紧致闭 Riemann 流形上带梯度项的完全非线性椭圆方程的二阶导数估计

献给吴从炘教授 85 华诞

关波¹, 侍述军^{2*}, 隋哲楠³

1. Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH 43220, USA;

2. 哈尔滨师范大学数学科学学院, 哈尔滨 150025;

3. 哈尔滨工业大学数学研究院, 哈尔滨 150001

E-mail: guan@math.osu.edu, shjshi@hrbnu.edu.cn, sui.4@osu.edu

收稿日期: 2020-06-30; 接受日期: 2020-08-26; 网络出版日期: 2020-11-23; * 通信作者

美国国家科学基金 (批准号: DMS-1620086) 和国家自然科学基金 (批准号: 11971137) 资助项目

摘要 二阶导数先验估计是研究完全非线性椭圆方程的一个关键步骤, 这是本文所关注的重点. 本文考虑闭 Riemann 流形上一类完全非线性二阶椭圆方程, 通过引入依赖解本身及其梯度的等位面的无穷远切锥, 给出解的二阶导数先验估计.

关键词 完全非线性椭圆方程 闭 Riemann 流形 先验估计

MSC (2010) 主题分类 35J15, 58J05, 35B45

1 引言

本文研究 Riemann 流形上的一类完全非线性椭圆偏微分方程的二阶导数估计. 假设 (M^n, g) 是一个 n 维闭 (紧致无边) Riemann 流形 ($n \geq 2$), f 是一个 n 变量对称光滑函数, 考虑 $(M^n; g)$ 上的如下二阶完全非线性方程:

$$f(\lambda(\nabla^2 u + A(x, u, \nabla u))) = \psi(x, u, \nabla u), \quad (1.1)$$

其中 ∇u 和 $\nabla^2 u$ 分别表示函数 u 的梯度和 Hesse 矩阵, $A[u] = A(x, u, \nabla u)$ 是一个可能依赖 u 和 ∇u 的 $(0, 2)$ 型张量,

$$\lambda(\nabla^2 u + A[u]) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

表示 $\nabla^2 u + A[u]$ 对应于度量 g 的特征值.

英文引用格式: Guan B, Shi S S, Sui Z N. Second order estimates for fully nonlinear elliptic equations with gradient terms on closed Riemannian manifolds (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1721–1732, doi: 10.1360/SSM-2020-0213

我们采用在完全非线性偏微分方程理论中标准的基本条件, 即假设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中一个以原点为顶点的凸锥 Γ 上的函数,

$$\Gamma_n \equiv \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \text{每个 } \lambda_i > 0\} \subseteq \Gamma, \quad (1.2)$$

并且满足以下的椭圆性条件:

$$f_i = f_{\lambda_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} > 0, \quad \lambda \in \Gamma, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad (1.3)$$

凹性条件:

$$f \text{ 是 } \Gamma \text{ 中的凹函数}, \quad (1.4)$$

以及非退化性条件:

$$\delta_{\psi, f} \equiv \inf \psi - \sup_{\partial \Gamma} f > 0, \quad (1.5)$$

其中

$$\sup_{\partial \Gamma} f \equiv \sup_{\lambda_0 \in \partial \Gamma} \limsup_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda),$$

同时假设 Γ 是一个开集并且是对称的.

以上三个基本条件是 1985 年 Caffarelli 等在他们的开创性工作 [1] 中引入的, 也是保证相应的完全非线性偏微分方程具有经典意义下的解或光滑解的必要条件. 在本文中, 当我们讨论方程 (1.1) 的解 $u \in C^2(M)$ 时总假设其在 M 的每一点上满足 $\lambda(\nabla^2 u + A[u]) \in \Gamma$, 也称为容许解. 根据文献 [1], 方程 (1.1) 关于容许解是椭圆的.

满足条件 (1.3) 和 (1.4) 的最典型的例子是 $f = \sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 或 $(\sigma_k/\sigma_l)^{\frac{1}{k-l}}$, 其定义域为 Garding 锥

$$\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sigma_j(\lambda) > 0, 1 \leq j \leq k\},$$

其中 $\sigma_k(\lambda)$ 是初等对称函数,

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

当 $f = \sigma_n^{\frac{1}{n}}$ 时, 方程 (1.1) 包含著名的最优运输问题中的 Monge-Ampère 方程. 其他的一些重要例子包括 $f = \log P_k$, 其中

$$P_k(\lambda) := \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}), \quad 1 \leq k \leq n$$

定义在

$$\mathcal{P}_k := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} > 0\}$$

上, 以及

$$f(\lambda) = -\sum \frac{1}{\lambda_i^\alpha}, \quad \lambda \in \Gamma_n, \quad \alpha > 0.$$

Caffarelli 等 [1] 首先对 $A = 0$ 的情形研究了 $\mathbb{R}^n$ 中方程 (1.1) 的 Dirichlet 问题, 随后的工作有文献 [2–4] 等, 另外有很多关于 $f = \sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 的工作和结果, 包括文献 [5–8] 等, 以及大量 Monge-Ampère 方程和最优运输问题的文献, 在此不再一一列举.

关于 Riemann 流形上的方程 (1.1) 的研究是由 Li^[2] 开始的, 后来又有 Urbas^[9] 的工作, 以及文献 [10–15] 等. 文献 [16] 考虑了 Riemann 流形上相应的完全非线性抛物方程.

本文的关注重点是在闭流形上方程 (1.1) 的解的二阶导数先验估计, 建立 C^2 估计是研究完全非线性方程的解的存在性和正则性的关键之一. 由条件 (1.3) 和 (1.5) 可知, 当 C^2 估计建立之后, 方程 (1.1) 自动成为一致椭圆的, 从而可以应用 Evans-Krylov 定理得到 $C^{2,\alpha}$ 估计. 众所周知, 著名的 Evans-Krylov 定理依赖于方程的凹性, 从这个角度讲, 条件 (1.4) 对方程 (1.1) 解的正则性是至关重要的, 这个条件也是本文中的方法和结果的关键.

