可相位恢复 p - 框架的稳定性

林丽琼^{1*}, 张云南², 蔡碧琼²

1. 福州大学数学与统计学院, 福州 350108;

2. 福建师范大学数学与统计学院, 福州 350117

E-mail: llq141141@163.com, zyn126126@163.com, BqCai2015@163.com

收稿日期: 2020-02-11; 接受日期: 2020-04-20; 网络出版日期: 2020-06-28; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11971108) 资助项目

摘要 相位恢复问题在物理和工程中有广泛的应用. 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$. 设 $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ 是 X 上的 p - 框架. 若对任意 $x^*, y^* \in X^*$, 等式 $|x^*(x_n)| = |y^*(x_n)|$ 对任意 $n \in I$ 成立蕴涵存在 $|\alpha| = 1$ 使得 $x^* = \alpha y^*$, 则称 Φ 是可相位恢复的. 本文证明在有限维 Banach 空间上, 可相位恢复 p - 框架是稳定的, 但在有 Schauder 基的无限维 Banach 空间上, 可相位恢复 p - 框架不是稳定的. 本文也说明在无限维 Banach 空间上, 可通过有限维空间足够好的逼近来得到可相位恢复 p - 框架的稳定性结果.

关键词 Banach 空间 p - 框架 相位恢复

MSC (2020) 主题分类 46B20, 42C15

1 引言

Duffin 和 Schaeffer^[1] 在研究非调和 Fourier 级数时首次引入了 Hilbert 空间上框架的概念. Daubechies 等^[2] 发现使用框架可使 $L_2(\mathbb{R})$ 中的函数展开成类似于标准正交基展开的级数, 因此重新引入了框架理论. 这一基础性工作使得框架理论及其应用开始引起国内外学者的兴趣和关注, 并且得到广泛研究和迅速发展.

定义 1.1 设 H 是 Hilbert 空间, I 是指标集. H 中的向量族 $\{x_i\}_{i \in I}$ 称为 H 上的框架, 如果存在常数 $0 < A \leq B < \infty$, 使得对任意 $x \in H$, 有

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x_i, x \rangle|^2 \leq B\|x\|^2,$$

其中 A 和 B 分别称为下框架界和上框架界.

英文引用格式: Lin L Q, Zhang Y N, Cai B Q. Stability of phase retrievable p -frames (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 51–62, doi: 10.1360/SSM-2020-0033

如今框架理论不仅在数学的其他领域有广泛的应用, 而且在计算科学和工程学等领域也有重要应用 (参见文献 [3–8]). 随着框架理论的发展, 一些学者把 Hilbert 空间上的框架理论推广到 Banach 空间上, 并成为框架理论的一个新的重要分支 (参见文献 [9–13]). 其中 Aldroubi 等^[10] 在 Banach 空间中引入了 p - 框架的概念, 这是 Banach 空间上最接近于 Hilbert 空间上框架的一个概念.

相位恢复在物理和工程上具有广泛的应用. 对可分 Hilbert 空间 H , 相位恢复指的是, 对某可数族 $\Phi = \{x_n\}_{n \in I} \subseteq H$, 要从线性测量系数的绝对值 (称为强度测量) $\{|\langle x_n, x \rangle|\}_{n \in I}$ 中恢复未知信号 $x \in H$. 注意到, 若 $x = \alpha y$ 且 $|\alpha| = 1$, 则 $|\langle x_n, x \rangle| = |\langle x_n, y \rangle|$ 对任意 $n \in I$ 成立. 若上述表述的逆命题是正确的, 则称 Φ 是可相位恢复的, 即等式 $|\langle x_n, x \rangle| = |\langle x_n, y \rangle|$ 对任意 $n \in I$ 成立蕴涵存在 $|\alpha| = 1$ 使得 $x = \alpha y$.

Balan^[14] 说明在有限维 Hilbert 空间上, 可相位恢复框架是稳定的. Cahill 等^[15] 说明在无限维 Hilbert 空间上, 可相位恢复框架不是稳定的, 而且可通过有限维空间足够好的逼近来得到可相位恢复框架的稳定性结果.

本文研究 Banach 空间上可相位恢复 p - 框架的稳定性. 先说明一些定义与记号. 设 X 是 Banach 空间, 其对偶空间记为 X^* . 设 A 是 X 的子集, 以 $\text{span}A$ 和 $\bar{A}$ 表示 A 的线性张和闭包.

定义 1.2 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$, I 是指标集. X 中的向量族 $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ 称为 X 上的 p - 框架, 如果存在常数 $0 < A \leq B < \infty$, 使得对任意 $x^* \in X^*$, 有

$$A\|x^*\|^p \leq \sum_{n \in I} |x^*(x_n)|^p \leq B\|x^*\|^p,$$

其中 A 和 B 分别称为下 p - 框架界和上 p - 框架界.

