^3}{54a^2n})$ 时, $\phi(\tau, h, c, 0)$ 分别是系统 (4.4) 的孤波解和周期波解.

(ii) 由 (i) 给出的 $c = c(\tau, h)$ 是一个关于 τ 和 h 的光滑函数, 且当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $c = c(\tau, h)$ 收敛于 $c_0(h)$. 进一步可知当 $h \in (0, -\frac{m^3}{54a^2n})$ 时, $c_0(h)$ 是光滑单调递减的, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} c_0(h) = \frac{7}{3m}, \quad \lim_{h \rightarrow -\frac{m^3}{54a^2n}} c_0(h) = \frac{2}{m}.$$

证明 根据前面的讨论可知系统 (1.6) 存在孤波解和周期波解. 当 $\frac{m}{3a} < \lambda < 0$ 时, 固定初始值 $(\lambda, 0)$. 因此有

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\tau, h, c, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \phi(\tau, h, c, 0) < 0.$$

下证 $c_0(h)$ 的单调性和它的极限. 因为

$$c_0 = \frac{4}{m - nX(h)},$$

所以有

$$c'_0(h) = \frac{4nX'(h)}{(m - nX(h))^2}.$$

根据定理 4.1, 可得当 $h \in (0, -\frac{m^3}{54a^2n})$ 时, 有 $c'_0(h) < 0$. 再结合 $X(k)$ 的极限可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} X(h) = -\frac{5m}{7n}, \quad \lim_{h \rightarrow -\frac{m^3}{54a^2n}} X(h) = -\frac{m}{n}.$$

因此,

$$\lim_{h \rightarrow 0} c_0(h) = \frac{7}{3m}, \quad \lim_{h \rightarrow -\frac{m^3}{54a^2n}} c_0(h) = \frac{2}{m}.$$

证毕. □

5 周期 T 的极限和单调性

本节讨论当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 定理 4.2 中行波解的周期的单调性和极限. 定义 T 为 $\phi_h(\xi)$ 的一个周期, 则有

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\phi}{\psi} = \int_0^{\frac{T}{2}} d\xi = \frac{T}{2}.$$

因此有

$$T = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\phi}{\psi} = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\phi}{E(\phi)} = -4J'_0(k).$$

下面通过两个定理描述周期 T 的单调性和极限.

定理 5.1 根据周期 T 的表达式, 有

$$\lim_{k \rightarrow 0} T = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} T = 2\pi \sqrt{-\frac{n}{m}}.$$

证明 先证极限 $\lim_{k \rightarrow 0} T = +\infty$ 成立. 由 T 的定义有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} T &= \lim_{k \rightarrow 0} 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{E(\phi)} d\phi \\ &= 2 \lim_{k \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{\frac{2a}{n}\phi^3 - \frac{m}{n}\phi^2 - k}} d\phi \\ &= 2 \int_{\frac{m}{2a}}^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{2a}{n}\phi^3 - \frac{m}{n}\phi^2}} d\phi \\ &= -2 \int_{\frac{m}{2a}}^0 \frac{1}{\phi \sqrt{\frac{2a}{n}\phi - \frac{m}{n}}} d\phi. \end{aligned}$$

为了便于叙述, 记 $r = \sqrt{\frac{2a}{n}\phi - \frac{m}{n}}$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} T &= -4 \int_0^{\sqrt{-\frac{m}{n}}} \frac{1}{r^2 + \frac{m}{n}} dr \\ &= -4 \int_0^{\sqrt{-\frac{m}{n}}} \frac{1}{(r - \sqrt{-\frac{m}{n}})(r + \sqrt{-\frac{m}{n}})} dr \\ &= -2\sqrt{-\frac{n}{m}} \int_0^{\sqrt{-\frac{m}{n}}} \left(\frac{1}{r - \sqrt{-\frac{m}{n}}} - \frac{1}{r + \sqrt{-\frac{m}{n}}} \right) dr \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

下证

$$\lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} T = 2\pi\sqrt{-\frac{n}{m}}$$

成立. 根据引理 4.1 和 4.2, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} T &= -4 \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} J'_0(k) \\ &= -2 \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{2m^3}{a^2n} + 45k \right) J_0 - \frac{7m^2}{na} J_1 \right] \\ &= -2 \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \frac{J_0}{\Delta} \left[\left(\frac{2m^3}{na^2} + 45k \right) - \frac{7m^2}{na} \frac{J_1}{J_0} \right] \\ &= -12 \lim_{k \rightarrow -\frac{m^3}{27a^2n}} \frac{J_0}{\frac{m^3}{9na^2} + 3k} \\ &= -\frac{2n}{m} \sqrt{-\frac{m}{n}} \pi \\ &= 2\pi\sqrt{-\frac{n}{m}}. \end{aligned}$$

证毕. □

定理 5.2 当 $0 < k < -\frac{m^3}{27a^2n}$ 时, $T'(k) < 0$.