引入一个新的函数 $\tilde{f}(x, \lambda, z, p) = f(\lambda) - \psi(x, z, p)$. 设 $x \in M$, 定义

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(x) &= \Gamma \times \mathbb{R} \times T_x M, \\ \Gamma^0(x) &= \{\hat{\lambda} \in \hat{\Gamma}(x) : \tilde{f}(x, \hat{\lambda}) > 0\}, \\ \partial\Gamma^0(x) &= \{\hat{\lambda} \in \hat{\Gamma}(x) : \tilde{f}(x, \hat{\lambda}) = 0\}.\end{aligned}$$

假设 $\Gamma^0(x)$ 非空并且

$$\psi(x, z, p) \text{ 是关于 } (z, p) \text{ 的凸函数.} \quad (1.6)$$

由 (1.3)、(1.4) 和 (1.6) 可知 $\partial\Gamma^0(x)$ 是 $\hat{\Gamma}(x)$ 中的一个凸的光滑超曲面.

设 $\hat{\lambda} = (\lambda, z, p) \in \partial\Gamma^0(x)$, 用 $T_{\hat{\lambda}} = T_{\hat{\lambda}}\partial\Gamma^0(x)$ 和

$$\nu_{\hat{\lambda}} = \frac{(Df(\lambda), -\psi_z, -D_p\psi)}{\sqrt{|Df(\lambda)|^2 + \psi_z^2 + |D_p\psi|^2}}$$

分别表示 $\partial\Gamma^0(x)$ 在 $\hat{\lambda}$ 点的切平面和单位法向量.

对于 $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times T_x M$, 令

$$\hat{S}_{\hat{\mu}}^x = \{\hat{\lambda} \in \partial\Gamma^0(x) : (\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \leq 0\}.$$

显然, $\hat{S}_{\hat{\mu}}^x = \emptyset$ 当且仅当 $\hat{\mu} \in \Gamma^0(x)$. 定义

$$\mathcal{C}_x^+ := \{\hat{\mu} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times T_x M : \text{对任意的 } (z, p) \in \mathbb{R} \times T_x M, \hat{S}_{\hat{\mu}}^x \cap \Gamma \times \{(z, p)\} \text{ 是紧集}\}.$$

可以证明 $\mathcal{C}_x^+$ 是一个开集, 见下节定理 2.1. 为方便起见, 称 $\partial\mathcal{C}_x^+$ 为 $\Gamma^0(x)$ 在无穷远的渐近切锥.

现在叙述本文的主要结果. 我们只考虑 $A = A(x, p)$ 和 $\psi(x, p)$ 的情形, 并假设它们关于其自变量具有二阶连续导数.

定理 1.1 假设条件 (1.3)–(1.6) 成立, 并且

$$A^{\xi\xi}(x, p) \text{ 是 } p \text{ 的凹函数,} \quad (1.7)$$

其中

$$A^{\xi\eta}(x, \cdot) = \langle A(x, \cdot), \xi \otimes \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in T_x M,$$

同时假设存在一个函数 $\underline{u} \in C^2(M)$ 在每一点 $x \in M$ 满足

$$\hat{\lambda}[\underline{u}] \equiv (\lambda(\nabla^2 \underline{u} + A[\underline{u}]), \underline{u}, \nabla \underline{u}) \in \mathcal{C}_x^+. \quad (1.8)$$

设 $u \in C^4(M)$ 是方程 (1.1) 的容许解, 则

$$\max_M |\nabla^2 u| \leq C, \quad (1.9)$$

其中常数 $C > 0$ 依赖于 $|u|_{C^1(M)}$ 、 $|u|_{C^2(M)}$ 和

$$\min_{x \in M} \text{dist}(\hat{\lambda}[u](x), \partial \mathcal{C}_x^+) > 0.$$

如果 (M^n, g) 是具有光滑边界的流形, 在定理 1.1 的条件下, 对应于 (1.9) 的如下估计成立:

$$\max_{\overline{M}} |\nabla^2 u| \leq C + C \max_{\partial M} |\nabla^2 u|. \quad (1.10)$$

第 2 节讨论无穷远的渐近切锥的性质, 定理 1.1 的证明在第 3 节给出.

2 渐近切锥

沿用上节的定义和记号, 本节讨论 $\Gamma^0(x)$ 和 $\mathcal{C}_x^+$ 的一些性质. 在以下的讨论中, 当涉及诸如 $\hat{S}_\mu^x$ 等我们自然假设其非空, 否则结论自动成立. 设 $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_x^+$, $\delta > 0$. 为方便起见, 我们引入以下记号:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x^+(\hat{\mu}) &= \{t\hat{\lambda} + (1-t)\hat{\mu} : \hat{\lambda} \in \hat{S}_\mu^x, 0 \leq t \leq 1\}, \\ R_{\hat{\mu}}(x) &= \sup_{(\lambda, p) \in \hat{S}_\mu^x, |\lambda| \leq \delta} |\lambda|, \\ N_R(x) &= \{\hat{\lambda} = (\lambda, p) \in \partial \Gamma^0(x) : |\lambda| = R, |p| \leq \delta\}, \\ H_{\hat{\mu}}(R) &:= \inf_{\hat{\lambda} \in N_R} (\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}}. \end{aligned}$$

在没有出现混淆的可能时, 记 $N_R = N_R(x)$ 和 $R_{\hat{\mu}} = R_{\hat{\mu}}(x)$ 等.

引理 2.1 设 $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_x^+$, $\delta > 0$. 若 $R > R_{\hat{\mu}}$, 则 $H_{\hat{\mu}}(R) > 0$, 并且当 $R > R_{\hat{\mu}}$ 充分大时, $H_{\hat{\mu}}(R)$ 关于 R 是单增的.