记非线性映射 $\mathcal{A}_\Phi : X^* \rightarrow l_p(I)$ 为

$$\mathcal{A}_\Phi(x^*) = \{|x^*(x_n)|\}_{n \in I}.$$

定义 1.3 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$. 设 $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ 是 X 上的 p - 框架. 若对任意 $x^*, y^* \in X^*$, 等式 $|x^*(x_n)| = |y^*(x_n)|$ 对任意 $n \in I$ 成立蕴涵存在 $|\alpha| = 1$ 使得 $x^* = \alpha y^*$, 则称 Φ 是可相位恢复的.

显然, Φ 是可相位恢复的当且仅当 $\mathcal{A}_\Phi$ 在 $X^*/\sim$ 上是单射的, 其中 $x^* \sim y^* \Leftrightarrow$ 存在 $|\alpha| = 1$ 使得 $x^* = \alpha y^*$.

2 有限维 Banach 空间上可相位恢复 p - 框架的稳定性

本节证明在有限维 Banach 空间 X 上可相位恢复 p - 框架是稳定的, 而且相应的非线性映射 $\mathcal{A}_\Phi$ 有下 Lipschitz 界. 首先给出 Banach 空间上 p - 框架可相位恢复性与具有可补性质之间的关系.

定义 2.1 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$. 设 $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ 是 X 上的 p - 框架. 称 Φ 具有可补性质, 若对 I 的任意子集 J , 或者 $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in J\} = X$, 或者 $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in I \setminus J\} = X$.

定理 2.1 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$. $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ 是 X 上的 p - 框架.

- (1) 若 Φ 是可相位恢复的, 则 Φ 具有可补性质;
- (2) 设 X 是实的 Banach 空间, 若 Φ 具有可补性质, 则 Φ 是可相位恢复的.

证明 (1) 假设 Φ 不具有可补性质, 则存在 I 的子集 J 使得 $X_1 = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in J\} \neq X$ 且 $X_2 = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in I \setminus J\} \neq X$. 故存在非零 $x^*, y^* \in X^*$ 使得 $x^*|_{X_1} = 0$ 且 $y^*|_{X_2} = 0$. 因而,

$$|(x^* + y^*)(x_n)| = |(x^* - y^*)(x_n)|$$

对任意 $n \in I$ 成立. 由于 Φ 是可相位恢复的, 则存在 $|\alpha| = 1$ 使得 $x^* + y^* = \alpha(x^* - y^*)$. 由于 $y^* \neq 0$, 则 $\alpha \neq 1$. 故 $x^* = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}y^*$. 由于 $y^*(x_n) = 0$ 对任意 $n \in I \setminus J$ 成立, 则 $x^*(x_n) = 0$ 对任意 $n \in I \setminus J$ 成立. 又由于 $x^*(x_n) = 0$ 对任意 $n \in J$ 成立, 则 $x^*(x_n) = 0$ 对任意 $n \in I$ 成立. 这与 $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ 是 X 上的 p - 框架且 $x^* \neq 0$ 矛盾.

(2) 假设 Φ 不是可相位恢复的, 则存在非零 $x^*, y^* \in X^*$ 使得 $|x^*(x_n)| = |y^*(x_n)|$ 对任意 $n \in I$ 成立, 但 $x^* \neq \pm y^*$. 令

$$J = \{n \in I : x^*(x_n) = y^*(x_n)\},$$

则 $I \setminus J = \{n \in I : x^*(x_n) = -y^*(x_n)\}$. 若 $X_1 = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in J\} = X$, 则 $x^* = y^*$, 矛盾. 故 $X_1 \neq X$. 同理可证 $X_2 = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in I \setminus J\} \neq X$. 因此, Φ 不具有可补性质. $\square$

设 X 和 H 分别是 N 维 Banach 空间和 N 维 Hilbert 空间. 可分别视 X 和 H 为 $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2)$. 令

$$S : X \rightarrow H : \{a_i\}_{i=1}^N \mapsto \{a_i\}_{i=1}^N,$$

则 S 是可逆算子.

接下来将说明有限维 Banach 空间上 p - 框架的可相位恢复性在小摄动下是稳定的. 需要如下引理.

