

基于基矩阵排列优化算法的非规则准循环低密度奇偶校验码构造

赵辉^{*①} 余孟洁^① 安静^① 邝凯达^① 吕典楷^① 刘媛妮^②

^①(重庆邮电大学通信与信息工程学院 重庆 400065)

^②(重庆邮电大学网络空间安全与信息法学院 重庆 400065)

摘要: 为了提升非规则准循环低密度奇偶校验(QC-LDPC)码的误码率性能、降低构造算法的复杂度, 该文提出一种基于基矩阵排列优化算法的非规则QC-LDPC码构造方法。首先, 利用基于外部信息传递(EXIT)图的阈值分析算法得到满足码率和列重要求的非规则QC-LDPC码的最优度分布, 然后将围长和短环数量作为新的约束条件对具有最优度分布的码集进行分析, 得到具有最优度分布和最少短环数量的最优基矩阵排列结构, 最后, 根据得到的基矩阵对规则指数矩阵进行置零操作得到目标非规则QC-LDPC码。该构造方法相对于随机构造方法具有更低的实现复杂度, 同时可以通过改变算法的参数值实现码长和码率的灵活设计。仿真结果表明, 与现有的一些构造方法相比, 所提方法构造的非规则QC-LDPC码在加性高斯白噪声(AWGN)信道上具有更好的误码率性能。

关键词: 准循环低密度奇偶校验码; 非规则; 基矩阵排列优化算法; 围长; 外部信息传递

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2023)04-1219-08

DOI: [10.11999/JEIT220075](https://doi.org/10.11999/JEIT220075)

Irregular Quasi Cyclic Low Density Parity Check Code Construction Based on Basis Matrix Arrangement Optimization Algorithm

ZHAO Hui^① YU Mengjie^① AN Jing^① KUANG Kaida^①

LÜ Diankai^① LIU Yuanni^②

^①(School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

^②(School of Cyber Security and Information Law, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: In order to improve the bit error rate performance of the irregular Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check (QC-LDPC) codes and reduce the complexity of the construction algorithm, an optimization algorithm based on basis matrix arrangement is proposed. Firstly, the optimal degree distribution of irregular QC-LDPC codes satisfying the code rate and column weight requirements is obtained by using the threshold analysis algorithm based on EXtrinsic Information Transfer (EXIT) chart. Then by using the girth and the number of short-cycles as new indicators, a class of codes with the same optimal degree distribution is analyzed. The basic matrix arrangement structure with the optimal degree distribution and the least number of short-cycles is obtained. Finally, according to the obtained base matrix, the corresponding zeroing operation is performed on the regular index matrix to obtain the target irregular QC-LDPC code. Compared with the random construction method, the proposed construction method has lower implementation complexity. At the same time, the code length and code rate can be flexibly changed by changing the parameter values of the algorithm. Simulation results show that, compared with some existing construction methods, the irregular QC-LDPC codes constructed by the proposed method have better bit error rate performance on Additive White Gaussian Noise (AWGN) channels.

Key words: Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check (QC-LDPC) code; Irregular; Basis matrix arrangement optimization algorithm; Girth; EXtrinsic Information Transfer (EXIT)

收稿日期: 2022-01-18; 改回日期: 2022-10-05; 网络出版: 2022-10-14

*通信作者: 赵辉 zhaohui@cqupt.edu.cn

基金项目: 重庆市自然科学基金面上项目(cstc2020jcyj-msxmX1021), 重庆市教委科学技术研究项目(KJZD-K202000602)

Foundation Items: The General Program of Natural Science Foundation of Chongqing (cstc2020jcyj-msxmX1021), The Science and Technology Research Program of Chongqing Municipal Education Commission (KJZD-K202000602)

1 引言

低密度奇偶校验(Low Density Parity Check, LDPC)码是Gallager博士^[1]在1963年提出的一类具有稀疏奇偶校验矩阵结构的线性分组码, 不仅具有逼近香农(Shannon)极限的良好性能, 且译码复杂度较低, 结构灵活, 因此成为近年信道编码领域的研究热点。准循环低密度奇偶校验(Quasi Cyclic Low Density Parity Check, QC-LDPC)码是LDPC码的一个子类^[2], 由于准循环结构大大降低了编译码实现对硬件存储空间的要求而被广泛关注。

根据校验矩阵中的权重是否一致, QC-LDPC码可以被分为规则QC-LDPC码和非规则QC-LDPC码。非规则QC-LDPC码由于具有更灵活的度分布设计, 可以得到比规则QC-LDPC码更优异的误码率性能^[3]。目前已有大量文献对非规则QC-LDPC码的构造方法进行了研究, 结果表明围长、短环数量和度分布是影响码字译码性能的重要因素^[4]。文献^[5]提出了一种基于外部信息度最大化准则的非规则QC-LDPC码构造方法, 但由于该方法是基于渐进式边缘增长(Progressive Edge Growth, PEG)算法进行贪婪式搜索, 因此并不能保证算法一定成功。文献^[6]提出了一种联合优化的非规则QC-LDPC码构造方法, 但并没有考虑度分布对码字性能的影响, 同时由于其检测算法的复杂度会随着被检环长的增加呈指数趋势增长, 因此该构造算法仅适用于较小阵列大小的非规则QC-LDPC码的构造。2021年, Karimi等人^[7]提出了一种基于原模图的不规则QC-LDPC码构造, 该方法详细分析了无叶基本陷阱集(Leafless Elementary Trapping Sets, LETSs)和度分布对码字性能的影响, 但并没有考虑相同度分布下基矩阵的不同结构对码字性能的影响, 同时其利用搜索算法实现指数矩阵的设计相比结构化构造方法在复杂度上存在一定局限性。