证明 对于任意的 $\hat{\lambda} \in N_R$, 有 $(\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} > 0$. 另一方面, $(\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}}$ 是 $\hat{\lambda}$ 的连续函数而且 N_R 是紧集, 所以 $H_{\hat{\mu}}(R) > 0$.

设 $R' > R > \max\{R_{\hat{\mu}}, |\mu|\}$. 对任意的 $\hat{\lambda}' \in N_{R'}$, 取 $\hat{\lambda} \in N_R$ 满足

$$\text{dist}(\hat{\lambda}, T_{\hat{\lambda}} \partial \Gamma^0(x)) = \text{dist}(N_R, T_{\hat{\lambda}'} \partial \Gamma^0(x)).$$

由 $\partial \Gamma^0(x)$ 的凸性显然有

$$(\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \leq (\hat{\mu} - \hat{\lambda}') \cdot \nu_{\hat{\lambda}'}.$$

由此可知 $H_{\hat{\mu}}(R) \leq H_{\hat{\mu}}(R')$. □

引理 2.2 (i) 设 $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_x^+$. 若 $\hat{\eta} \in \mathcal{C}_x^+(\hat{\mu})$, 则 $\hat{S}_{\hat{\eta}}^x \subset \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$.

(ii) 若 $\hat{\mu}, \hat{\eta} \in \mathcal{C}_x^+$ 并且 $\hat{S}_{\hat{\eta}}^x \subset \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$, 则 $\mathcal{C}_x^+(\hat{\eta}) \subset \mathcal{C}_x^+(\hat{\mu}) \subset \mathcal{C}_x^+$.

证明 (i) 对 $t \in [0, 1]$, $\hat{\lambda} \in \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$, 令 $\hat{\mu}_t = t\hat{\lambda} + (1-t)\hat{\mu}$. 因为 $\partial \Gamma^0(x)$ 是凸的, 所以,

$$\begin{aligned} (\hat{\mu}_t - \hat{\zeta}) \cdot \nu_{\hat{\zeta}} &= (1-t)(\hat{\mu} - \hat{\zeta}) \cdot \nu_{\hat{\zeta}} + t(\hat{\lambda} - \hat{\zeta}) \cdot \nu_{\hat{\zeta}} \\ &> t(\hat{\lambda} - \hat{\zeta}) \cdot \nu_{\hat{\zeta}} \geq 0, \quad \forall \hat{\zeta} \in \partial \Gamma^0(x) \setminus \hat{S}_{\hat{\mu}}^x. \end{aligned}$$

由此证明 $\hat{S}_{\hat{\mu}_t}^x \subset \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$, 从而 $\hat{\mu}_t \in C_x^+$.

(ii) 设 $\partial \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$ 表示 $\hat{S}_{\hat{\mu}}^x$ 在 $\partial \Gamma^0(x)$ 中的边界. 显然对任意的 $\hat{\lambda} \in \partial \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$ 有 $\hat{\mu} \in T_{\hat{\lambda}} \partial \Gamma^0(x)$. 因为 $\Gamma^0(x)$ 是凸的, $C_x^+(\hat{\mu})$ 是由 $\hat{S}_{\hat{\mu}}^x$ 和所有从 $\hat{\mu}$ 到 $\partial \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$ 上点之间的线段所包含的区域, 由此可知 (ii) 的结论是显然的. $\square$

定理 2.1 C_x^+ 是开集.

证明 设 $\hat{\mu} \in C_x^+$. 对任意的 $\hat{\lambda} = (\lambda, p) \in \partial \Gamma^0(x)$, 如果在引理 2.1 中取 $\delta = |p|$, 对 $R > R_{\hat{\mu}}$, 当 $|\lambda| > R$ 时, 有

$$(\hat{\mu} - \alpha \hat{\mathbf{1}} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \geq -\sqrt{n}\alpha + (\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \geq \frac{H_{\hat{\mu}}(R)}{2} > 0,$$

其中 $\hat{\mathbf{1}} = ((1, \dots, 1), \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times T_x M$, $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{n}} H_{\hat{\mu}}(R)$. 这说明 $\hat{\lambda} \notin \hat{S}_{\hat{\mu}-\alpha \hat{\mathbf{1}}}^x$, 所以, $\hat{\mu} - \alpha \hat{\mathbf{1}} \in C_x^+$. 另一方面, 如果 $\hat{\lambda} \in \hat{S}_{\hat{\mu}}^x$, 那么

$$(\hat{\mu} - \alpha \hat{\mathbf{1}} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \leq -\alpha \hat{\mathbf{1}} \cdot \nu_{\hat{\lambda}} = -\frac{\alpha \sum f_i(\lambda)}{\sqrt{|Df|^2 + |D_p \psi|^2}} < 0,$$

从而 $\hat{\lambda} \in \hat{S}_{\hat{\mu}-\alpha \hat{\mathbf{1}}}^x$. 由引理 2.2 可知 $C_x^+(\hat{\mu}) \subset C_x^+(\hat{\mu} - \alpha \hat{\mathbf{1}}) \subset C_x^+$. 显然, $C_x^+(\hat{\mu} - \alpha \hat{\mathbf{1}})$ 包含以 $\hat{\mu}$ 为球心的球. $\square$

引理 2.3 设 K 是 C_x^+ 的紧子集. 对任意的 $\delta > 0$, 有

$$\sup_{\hat{\mu} \in K} \sup_{(\lambda, p) \in \hat{S}_{\hat{\mu}}^x, |p| \leq \delta} |\lambda| < \infty.$$

证明 假设结论不成立, 则对任意正整数 k , 存在 $\hat{\mu}_k \in K$ 和 $\hat{\lambda}_k = (\lambda_k, p_k) \in \hat{S}_{\hat{\mu}_k}^x$, 使得 $|\lambda_k| \geq k$, $|p_k| \leq \delta$. 由于 K 是紧的, 我们可以假设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mu}_k = \hat{\mu} \in K.$$