引理 2.1 设 $m \in \mathbb{N}$, $1 < s \leq t < \infty$, 则对任意 $\{a_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{C}$, 有

$$m^{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^t \right)^{\frac{1}{t}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$

证明 令 $M = (\sum_{i=1}^m |a_i|^s)^{\frac{1}{s}}$, 则对任意 $1 \leq i \leq m$, 有 $|a_i|^s \leq M^s$, 故 $\frac{|a_i|}{M} \leq 1$. 因而,

$$\frac{|a_i|^t}{M^t} \leq \frac{|a_i|^s}{M^s},$$

即 $|a_i|^t \leq \frac{M^t}{M^s} |a_i|^s$. 从而,

$$\sum_{i=1}^m |a_i|^t \leq \frac{M^t}{M^s} \sum_{i=1}^m |a_i|^s = M^t,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^m |a_i|^t \right)^{\frac{1}{t}} \leq M = \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$

由于

$$\sum_{i=1}^m |a_i|^s \leq \left(\sum_{i=1}^m (|a_i|^s)^{\frac{t}{s}} \right)^{\frac{s}{t}} \left(\sum_{i=1}^m 1 \right)^{1-\frac{s}{t}} = m^{1-\frac{s}{t}} \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^t \right)^{\frac{s}{t}},$$

则

$$\left(\sum_{i=1}^m |a_i|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}} \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^t \right)^{\frac{1}{t}},$$

即

$$m^{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^t \right)^{\frac{1}{t}}.$$

证毕. $\square$

引理 2.2 设 X 是 N 维 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\{x_n\}_{n=1}^m \subseteq X$, 则

- (1) $\{x_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上的 p - 框架当且仅当 $\{Sx_n\}_{n=1}^m$ 是 Hilbert 空间 H 上的框架;
- (2) X 上的 p - 框架 $\{x_n\}_{n=1}^m$ 是可相位恢复的当且仅当 H 上的框架 $\{Sx_n\}_{n=1}^m$ 是可相位恢复的.

证明 (1) 证明分为两种情形.

情形 I $1 < p \leq 2$. 假设 $\{x_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上的 p - 框架且有 p - 框架界 A 和 B . 对任意 $x \in H = H^*$, 有 $S^*x \in X^*$, 则

$$\begin{aligned} m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{p}} \|(S^*)^{-1}\|^{-1} \|x\|_2 &\leq m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{p}} \|S^*x\| \leq m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^m |(S^*x)x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^m |(S^*x)x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^m |\langle Sx_n, x \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^m |(S^*x)x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq B^{\frac{1}{p}} \|S^*x\| \\ &\leq B^{\frac{1}{p}} \|S^*\| \|x\|_2. \end{aligned}$$

故 $\{Sx_n\}_{n=1}^m$ 是 H 上的框架.

假设 $\{Sx_n\}_{n=1}^m$ 是 H 上的框架且有框架界 C 和 D . 对任意 $x^* \in X^*$, 有 $(S^{-1})^*x^* \in H^* = H$, 则

$$\begin{aligned} C^{\frac{1}{2}} \|S^*\|^{-1} \|x^*\| &\leq C^{\frac{1}{2}} \|(S^{-1})^*x^*\|_2 \leq \left(\sum_{n=1}^m |\langle Sx_n, (S^{-1})^*x^* \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^m |\langle Sx_n, (S^{-1})^*x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^m |x^*(S^{-1}Sx_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^m |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^m |\langle Sx_n, (S^{-1})^*x^* \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} \|(S^{-1})^*x^*\|_2 \\ &\leq m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} \|(S^{-1})^*\| \|x^*\|. \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上的 p - 框架.

情形 II $p > 2$. 证明类似于情形 I, 略.

(2) 假设 $\{x_n\}_{n=1}^m$ 是可相位恢复的. 若 $x, y \in H$ 满足 $|\langle Sx_n, x \rangle| = |\langle Sx_n, y \rangle|$ 对任意 $1 \leq n \leq m$ 成立, 则 $S^*x, S^*y \in X^*$, 且 $|(S^*x)x_n| = |(S^*y)x_n|$ 对任意 $1 \leq n \leq m$ 成立. 由于 $\{x_n\}_{n=1}^m$ 是可相位恢复的, 则存在 $|\alpha| = 1$ 使得 $S^*x = \alpha S^*y$. 注意到 S 是可逆的, 则 $x = \alpha y$. 因此, $\{Sx_n\}_{n=1}^m$ 是可相位恢复的. 反之证明类似. $\square$

定理 2.2 设 X 是 N 维 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上可相位恢复的 p - 框架, 则存在 $\varepsilon > 0$, 只要向量族 $\Phi' = \{x'_n\}_{n=1}^m \subseteq X$ 满足: 对任意 $1 \leq n \leq m$, 有 $\|x_n - x'_n\| < \varepsilon$, 则 $\Phi' = \{x'_n\}_{n=1}^m$ 也是 X 上可相位恢复的 p - 框架.