证明 由引理 4.2, 可得

$$T'(k) = -4J_0''(k) = -\frac{4}{\Delta} \left(-\frac{9k}{2} J_0' - \frac{m^2}{2na} J_1' \right) = \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{15m^3k}{na^2} + 405k^2 \right) J_0 = \frac{15}{\Delta} J_0.$$

因为 $J_0 > 0$ 和 $\Delta < 0$, 故有 $T'(k) < 0$ 成立. $\square$

参考文献

- 1 Benney D J. Long waves on liquid films. *J Math Phys*, 1966, 45: 150–155
- 2 Lin S P. Finite amplitude side-band stability of a viscous film. *J Fluid Mech*, 1974, 63: 417–429
- 3 Camassa R, Holm D D. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 1661–1664
- 4 Desgasperis A, Procesi M. Asymptotic Integrability. In: *Symmetry and Perturbation Theory*. River Edge: World Scientific, 1999, 23–37
- 5 Benjamim T B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos Trans Roy Soc A*, 1972, 272: 47–78
- 6 Korteweg D J, de Vries G. On the change of form of the long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of stationary waves. *London Edinburgh Dublin Philos Mag J Sci*, 1895, 39: 422–443
- 7 Novikov V. Generalizations of the Camassa-Holm equation. *J Phys A*, 2009, 42: 342002
- 8 Ni L, Zhou Y. Well-posedness and persistence properties for the Novikov equation. *J Differential Equations*, 2011, 250: 3002–3021
- 9 Zhao L, Zhou S. Symbolic analysis and exact travelling wave solutions to a new modified Novikov equation. *Appl Math Comput*, 2010, 217: 590–598
- 10 Nizhnik L P. Integration of multidimensional nonlinear equations by the method of the inverse problem. *Sov Phys Dokl*, 1980, 25: 706–708
- 11 Peng Y Z. A class of doubly periodic wave solutions for the generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation. *Phys Lett A*, 2005, 337: 55–60
- 12 Chen Y, Dong Z Z. Symmetry reduction and exact solutions of the generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation. *Nonlinear Anal*, 2009, 71: e810–e817
- 13 Chen A, Guo L, Deng X. Existence of solitary waves and periodic waves for a perturbed generalized BBM equation. *J Differential Equations*, 2016, 261: 5324–5349
- 14 Du Z, Li J, Li X. The existence of solitary wave solutions of delayed Camassa-Holm equation via a geometric approach. *J Funct Anal*, 2018, 275: 988–1007
- 15 Faye G, Scheel A. Existence of pulses in excitable media with nonlocal coupling. *Adv Math*, 2015, 270: 400–456
- 16 Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J Differential Equations*, 1979, 31: 53–98
- 17 Jones C K R T. Geometric singular perturbation theory. In: *Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1609. Berlin-Heidelberg: Springer, 1995, 44–118
- 18 Li J, Lu K, Bates P. Normally hyperbolic invariant manifolds for random dynamical systems: Part I-persistence. *Trans Amer Math Soc*, 2013, 365: 5933–5966
- 19 Wang C, Zhang X. Stability loss delay and smoothness of the return map in slow-fast systems. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2018, 17: 788–822
- 20 Rinaldi S, Muratori S. Slow-fast limit cycles in predator-prey models. *Ecol Model*, 1992, 61: 287–308
- 21 Hek G. Geometric singular perturbation theory in biological practice. *J Math Biol*, 2010, 60: 347–386
- 22 Carr J, Chow S N, Hale J K. Abelian integrals and bifurcation theory. *J Differential Equations*, 1985, 59: 413–436
- 23 Chow S N, Sanders J A. On the number of critical points of the period. *J Differential Equations*, 1986, 64: 51–66
- 24 Cushman R, Sanders J A. A codimension two bifurcation with a third order Picard-Fuchs equation. *J Differential Equations*, 1985, 59: 243–256
- 25 Ogawa T. Travelling wave solutions to a perturbed Korteweg-de Vries equation. *Hiroshima Math J*, 1994, 24: 401–422
- 26 Sun X, Yu P. Periodic traveling waves in a generalized BBM equation with backward diffusion and dissipation terms. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2019, 24: 965–987
- 27 Li X, Du Z, Ji S. Existence results of solitary wave solutions for a delayed Camassa-Holm-KP equation. *Commun Pure Appl Anal*, 2019, 18: 3367–3387
- 28 Bose A. A geometric approach to singularly perturbed nonlocal reaction-diffusion equations. *SIAM J Math Anal*, 2000, 31: 431–454

29 Krantz S G, Parks H R. The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications. Boston: Birkhäuser, 2003

Solitary wave and periodic wave for a generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation with diffusion term

Zengji Du, Xiaojie Lin & Shanshan Yu

Abstract This paper is concerned with a generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation with weak backward diffusion term. The existence of solitary wave and periodic wave solutions are obtained by using the method of the dynamical system, especially the geometric singular perturbation theory and invariant manifold theory. Furthermore, based on the ratio of the Abelian integral, the monotonicity of the wave speed is established. At the same time, the bounds of the limit wave speed and the properties of the periodic wave solutions to this equation are also given.

Keywords generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation, solitary wave, periodic wave, geometric singular perturbation, Abelian integral

MSC(2020) 34C25, 34D15, 35C07

doi: 10.1360/SCM-2020-0413