因为 $(\hat{\mu}_k - \hat{\lambda}_k) \cdot \nu_{\hat{\lambda}_k} \leq 0$, 所以有

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} (\hat{\mu} - \hat{\lambda}_k) \cdot \nu_{\hat{\lambda}_k} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} [(\hat{\mu} - \hat{\mu}_k) \cdot \nu_{\hat{\lambda}_k} + (\hat{\mu}_k - \hat{\lambda}_k) \cdot \nu_{\hat{\lambda}_k}] \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\hat{\mu} - \hat{\mu}_k) \cdot \nu_{\hat{\lambda}_k} = 0. \end{aligned}$$

这显然与引理 2.1 矛盾. $\square$

假设 $\hat{\mu}, \hat{\lambda} \in \partial \Gamma^0(x)$. 考虑连接 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\lambda}$ 的开线段

$$(\hat{\mu}, \hat{\lambda}) = \{t\hat{\mu} + (1-t)\hat{\lambda} : 0 < t < 1\}.$$

由条件 (1.3) 可知 $\partial \Gamma^0(x)$ 是凸集, 所以, $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ 或者完全包含在 $\partial \Gamma^0(x)$ 中, 或者完全在 $\Gamma^0(x)$ 中. 在前一种情形下,

$$\omega_{\tilde{f}}[\hat{\mu}, \hat{\lambda}] = \sup_{0 \leq t \leq 1} \tilde{f}(x, t\hat{\mu} + (1-t)\hat{\lambda}) = 0;$$

而在后一种情形下, $\omega_{\tilde{f}}[\hat{\mu}, \hat{\lambda}] > 0$.

对 $\delta > 0$ 和 $R > 0$, 定义

$$\Theta_R(\hat{\mu}) := \inf_{\hat{\lambda} \in N_R} \omega_{\tilde{f}}[\hat{\mu}, \hat{\lambda}].$$

因为 N_R 是紧集, 由 $\tilde{f}$ 的连续性可知 $\Theta_R(\hat{\mu}) = 0$ 当且仅当存在 $\hat{\lambda} \in N_R$, 使得 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\lambda}$ 之间的线段 $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ 包含在 $\partial \Gamma^0(x)$ 中.

引理 2.4 设 $\hat{\mu} = (\mu, q) \in \partial\Gamma^0(x)$. 当 $|\mu| \leq R \leq R_{\hat{\mu}}$ 时, $\Theta_R(\hat{\mu}) = 0$; 当 $R > R_{\hat{\mu}}$ 时, $\Theta_R(\hat{\mu}) > 0$ 并且关于 R 是严格单增的.

证明 第一个结论是显然的. 注意到 $R_{\hat{\mu}} < \infty$ 当且仅当 $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_x^+$. 设 $R' > R > R_{\hat{\mu}}$ 并且 $\Theta_{R'}(\hat{\mu})$ 在 $\hat{\lambda}' \in N_{R'}$ 达到, 即

$$\Theta_{R'}(\hat{\mu}) = \omega_{\tilde{f}}[\hat{\mu}, \hat{\lambda}'].$$

设 $\hat{\lambda} \in N_R$. 由 $R' > R > R_{\hat{\mu}}$ 及 $\partial\Gamma^0(x)$ 的凸性可知 $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\lambda}$ 和 $\hat{\lambda}'$ 三点不共线, 记 P 是通过 $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\lambda}$ 和 $\hat{\lambda}'$ 三点的二维平面. 在平面 P 上, 线段 $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ 包含在以 $(\hat{\mu}, \hat{\lambda}')$ 和曲线 $P \cap \partial\Gamma^0(x)$ 为边界的区域 D 的内部. 由条件 (1.3) 可知 $\tilde{f}$ 没有临界点, 所以, $\tilde{f}$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值只能在边界上取到. 因此, $0 < \omega_{\tilde{f}}[\hat{\mu}, \hat{\lambda}] < \Theta_{R'}(\hat{\mu})$. 由 N_R 的紧性可知 $0 < \Theta_R < \Theta_{R'}$. $\square$

推论 2.1 设 $\hat{\mu} = (\mu, q) \in \partial\Gamma^0(x) \cap \mathcal{C}_x^+$, $\delta > 0$. 对任意的 $R \geq 2R_{\hat{\mu}}$, 有

$$\sum f_{\lambda_i}(\lambda)(\mu_i - \lambda_i) - \sum \psi_{p_i}(x, p)(q_i - p_i) \geq \Theta_{2R_{\hat{\mu}}}(\hat{\mu}) > 0, \quad \forall \hat{\lambda} = (\lambda, p) \in N_R. \quad (2.1)$$

证明 因为 $\tilde{f}$ 是凹函数, 对任意的 $\hat{\mu} = (\mu, q)$, $\hat{\lambda} = (\lambda, p) \in \hat{\Gamma}(x)$, 有

$$(1-t) \sum (f_{\lambda_i}(\lambda)(\mu_i - \lambda_i) - \psi_{p_i}(x, p)(q_i - p_i)) \geq \tilde{f}(x, t\hat{\mu} + (1-t)\hat{\lambda}) - \tilde{f}(x, \hat{\lambda}), \quad \forall 0 \leq t \leq 1,$$

因而由引理 2.4 得到 (2.1). $\square$

定理 2.2 设 $\delta > 0$, $\hat{\mu} = (\mu, q) \in \mathcal{C}_x^+$. 存在正的常数 $\theta_{\hat{\mu}}$ 和 R_0 依赖于 $\text{dist}(\hat{\mu}, \partial\mathcal{C}_x^+)$, 使得当 $R \geq R_0$ 时, 对任意的 $\hat{\lambda} = (\lambda, p) \in N_R$, 有

$$\sum f_{\lambda_i}(\lambda)(\mu_i - \lambda_i) - \sum \psi_{p_i}(x, p)(q_i - p_i) \geq \theta_{\hat{\mu}} + \theta_{\hat{\mu}} \sum f_{\lambda_i}(\lambda). \quad (2.2)$$

证明 首先, 若 $\hat{\mu} \in \partial\Gamma^0(x)$, 则由引理 2.1 和推论 2.1 可得到 (2.2). 假设 $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_x^+ \setminus \overline{\Gamma^0(x)}$. 对于 $\hat{\lambda} \in N_R$, $R \geq 2R_{\hat{\mu}}$, 线段 $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ 在某一点 $\hat{\mu}'$ 经过 $\hat{S}_{\hat{\mu}}^x$. 由引理 2.2 有 $\hat{\mu}' \in \mathcal{C}_x^+$ 并且 $R_{\hat{\mu}'} \leq R_{\hat{\mu}}$. 显然,

$$(\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \geq (\hat{\mu}' - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}}.$$

所以 (2.2) 的证明归结到前面的情形.