证明 由于 $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上可相位恢复的 p - 框架, 则 $\{Sx_n\}_{n=1}^m$ 是 H 上可相位恢复的框架. 由文献 [14, 定理 1.1] 可知, 存在 $\varepsilon' > 0$, 只要向量族 $\{y_n\}_{n=1}^m \subseteq H$ 满足: 对任意 $1 \leq n \leq m$, 有 $\|Sx_n - y_n\|_2 < \varepsilon'$, 则 $\{y_n\}_{n=1}^m$ 也是 H 上可相位恢复的框架. 令 $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\|S\|}$. 由于向量族 $\Phi' = \{x'_n\}_{n=1}^m \subseteq X$ 满足: 对任意 $1 \leq n \leq m$, 有 $\|x_n - x'_n\| < \varepsilon$, 则 $\|Sx_n - Sx'_n\|_2 < \|S\|\varepsilon = \varepsilon'$. 故 $\{Sx'_n\}_{n=1}^m \subseteq H$ 是 H 上可相位恢复的框架. 因此, $\Phi' = \{x'_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上可相位恢复的 p - 框架. $\square$

给定 X 上的 p - 框架 Φ , 为了量化相位恢复过程的稳定性, 其中一个方式就是考虑映射 $\mathcal{A}_\Phi$ 关于空间 $X^*/\sim$ 在某种度量下的下 Lipschitz 界, 其中一个自然的度量就是由 X^* 上的度量按照如下方式诱导的商度量:

$$d(x^*, y^*) = \inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\|.$$

定理 2.3 设 X 是 N 维 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上可相位恢复的 p - 框架, 则 $\mathcal{A}_\Phi$ 有正的下 Lipschitz 界, 即存在 $C > 0$ (仅与 Φ 有关), 使得对任意 $x^*, y^* \in X^*$, 有

$$\inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| \leq C \|\mathcal{A}_\Phi(x^*) - \mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p.$$

证明 由于 $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^m$ 是 X 上可相位恢复的 p - 框架, 则 $\Psi = \{Sx_n\}_{n=1}^m$ 是 H 上可相位恢复的框架. 由文献 [15, 命题 1.4] 可知, 存在 $C_0 > 0$, 使得对任意 $x, y \in H$, 有

$$\inf_{|\alpha|=1} \|x - \alpha y\|_2 \leq C_0 \|\mathcal{A}_\Psi(x) - \mathcal{A}_\Psi(y)\|_2.$$

令

$$C = \begin{cases} C_0 \|S^*\|, & 1 < p \leq 2, \\ C_0 \|S^*\| m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, & p > 2, \end{cases}$$

则对任意 $x^*, y^* \in X^*$, 有 $(S^{-1})^* x^*, (S^{-1})^* y^* \in H$ 且

$$\begin{aligned} \inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| &= \inf_{|\alpha|=1} \|S^*(S^{-1})^* x^* - \alpha S^*(S^{-1})^* y^*\| \\ &\leq \|S^*\| \inf_{|\alpha|=1} \|(S^{-1})^* x^* - \alpha (S^{-1})^* y^*\|_2 \\ &\leq C_0 \|S^*\| \|\mathcal{A}_\Psi((S^{-1})^* x^*) - \mathcal{A}_\Psi((S^{-1})^* y^*)\|_2 \\ &= C_0 \|S^*\| \|\{|\langle Sx_n, (S^{-1})^* x^* \rangle|\}_{n=1}^m - \{|\langle Sx_n, (S^{-1})^* y^* \rangle|\}_{n=1}^m\|_2 \\ &= C_0 \|S^*\| \left(\sum_{n=1}^m \left| |\langle Sx_n, (S^{-1})^* x^* \rangle| - |\langle Sx_n, (S^{-1})^* y^* \rangle| \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_0 \|S^*\| \left(\sum_{n=1}^m \left| |x^*(x_n)| - |y^*(x_n)| \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \begin{cases} C_0 \|S^*\| \left(\sum_{n=1}^m \left| |x^*(x_n)| - |y^*(x_n)| \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 < p \leq 2, \\ C_0 \|S^*\| m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^m \left| |x^*(x_n)| - |y^*(x_n)| \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= C \left(\sum_{n=1}^m ||x^*(x_n)| - |y^*(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

由于

$$\|\mathcal{A}_\Phi(x^*) - \mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p = \|\{|x^*(x_n)|\}_{n=1}^m - \{|y^*(x_n)|\}_{n=1}^m\|_p = \left(\sum_{n=1}^m ||x^*(x_n)| - |y^*(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

则

$$\inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| \leq C \|\mathcal{A}_\Phi(x^*) - \mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p.$$

证毕. $\square$

本节最后说明对 Banach 空间 (不管是否有限维) 上的 p - 框架 Φ (不必是可相位恢复的), 映射 $\mathcal{A}_\Phi$ 总是有上 Lipschitz 界的.

定理 2.4 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ 是 X 上的 p - 框架且有 p - 框架界 A 和 B , 则对任意 $x^*, y^* \in X^*$, 有

$$\|\mathcal{A}_\Phi(x^*) - \mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p \leq B^{\frac{1}{p}} \inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| \leq B^{\frac{1}{p}} \|x^* - y^*\|.$$

证明 类似于文献 [15, 引理 2.5] 可证得结论. $\square$

3 无限维 Banach 空间上可相位恢复 p - 框架的稳定性

本节证明在有 Schauder 基的无限维 Banach 空间 X 上, 可相位恢复 p - 框架不是稳定的, 而且相应的非线性映射 $\mathcal{A}_\Phi$ 没有下 Lipschitz 界. 最后还说明在无限维 Banach 空间上, 可通过有限维空间足够好的逼近来得到可相位恢复 p - 框架的稳定性结果. 下面定理说明有 Schauder 基的无限维 Banach 空间 X 上的 p - 框架可以经过任意小范数摄动成为不可相位恢复的 p - 框架, 即说明了可相位恢复 p - 框架不是稳定的.

定理 3.1 设 X 是有规范 Schauder 基 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 的无限维 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 上的 p - 框架, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 X 上的不可相位恢复的 p - 框架 $\Psi = \{x'_n\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n - x'_n\|^p < \varepsilon.$$

证明 设 $\{e_i^*\}_{i=1}^\infty \subseteq X^*$ 是 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 相应的坐标泛函. 由于 $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 上的 p - 框架, 设其 p - 框架界为 A 和 B , 则

$$\sum_{n=1}^\infty |e_1^*(x_n)|^p \leq B \|e_1^*\|^p < \infty.$$

选取 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{n=k+1}^\infty |e_1^*(x_n)|^p < \varepsilon$. 令

$$x'_n = \begin{cases} x_n, & n \leq k, \\ x_n - e_1^*(x_n)e_1, & n > k, \end{cases}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - x'_n\|^p = \sum_{n=k+1}^{\infty} |e_1^*(x_n)|^p < \varepsilon.$$

显然,

$$\overline{\text{span}}\{x'_n : 1 \leq n \leq k\} \neq X.$$

对任意 $n > k$, 有 $e_1^*(x'_n) = 0$, 则 $\overline{\text{span}}\{x'_n : n > k\} \neq X$, 故 $\Psi = \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不具有可补性质. 由定理 2.1 知, Ψ 是不可相位恢复的. 下面说明当 ε 充分小时, $\Psi = \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 X 上的 p - 框架. 事实上, 对任意 $x^* \in X^*$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} |x^*(x'_n)|^p &= (|x^*(x'_n - x_n) + x^*(x_n)|)^p \leq 2^p (|x^*(x'_n - x_n)|^p + |x^*(x_n)|^p) \\ &\leq 2^p (\|x^*\|^p \|x'_n - x_n\|^p + |x^*(x_n)|^p). \end{aligned}$$

同理有

$$|x^*(x'_n)|^p \geq \frac{1}{2^p} |x^*(x_n)|^p - \|x^*\|^p \|x'_n - x_n\|^p.$$

由上面两个不等式可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2^p} A - \varepsilon\right) \|x^*\|^p &= \frac{1}{2^p} A \|x^*\|^p - \varepsilon \|x^*\|^p \leq \frac{1}{2^p} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p - \|x^*\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n - x_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x'_n)|^p \\ &\leq 2^p \left(\|x^*\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n - x_n\|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right) \leq 2^p (\varepsilon \|x^*\|^p + B \|x^*\|^p) \\ &= 2^p (\varepsilon + B) \|x^*\|^p, \end{aligned}$$

故当 $\varepsilon < \frac{1}{2^p} A$ 时, $\Psi = \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 X 上的 p - 框架. $\square$

接下来, 说明对有 Schauder 基的无限维 Banach 空间 X 上的 p - 框架 Φ , 映射 $\mathcal{A}_\Phi$ 没有正的下 Lipschitz 界. 需要如下引理.