下面讨论 $\hat{\mu} \in \Gamma^0(x)$ 的情形. 令 $\varepsilon > 0$ 满足 $\hat{\mu}^\varepsilon = \hat{\mu} - \varepsilon \hat{\mathbf{1}} \in \partial\Gamma^0(x)$. 若

$$\sqrt{n}\varepsilon < \text{dist}(\hat{\mu}, \partial\mathcal{C}_x^+),$$

则 $\hat{\mu}^\varepsilon \in \mathcal{C}_x^+$ 并且

$$(\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} = (\hat{\mu}^\varepsilon - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} + \varepsilon \hat{\mathbf{1}} \cdot \nu_{\hat{\lambda}} = (\hat{\mu}^\varepsilon - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}}.$$

所以由前面的第一种情形得到 (2.2).

最后, 若 $\sqrt{n}\varepsilon \geq \text{dist}(\hat{\mu}, \partial\mathcal{C}_x^+)$, 则

$$(\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} = (\hat{\mu}^\varepsilon - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} + \varepsilon \hat{\mathbf{1}} \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \geq \frac{\text{dist}(\hat{\mu}, \partial\mathcal{C}_x^+)}{\sqrt{n}} \hat{\mathbf{1}} \cdot \nu_{\hat{\lambda}}.$$

另一方面, 由 $\tilde{f}$ 的凹性得到

$$(\hat{\mu} - \hat{\lambda}) \cdot \nu_{\hat{\lambda}} \geq \frac{\tilde{f}(x, \hat{\mu}) - \tilde{f}(x, \hat{\lambda})}{\sqrt{|Df(\lambda)|^2 + D_p\psi(x, p)|^2}} = \frac{\tilde{f}(x, \hat{\mu})}{\sqrt{|Df(\lambda)|^2 + D_p\psi(x, p)|^2}}.$$

结合上述两个不等式得到 (2.2). 定理 2.2 证毕. $\square$

本节最后考虑

$$\hat{\mathcal{C}}^+ = \bigcup_{x \in M} \hat{\mathcal{C}}_x^+, \quad \hat{\Gamma} = \bigcup_{x \in M} \hat{\Gamma}(x) \equiv \Gamma \times TM$$

以及

$$\hat{\Gamma}^0 = \bigcup_{x \in M} \hat{\Gamma}^0(x), \quad \partial \hat{\Gamma}^0 = \bigcup_{x \in M} \partial \hat{\Gamma}^0(x),$$

其中 TM 是 M 的切丛. 称一个映射: $\hat{\mu}: M \rightarrow \hat{\mathcal{C}}^+$ 为 M 上的 $\hat{\mathcal{C}}^+$ -截面, 如果对任意的 $x \in M$ 有 $\hat{\mu}(x) \in \hat{\mathcal{C}}^+(x)$. 我们可以自然地引入连续或光滑 $\hat{\mathcal{C}}^+$ -截面, 以及类似的连续或光滑 $\partial \hat{\Gamma}^0$ -截面的概念.

定理 2.3 设 $\mathcal{K}$ 是一个由连续 $\mathcal{C}^+$ -截面组成的集合. 假设对每个 $x \in M$,

$$K(x) = \{\hat{\mu}(x) : \hat{\mu} \in \mathcal{K}\}$$

是 $\mathcal{C}_x^+$ 的紧子集, 则对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\theta_{\mathcal{K}}, R_{\mathcal{K}} > 0$, 使得当 $R > R_{\mathcal{K}}$ 时对任意的满足 $|p| \leq r$ 的连续 $\partial \hat{\Gamma}^0$ -截面 $\hat{\lambda} = (\lambda, p)$, 有

$$\sum (f_{\lambda_i}(\mu_i - \lambda_i) - \psi_{p_i}(q_i - p_i)) \geq \theta_{\mathcal{K}} + \theta_{\mathcal{K}} \sum f_{\lambda_i}(\lambda), \quad \forall (\mu, q) \in \mathcal{K}. \quad (2.3)$$

证明 由定理 2.2 以及 $K(x)$ 和 M 的紧性即得. $\square$

3 二阶导数估计

在本文中, 令 ∇ 表示 (M^n, g) 的 Levi-Civita 联络. 曲率张量定义如下:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

在 M^n 的局部标架 $e_1, \dots, e_n$ 下, 记 $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}$, Christoffel 符号 Γ_{ij}^k 和曲率系数分别为 $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$ 和

$$R_{ijkl} = g(R(e_k, e_l)e_j, e_i), \quad R_{jkl}^i = g^{im} R_{mjkl}.$$

我们将使用 $\nabla_i = \nabla_{e_i}$ 和 $\nabla_{ij} = \nabla_i \nabla_j - \Gamma_{ij}^k \nabla_k$ 等.