引理 3.1 设 X 是有规范 Schauder 基 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的无限维 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\{e_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X^*$ 是 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相应的坐标泛函, $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 上的 p - 框架, 则对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $k > N$ 和 $m > k$ 使得

$$\sum_{n \notin \{N+1, \dots, m\}} |e_k^*(x_n)|^p < \varepsilon.$$

证明 由于对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $e_i^*(x_n) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$), 则存在 $k > N$, 使得对任意 $1 \leq n \leq N$, 有 $|e_k^*(x_n)|^p < \frac{\varepsilon}{2N}$. 由于 $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 上的 p - 框架, 设其 p - 框架界为 A 和 B , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e_k^*(x_n)|^p \leq B \|e_k^*\|^p < \infty.$$

选取 $m > k$ 使得 $\sum_{n=m+1}^{\infty} |e_k^*(x_n)|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. 因而,

$$\sum_{n \notin \{N+1, \dots, m\}} |e_k^*(x_n)|^p = \sum_{n=1}^N |e_k^*(x_n)|^p + \sum_{n=m+1}^{\infty} |e_k^*(x_n)|^p < N \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

证毕. $\square$

定理 3.2 设 X 是有规范 Schauder 基 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 的无限维 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 上的 p - 框架且有 p - 框架界 A 和 B , 则对任意 $\delta > 0$, 存在 $x^*, y^* \in X^*$ 使得

$$\inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| \geq 1,$$

但

$$\|\mathcal{A}_\Phi(x^*) - \mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p < \delta.$$

证明 设 $\{e_i^*\}_{i=1}^\infty \subseteq X^*$ 是 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 相应的坐标泛函. 设 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 令

$$d = \frac{\delta}{4} \left(\frac{2^{1-\frac{p}{q}}}{2^{\frac{p}{q}} - 1} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \varepsilon = \min \left\{ \frac{A}{2}, \frac{A}{4} \left(\frac{d}{B^{\frac{1}{p}} + \frac{\delta}{2}} \right)^p \right\}, \quad c = \frac{\delta}{4} \varepsilon^{-\frac{1}{p}}.$$

对每个 $m \in \mathbb{N}$, 令 $\varepsilon_m = 2^{-m} \varepsilon$, $a_{2m-1} = a_{2m} = c(2^{-\frac{1}{q}})^{m+1}$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m &= \varepsilon, \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m < \infty, \\ \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^q \right)^{\frac{p}{q}} &= \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} c^q 2^{-(m+1)} \right)^{\frac{p}{q}} = c^p, \end{aligned}$$

且

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} c^p (2^{-\frac{p}{q}})^{m+1} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2^{1-\frac{p}{q}}}{2^{\frac{p}{q}} - 1} \right)^{\frac{1}{p}} c = \left(\frac{2^{1-\frac{p}{q}}}{2^{\frac{p}{q}} - 1} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\delta}{4} \varepsilon^{-\frac{1}{p}} = d \varepsilon^{-\frac{1}{p}}.$$

重复应用引理 3.1 可得到序列 $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ 和 $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ 满足 $n_{m-1} < k_m < n_m$, 使得

$$\sum_{n \notin \sigma_m} |e_{k_m}^*(x_n)|^p < \varepsilon_m,$$

其中 $\sigma_m = \{n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$, $n_0 = 0$. 令

$$x^* = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e_{k_m}^*, \quad y^* = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} a_m e_{k_m}^*.$$

对每个 $m \in \mathbb{N}$ 和每个 $n \in \sigma_m$, 有

$$x^*(x_n) = a_m e_{k_m}^*(x_n) + \sum_{l \neq m} a_l e_{k_l}^*(x_n).$$

因而,

$$||x^*(x_n)| - |a_m e_{k_m}^*(x_n)|| \leq |x^*(x_n) - a_m e_{k_m}^*(x_n)| = \left| \sum_{l \neq m} a_l e_{k_l}^*(x_n) \right|.$$

在上式中对 σ_m 中的所有 n 求和, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \sigma_m} ||x^*(x_n)| - |a_m e_{k_m}^*(x_n)|| &\leq \sum_{n \in \sigma_m} \left| \sum_{l \neq m} a_l e_{k_l}^*(x_n) \right|^p \\ &\leq \sum_{n \in \sigma_m} \left(\left(\sum_{l \neq m} a_l^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{l \neq m} |e_{k_l}^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^q \right)^{\frac{p}{q}} \sum_{n \in \sigma_m} \sum_{l \neq m} |e_{k_l}^*(x_n)|^p \\
&= c^p \sum_{n \in \sigma_m} \sum_{l \neq m} |e_{k_l}^*(x_n)|^p.
\end{aligned}$$

再在上式中对所有 m 求和, 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} ||x^*(x_n)| - |a_m e_{k_m}^*(x_n)||^p \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} c^p \sum_{n \in \sigma_m} \sum_{l \neq m} |e_{k_l}^*(x_n)|^p = c^p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} \sum_{l \neq m} |e_{k_l}^*(x_n)|^p \\
&= c^p \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m \neq l} \sum_{n \in \sigma_m} |e_{k_l}^*(x_n)|^p = c^p \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n \notin \sigma_l} |e_{k_l}^*(x_n)|^p \\
&\leq c^p \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l = c^p \varepsilon = \left(\frac{\delta}{4} \right)^p.
\end{aligned}$$