对于 M^n 上的可微函数 v , 记 ∇v 为 v 的梯度, $\nabla^2 v$ 为 v 的 Hesse 矩阵, 这可以局部表示为 $\nabla_{ij} v = \nabla_i(\nabla_j v) - \Gamma_{ij}^k \nabla_k v$. 我们知道, $\nabla_{ij} v = \nabla_{ji} v$ 并且

$$\nabla_{ijk} v - \nabla_{jik} v = R_{kij}^l \nabla_l v, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{ijkl} v - \nabla_{klij} v &= R_{ljk}^m \nabla_{im} v + \nabla_i R_{ljk}^m \nabla_m v + R_{lik}^m \nabla_{jm} v \\ &\quad + R_{jik}^m \nabla_{lm} v + R_{jil}^m \nabla_{km} v + \nabla_k R_{jil}^m \nabla_m v. \end{aligned} \quad (3.2)$$

令 $u \in C^4(\bar{M})$ 是方程 (1.1) 的容许解. 为简单起见, 记 $U := \nabla^2 u + A(x, \nabla u)$, 同时在局部标架 $e_1, \dots, e_n$ 下,

$$\begin{aligned} U_{ij} &\equiv U(e_i, e_j) = \nabla_{ij} u + A^{ij}(x, \nabla u), \\ \nabla_k U_{ij} &\equiv \nabla U(e_i, e_j, e_k) = \nabla_{kij} u + \nabla_k A^{ij}(x, \nabla u) \\ &\equiv \nabla_{kij} u + \nabla'_k A^{ij}(x, \nabla u) + A_{pi}^{ij}(x, \nabla u) \nabla_{kl} u, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 $A^{ij} = A^{e_i e_j}$, $\nabla'_k A^{ij}$ 表示 A 关于空间变量 $x \in M$ 的协变导数, 关于 $A^{ij}_{p_l}$ 等记号的含义是显而易见的. 类似地, 我们可以计算 $\nabla_{kl} U_{ij} = \nabla_k \nabla_l U_{ij} - \Gamma_{kl}^m \nabla_m U_{ij}$ 等.

令 $\mathcal{S}$ 是 $n \times n$ 实对称矩阵的全体, 矩阵 $A = \{A_{ij}\}$ 的特征值 $\lambda[A] \in \Gamma$. 定义 $\mathcal{S}$ 上的函数 F 为

$$F(A) \equiv f(\lambda[A]).$$

以下将使用局部标准正交标架. 方程 (1.1) 可以局部写成以下形式:

$$F(U) = \psi(x, \nabla u), \quad (3.4)$$

其中 $U \equiv \{U_{ij}\}$. 我们将使用以下记号:

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial A_{ij}}(U), \quad F^{ij,kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial A_{ij} \partial A_{kl}}(U).$$

矩阵 $\{F^{ij}\}$ 的特征值为 $f_1, \dots, f_n$, 并且由假设 (1.3) 知它是正定的, 同时 (1.4) 蕴涵着 F 是凹函数 (参见文献 [1]). 另外, 当 $\{U_{ij}\}$ 为对角阵时, $\{F^{ij}\}$ 亦如此, 同时以下等式成立:

$$F^{ij} U_{ij} = \sum f_i \lambda_i, \quad F^{ij} U_{ik} U_{kj} = \sum f_i \lambda_i^2,$$

其中 $\lambda(U) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

设线性算子 $\mathcal{L}$ 的局部表示为

$$\mathcal{L}v := F^{ij} \nabla_{ij} v + (F^{ij} A^{ij}_{p_k} - \psi_{p_k}) \nabla_k v, \quad v \in C^2(M), \quad (3.5)$$

其中 $A^{ij}_{p_k} \equiv A^{ij}_{p_k}[u] \equiv A^{ij}_{p_k}(x, \nabla u)$, $\psi_{p_k} \equiv \psi_{p_k}[u] \equiv \psi_{p_k}(x, \nabla u)$. 以下是定理 2.3 的推论.

命题 3.1 假定 $\sup_{x \in M} |\nabla u| \leq C$, 则存在一致的正常数 R 和 θ , 使得

$$\mathcal{L}(\underline{u} - u) \geq \theta \sum F^{ii} + \theta, \quad \text{当 } |\lambda(U)| \geq R \text{ 时}. \quad (3.6)$$

证明 对于任意的 $x \in M$, 选取 x 附近的光滑局部标准正交标架 $e_1, \dots, e_n$ 使得 $\{U_{ij}(x)\}$ 是对角阵. 因为 $|\nabla u|$ 有界, 由文献 [1, 引理 6.2] 和定理 2.3 可知, 存在正常数 R 和 θ , 使得当 $|\lambda(U)| \geq R$ 时有

$$F^{ii}(\underline{U}_{ii} - U_{ii}) - \psi_{p_k} \nabla_k(\underline{u} - u) \geq \theta \sum F^{ii} + \theta, \quad (3.7)$$

其中 $\underline{U} = \{\underline{U}_{ij}\} = \{\nabla_{ij} \underline{u} + A^{ij}[\underline{u}]\}$. 由 (1.7) 有

$$A^{ii}_{p_k} \nabla_k(\underline{u} - u) \geq A^{ii}(x, \nabla \underline{u}) - A^{ii}(x, \nabla u).$$

因此, (3.6) 可由 (3.7) 推出. □

现在来推导定理 1.1 中的二阶导数估计. 考虑

$$W(x) = \max_{\xi \in T_x M, |\xi|=1} (\nabla_{\xi\xi} u + A^{\xi\xi}(x, \nabla u)) e^\phi,$$

其中 ϕ 是待定函数. 假设 W 在某一点 $x_0 \in M$ 取得最大值

$$W(x_0) = \max_M W.$$

在 x_0 附近选取光滑局部标准正交标架 $e_1, \dots, e_n$ 使得在 x_0 处 $\nabla_{e_i} e_j = 0$ 并且 U_{ij} 是对角的, 假定

$$U_{11}(x_0) \geq \dots \geq U_{nn}(x_0),$$

所以, $W(x_0) = U_{11}(x_0)e^{\phi(x_0)}$.