同理可证

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} ||y^*(x_n)| - |a_m e_{k_m}^*(x_n)||^p \leq \left(\frac{\delta}{4} \right)^p.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_{\Phi}(x^*) - \mathcal{A}_{\Phi}(y^*)\|_p &= \|\{ |x^*(x_n)| \}_{n=1}^{\infty} - \{ |y^*(x_n)| \}_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} ||x^*(x_n)| - |y^*(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} ||x^*(x_n)| - |y^*(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} ||x^*(x_n)| - |a_m e_{k_m}^*(x_n)| + |a_m e_{k_m}^*(x_n)| - |y^*(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} ||x^*(x_n)| - |a_m e_{k_m}^*(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} ||y^*(x_n)| - |a_m e_{k_m}^*(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta.
\end{aligned}$$

对任意 $|\alpha| = 1$, 有

$$x^* - \alpha y^* = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (1 - \alpha(-1)^{m+1}) e_{k_m}^*,$$

则对任意 $n \in \sigma_m$, 有

$$(x^* - \alpha y^*)x_n = a_m (1 - \alpha(-1)^{m+1}) e_{k_m}^*(x_n) + \sum_{l \neq m} a_l (1 - \alpha(-1)^{l+1}) e_{k_l}^*(x_n).$$

故

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} |(x^* - \alpha y^*)x_n - a_m (1 - \alpha(-1)^{m+1}) e_{k_m}^*(x_n)|^p$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} \left| \sum_{l \neq m} a_l (1 - \alpha(-1)^{l+1}) e_{k_l}^*(x_n) \right|^p \\
 &\leq c^p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} \sum_{l \neq m} |1 - \alpha(-1)^{l+1}|^p |e_{k_l}^*(x_n)|^p \\
 &= c^p \sum_{l=1}^{\infty} |1 - \alpha(-1)^{l+1}|^p \sum_{n \notin \sigma_l} |e_{k_l}^*(x_n)|^p \\
 &\leq c^p \sum_{l=1}^{\infty} 2^p \varepsilon_l = \left(\frac{\delta}{4}\right)^p \varepsilon^{-1} 2^p \varepsilon = \left(\frac{\delta}{2}\right)^p.
 \end{aligned}$$

由于 $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 上的 p - 框架且有 p - 框架界 A 和 B , 则

$$\begin{aligned}
 \|x^* - \alpha y^*\| &\geq B^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(x^* - \alpha y^*)x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = B^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} |(x^* - \alpha y^*)x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\geq B^{-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} |a_m(1 - \alpha(-1)^{m+1})e_{k_m}^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} |(x^* - \alpha y^*)x_n - a_m(1 - \alpha(-1)^{m+1})e_{k_m}^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
 &\geq B^{-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} |a_m(1 - \alpha(-1)^{m+1})e_{k_m}^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \frac{\delta}{2} \right).
 \end{aligned}$$

对任意 m , 由于

$$\sum_{n \in \sigma_m} |e_{k_m}^*(x_n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |e_{k_m}^*(x_n)|^p - \sum_{n \notin \sigma_m} |e_{k_m}^*(x_n)|^p \geq A \|e_{k_m}^*\|^p - \varepsilon_m \geq A - \varepsilon \geq \frac{A}{2},$$

因此,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \sigma_m} |a_m(1 - \alpha(-1)^{m+1})e_{k_m}^*(x_n)|^p \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} |a_m(1 - \alpha(-1)^{m+1})|^p \left(\sum_{n \in \sigma_m} |e_{k_m}^*(x_n)|^p \right) \\
 &\geq \frac{A}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m(1 - \alpha(-1)^{m+1})|^p \\
 &= \frac{A}{2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{2l-1}^p |1 - \alpha|^p + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}^p |1 + \alpha|^p \right) \\
 &= \frac{A}{2} (|1 - \alpha|^p + |1 + \alpha|^p) \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{2l-1}^p \right) \\
 &\geq \frac{A}{2} \frac{2}{2^p} (|1 - \alpha| + |1 + \alpha|)^p \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \right) \\
 &\geq \frac{A}{4} d^p \varepsilon^{-1}.
 \end{aligned}$$

因而,

$$\|x^* - \alpha y^*\| \geq B^{-\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{A}{4\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} d - \frac{\delta}{2} \right) \geq 1.$$

所以, $\inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| \geq 1$. $\square$

本节最后说明在无限维 Banach 空间上, 通过有限维空间足够好的逼近, 即按照下述定理叙述的方式, 可得到可相位恢复 p - 框架的稳定性结果.

定理 3.3 设 X 是无限维 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\Phi = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 上的 p - 框架且有 p - 框架界 A 和 B . 对每个 $m \in \mathbb{N}$, 设 Y_m 是 X^* 的有限维子空间, 满足 $\dim(Y_{m+1}) > \dim(Y_m)$, 并设 P_m 是从 X^* 到 Y_m 上的一个投影算子. 假设存在单调递增的正的函数 $f(m)$, 满足 $\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \infty$, 使得对任意 m 和任意 $x^*, y^* \in Y_m$, 有

$$\inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| \leq f(m) \|\mathcal{A}_\Phi(x^*) - \mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p.$$

对 $r > 1$ 和 $R > 0$, 令

$$\mathcal{B}_r(R) = \{x^* \in X^* : \text{对任意 } m \in \mathbb{N}, \|x^* - P_m x^*\| \leq [f(m+1)]^{-r} R \|x^*\|\},$$

则存在 C (仅与 A 、 B 、 r 和 R 有关), 使得对任意 $x^*, y^* \in \mathcal{B}_r(R)$, 有

$$\inf_{|\alpha|=1} \|x^* - \alpha y^*\| \leq C(1 + \|\mathcal{A}_\Phi(x^*)\|_p + \|\mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p) \|\mathcal{A}_\Phi(x^*) - \mathcal{A}_\Phi(y^*)\|_p^{\frac{r-1}{r}}.$$

证明 类似文献 [15, 定理 2.7] 可证得结论. $\square$

注 3.1 定理 3.3 说明在 $\mathcal{B}_r(R)$ 上, $\mathcal{A}_\Phi$ 有“下 Hölder 型界”, 但是否有下 Lipschitz 界仍未知.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341–366
- 2 Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y. Painless nonorthogonal expansions. J Math Phys, 1986, 27: 1271–1283
- 3 Casazza P G, Han D, Larson D R. Frames for Banach spaces. Contemp Math, 1999, 247: 149–182
- 4 Casazza P G. The art of frame theory. Taiwanese J Math, 2000, 4: 129–201
- 5 Han D, Larson D R. Frames, Bases and Group Representations. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 147. Providence: Amer Math Soc, 2000
- 6 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2003
- 7 Casazza P G, Tremain J C. The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering. Proc Natl Acad Sci USA, 2006, 103: 2032–2039
- 8 Han D, Larson D R, Liu B, et al. Operator-Valued Measures, Dilations, and the Theory of Frames. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 229. Providence: Amer Math Soc, 2014
- 9 Grochenig K. Describing functions: Atomic decompositions versus frames. Monatsh Math, 1991, 112: 1–42
- 10 Aldroubi A, Sun Q, Tang W S. p -frames and shift invariant subspaces of L^p . J Fourier Anal Appl, 2001, 7: 1–22
- 11 Christensen O, Stoeva D T. p -frames in separable Banach spaces. Adv Comput Math, 2003, 18: 117–126
- 12 Casazza P G, Christensen O, Stoeva D T. Frame expansions in separable Banach spaces. J Math Anal Appl, 2005, 307: 710–723
- 13 Liu B, Liu R, Zheng B T. Parseval p -frames and the Feichtinger conjecture. J Math Anal Appl, 2015, 424: 248–259
- 14 Balan R. Stability of phase retrievable frames. In: Wavelets and Sparsity XV. Proceedings of SPIE, vol. 8858. Bellingham: SPIE, 2013, 88580H
- 15 Cahill J, Casazza P G, Daubechies I. Phase retrieval in infinite-dimensional Hilbert spaces. Trans Amer Math Soc Ser B, 2016, 3: 63–76

Stability of phase retrievable p -frames

Liqiong Lin, Yunnan Zhang & Biqiong Cai

Abstract The phase retrieval problem presents itself in many applications in physics and engineering. Let X be a Banach space and $1 < p < \infty$. Let $\Phi = \{x_n\}_{n \in I}$ be a p -frame for X . We say Φ is phase retrievable, if the equalities $|x^*(x_n)| = |y^*(x_n)|$ for every $n \in I$ imply that there exists $|\alpha| = 1$ so that $x^* = \alpha y^*$ for any $x^*, y^* \in X^*$. In this paper, we prove that phase retrieval is always stable for p -frames in finite-dimensional Banach spaces and it is never uniformly stable for p -frames in an infinite-dimensional Banach space X with a Schauder basis. We establish that stable phase retrieval is possible for the elements of X^* that can be approximated sufficiently well by finite-dimensional expansion.

Keywords Banach spaces, p -frames, phase retrieval

MSC(2020) 46B20, 42C15

doi: 10.1360/SSM-2020-0033