注意到函数 $\log U_{11} + \phi$ 在 x_0 处取得最大值, 在 x_0 处有

$$\frac{\nabla_i U_{11}}{U_{11}} + \nabla_i \phi = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\nabla_{ii} U_{11}}{U_{11}} - \left(\frac{\nabla_i U_{11}}{U_{11}} \right)^2 + \nabla_{ii} \phi \leq 0. \quad (3.9)$$

由 (3.1)–(3.3), 通过直接计算可得

$$(\nabla_i U_{11})^2 \leq (\nabla_1 U_{1i})^2 + CU_{11}^2 + C, \quad (3.10)$$

$$\nabla_{ii} U_{11} \geq \nabla_{11} U_{ii} + \nabla_{ii} A^{11} - \nabla_{11} A^{ii} - CU_{11} - C. \quad (3.11)$$

对方程 (3.4) 微分两次, 我们得到在 x_0 处,

$$F^{ii} \nabla_k U_{ii} = \nabla_k \psi + \psi_{p_j} \nabla_{k_j} u \quad (3.12)$$

和

$$\begin{aligned} & F^{ii} \nabla_{11} U_{ii} + F^{ij,kl} \nabla_1 U_{ij} \nabla_1 U_{kl} \\ & \geq \psi_{p_j} \nabla_{11j} u + \psi_{p_l p_k} \nabla_{1k} u \nabla_{1l} u - CU_{11} \\ & \geq \psi_{p_j} \nabla_j U_{11} + \psi_{p_1 p_1} U_{11}^2 - CU_{11} \\ & = -U_{11} \psi_{p_j} \nabla_j \phi + \psi_{p_1 p_1} U_{11}^2 - CU_{11}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

这里用到了 (3.8). 接下来,

$$\begin{aligned} F^{ii}(\nabla_{ii} A^{11} - \nabla_{11} A^{ii}) & \geq F^{ii}(A_{p_j}^{11} \nabla_{ii} u - A_{p_j}^{ii} \nabla_{11j} u) \\ & \quad + F^{ii}(A_{p_i p_i}^{11} U_{ii}^2 - A_{p_1 p_1}^{ii} U_{11}^2) - CU_{11} \sum F^{ii} \\ & \geq U_{11} F^{ii} A_{p_j}^{ii} \nabla_j \phi - CU_{11} \sum F^{ii} - CU_{11} \\ & \quad - C \sum_{i \geq 2} F^{ii} U_{ii}^2 - U_{11}^2 \sum_{i \geq 2} F^{ii} A_{p_1 p_1}^{ii}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

由 (3.9)、(3.11)、(3.13) 和 (3.14) 得到

$$\mathcal{L}\phi \leq U_{11} \sum_{i \geq 2} F^{ii} A_{p_1 p_1}^{ii} - \psi_{p_1 p_1} U_{11} + E + \frac{C}{U_{11}} F^{ii} U_{ii}^2 + C \sum F^{ii} + C, \quad (3.15)$$

其中

$$E = \frac{1}{U_{11}^2} F^{ii} (\nabla_i U_{11})^2 + \frac{1}{U_{11}} F^{ij,kl} \nabla_1 U_{ij} \nabla_1 U_{kl}.$$

在 (1.6) 和 (1.7) 的假设下有

$$U_{11} \sum_{i \geq 2} F^{ii} A_{p_1 p_1}^{ii} - \psi_{p_1 p_1} U_{11} \leq 0.$$

现在取

$$\phi = \frac{\delta |\nabla u|^2}{2} + b\eta,$$

其中 b 和 δ 是待定常数, $0 < \delta < 1 \leq b$, η 是 C^2 函数, 它可能依赖于 u 但不依赖于 u 的导数. 我们有

$$\nabla_i \phi = \delta \nabla_j u \nabla_{ij} u + b \nabla_i \eta, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{ii} \phi &= \delta \nabla_{ij} u \nabla_{ij} u + \delta \nabla_j u \nabla_{iij} u + b \nabla_{ii} \eta \\ &\geq \frac{\delta}{2} U_{ii}^2 - C\delta + \delta \nabla_j u \nabla_{iij} u + b \nabla_{ii} \eta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

由 (3.1)、(3.3) 和 (3.12) 可知,

$$\begin{aligned} F^{ii} \nabla_j u \nabla_{iij} u &\geq F^{ii} \nabla_j u (\nabla_j U_{ii} - \nabla_j A^{ii}) - C |\nabla u|^2 \sum F^{ii} \\ &\geq (\psi_{p_l} - F^{ii} A_{p_l}^{ii}) \nabla_j u \nabla_{jil} u - C |\nabla u|^2 \sum F^{ii} - C |\nabla u|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

于是,

$$\mathcal{L}\phi \geq b\mathcal{L}\eta + \frac{\delta}{2} F^{ii} U_{ii}^2 - C \sum F^{ii} - C. \quad (3.19)$$

最后令 $\eta = \underline{u} - u$, 由 (3.16) 知,

$$(\nabla_i \phi)^2 \leq C\delta^2(1 + U_{ii}^2) + 2b^2(\nabla_i \eta)^2 \leq C\delta^2 U_{ii}^2 + Cb^2. \quad (3.20)$$

接下来估计 E . 对于固定的 $0 < s \leq 1/3$, 令

$$J = \{i : U_{ii} \leq -sU_{11}\}, \quad K = \{i : U_{ii} > -sU_{11}\}.$$

由文献 [17, 18] 中的

$$-F^{ij,kl} \nabla_1 U_{ij} \nabla_1 U_{kl} \geq \sum_{i \neq j} \frac{F^{ii} - F^{jj}}{U_{jj} - U_{ii}} (\nabla_1 U_{ij})^2,$$

可知

$$\begin{aligned} -F^{ij,kl} \nabla_1 U_{ij} \nabla_1 U_{kl} &\geq 2 \sum_{i \geq 2} \frac{F^{ii} - F^{11}}{U_{11} - U_{ii}} (\nabla_1 U_{i1})^2 \\ &\geq \frac{2}{(1+s)U_{11}} \sum_{i \in K} (F^{ii} - F^{11}) (\nabla_1 U_{i1})^2 \\ &\geq \frac{2(1-s)}{(1+s)U_{11}} \sum_{i \in K} (F^{ii} - F^{11}) \left((\nabla_i U_{11})^2 - \frac{CU_{11}^2}{s} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

由 (3.21)、(3.8) 和 (3.20) 可知,

$$\begin{aligned} E &\leq \frac{1}{U_{11}^2} \sum_{i \in J} F^{ii} (\nabla_i U_{11})^2 + C \sum_{i \in K} F^{ii} + \frac{CF^{11}}{U_{11}^2} \sum_{i \in K} (\nabla_i U_{11})^2 \\ &\leq \sum_{i \in J} F^{ii} (\nabla_i \phi)^2 + C \sum F^{ii} + CF^{11} \sum (\nabla_i \phi)^2 \\ &\leq Cb^2 \sum_{i \in J} F^{ii} + C\delta^2 \sum F^{ii} U_{ii}^2 + C \sum F^{ii} + C(\delta^2 U_{11}^2 + b^2) F^{11}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

由 (3.15)、(3.19) 和 (3.22) 有

$$\begin{aligned} b\mathcal{L}\eta \leq & \left(C\delta^2 - \frac{\delta}{2} + \frac{C}{U_{11}}\right) F^{ii} U_{ii}^2 + Cb^2 \sum_{i \in J} F^{ii} + C \sum F^{ii} \\ & + C(\delta^2 U_{11}^2 + b^2) F^{11} + C. \end{aligned} \quad (3.23)$$

由命题 3.1 知, 存在一致的正常数 θ 和 R , 使得只要 $U_{11}(x_0) > R$ 就有

$$\mathcal{L}(\underline{u} - u) \geq \theta \sum F^{ii} + \theta.$$

因此, 当 b 充分大时有

$$\left(C\delta^2 - \frac{\delta}{2} + \frac{C}{U_{11}}\right) F^{ii} U_{ii}^2 + Cb^2 \sum_{i \in J} F^{ii} + C(\delta^2 U_{11}^2 + b^2) F^{11} \geq 0.$$

这样就得到估计 $U_{11}(x_0) \leq C$, 否则当 δ 充分小且 $|U_{ii}| \geq sU_{11}$ ($i \in J$) 时, 上式第一项将是负的. 定理 1.1 中 (1.9) 的证明就此完成.

致谢 本文部分工作是在第二作者访问 The Ohio State University 数学系期间完成的, 谨在此衷心感谢 The Ohio State University 数学系所提供的科研条件和各方面帮助.

参考文献

- 1 Caffarelli L, Nirenberg L, Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Math*, 1985, 155: 261–301
- 2 Li Y Y. Some existence results for fully nonlinear elliptic equations of Monge-Ampère type. *Comm Pure Appl Math*, 1990, 43: 233–271
- 3 Guan B. The Dirichlet problem for a class of fully nonlinear elliptic equations. *Comm Partial Differential Equations*, 1994, 19: 399–416
- 4 Trudinger N S. On the Dirichlet problem for Hessian equations. *Acta Math*, 1995, 175: 151–164
- 5 Ivchikina N M. The integral method of barrier functions and the Dirichlet problem for equations with operators of the Monge-Ampère type. (Russian) *Mat Sb (N S)*, 1980, 112: 193–206; English transl: *Math USSR Sb*, 1981, 40: 179–192
- 6 Wang X J. A class of fully nonlinear elliptic equations and related functionals. *Indiana Univ Math J*, 1994, 43: 25–54
- 7 Trudinger N S, Wang X J. Hessian measures II. *Ann of Math (2)*, 1999, 150: 579–604
- 8 Chou K S, Wang X J. A variational theory of the Hessian equation. *Comm Pure Appl Math*, 2001, 54: 1029–1064
- 9 Urbas J. Hessian equations on compact Riemannian manifolds. In: *Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II*. New York: Kluwer/Plenum, 2002, 367–377
- 10 Guan B. The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature. *Trans Amer Math Soc*, 1998, 350: 4955–4971
- 11 Guan B. The Dirichlet problem for Hessian equations on Riemannian manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1999, 8: 45–69
- 12 Guan B. Second-order estimates and regularity for fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds. *Duke Math J*, 2014, 163: 1491–1524
- 13 Guan B. The Dirichlet problem for fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds. *arXiv:1403.2133*, 2014
- 14 Guan B, Jiao H M. Second order estimates for Hessian type fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 2693–2712
- 15 Guan B, Jiao H M. The Dirichlet problem for Hessian type elliptic equations on Riemannian manifolds. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2016, 36: 701–714
- 16 Guan B, Shi S J, Sui Z N. On estimates for fully nonlinear parabolic equations on Riemannian manifolds. *Anal PDE*, 2015, 8: 1145–1164
- 17 Andrews B. Contraction of convex hypersurfaces in Euclidean space. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1994, 2: 151–171
- 18 Gerhardt C. Closed Weingarten hypersurfaces in Riemannian manifolds. *J Differential Geom*, 1996, 43: 612–641

Second order estimates for fully nonlinear elliptic equations with gradient terms on closed Riemannian manifolds

Bo Guan, Shujun Shi & Zhenan Sui

Abstract Establishing a priori estimates for second derivatives is a key ingredient in the study of fully nonlinear elliptic equations, which is the focus of this paper. We consider a class of second order fully nonlinear equations on closed Riemannian manifolds. In terms of the tangent cone at infinity to the level sets of an associated function which may depend on the solution and its gradient, we introduce a condition to derive second order estimates for solutions of the equation.

Keywords fully nonlinear elliptic equation, closed Riemannian manifold, a priori estimate

MSC(2010) 35J15, 58J05, 35B45

doi: 10.1360/SSM-2020-0213