针对上述分析, 本文提出一种基于最优度分布的基矩阵排列优化算法对非规则QC-LDPC码进行构造。本构造方法在寻求最优度分布的基础上确保目标码字的围长最大化、短环数量最小化, 基于文献^[7]中存在的不足, 还详细分析了相同度分布下基矩阵不同排列结构对码字性能的影响, 从而进一步提升非规则QC-LDPC码的译码性能。

2 非规则QC-LDPC码

一个 (n, k) QC-LDPC码可以由坦纳(Tanner)图和唯一对应的奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$ 分别进行描述。QC-LDPC码的奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$ 可以表示为^[8]

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I(p_{1,1}) & I(p_{1,2}) & \cdots & I(p_{1,L}) \\ I(p_{2,1}) & I(p_{2,2}) & \cdots & I(p_{2,L}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(p_{J,1}) & I(p_{J,2}) & \cdots & I(p_{J,L}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, $-1 \leq p_{j,l} \leq P-1$ ($1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L$) 为循环移位值, 代表大小为 $P \times P$ 的单位矩阵 $\mathbf{I}_{P \times P}$ 中每个元素向左循环移位的位数, P 为膨胀值^[9]。当所有 $p_{j,l}$ 均为非负数时, 奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$ 为规则QC-LDPC码, 否则为非规则QC-LDPC码。在Tanner图中, 与变量节点、校验节点相连的边的数量分别称为对应变量节点、校验节点的度^[10]。设在所有变量节点和校验节点中度的最大值分别为 d_v 和 d_c , 则非规则QC-LDPC码的度分布多项式为^[11]: $\lambda(x) = \sum_{i=1}^{d_v} \lambda_i x^{i-1}$ 和 $\rho(x) = \sum_{j=1}^{d_c} \rho_j x^{j-1}$, 其中 $\lambda(x)$ 和 $\rho(x)$ 分别为变量节点和校验节点的度分布多项式, λ_i 表示与度为 i 的变量节点相连的边数占总边数的比例, 同理 ρ_j 表示与度为 j 的校验节点相连的边数占总边数的比例, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $0 \leq \rho_j \leq 1$, 且 $\lambda(1) = \sum_{i=1}^{d_v} \lambda_i = 1$, $\rho(1) = \sum_{j=1}^{d_c} \rho_j = 1$ 。

将奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$ 中的每个CPM用对应的移位系数值进行替换, 得到的矩阵称为QC-LDPC码的指数矩阵

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,L} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{J,1} & p_{J,2} & \cdots & p_{J,L} \end{bmatrix} \quad (2)$$

当存在 $p_{j,l} = -1$ 时, 指数矩阵 $\mathbf{E}$ 为非规则指数矩阵, 反之为规则指数矩阵。若指数矩阵 $\mathbf{E}$ 中存在一组元素 $\{p_1, p_2, \dots, p_{2k-1}, p_{2k}\}$ 满足 p_i 和 p_{i+1} 在同一列或同一行, p_i 和 p_{i+2} 在不同列和不同行, 且 $\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} p_i \equiv 0 \pmod{P}$, 则说明指数矩阵 $\mathbf{E}$ 中存在一个长为 $2k$ 的环, 其中 mod 为取模运算符, 算法和取余运算相似。经膨胀值 P 得到的QC-LDPC码中将存在至多 P 个相同长度的环, 此环在Tanner图中对应 $2k$ 个首尾相接的边形成的闭合环路^[12]。进一步将指数矩阵 $\mathbf{E}$ 中的移位系数值“-1”用“0”替换, 其余元素用“1”替换, 得到的矩阵为QC-LDPC码的基矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,L} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{J,1} & b_{J,2} & \cdots & b_{J,L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, $b_{j,l} \in (0, 1)$ ($1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L$)。基矩阵能更直观地反映QC-LDPC码的度分布情况, 另一方

面, 由于基矩阵 $\mathbf{B}$ 具有与指数矩阵 $\mathbf{E}$ 和奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$ 相同的度分布, 对基矩阵的设计在一定程度上决定了非规则QC-LDPC码的译码性能, 因此本文将基矩阵 $\mathbf{B}$ 作为目标矩阵, 从度分布和围长两方面进行分析从而实现非规则QC-LDPC码的构造。

3 基于基矩阵排列优化算法的非规则QC-LDPC码构造

3.1 基于度分布多项式对的EXIT图阈值分析

外部信息传递(EXtrinsic Information Transfer, EXIT)图是Stephan^[13]提出的一种LDPC码性能分析理论工具, 通过EXIT图分析可以得到LDPC码的收敛阈值。LDPC码的译码过程可以等效为一个并行级联码迭代译码过程, 如图1所示^[14]。

在二进制相移键控-加性高斯白噪声(Binary Phase Shift Keying-Additive White Gaussian Noise, BPSK-AWGN)信道上, 假设变量节点译码器(Variable Node Decoder, VND)和校验节点译码器(Check Node Decoder, CND)的先验信息分别为 $I_{A,VND}$, $I_{A,CND}$, 信道软信息值的方差为 $\sigma_{ch}^2 = 8RE_b/N_0$, 其中 R 为码率, 则度为 d_v 的变量节点和度为 d_c 的校验节点的外部信息转移函数为

$$I_{E,VND}(I_{A,VND}, d_v, E_b/N_0, R) = J\left(\sqrt{(d_v-1)[J^{-1}(I_{A,VND})]^2 + \sigma_{ch}^2}\right) \quad (4)$$

$$I_{E,CND}(I_{A,CND}, d_c) = 1 - J\left(\sqrt{(d_c-1) \cdot J^{-1}(1 - I_{A,CND})}\right) \quad (5)$$

其中, $J(\cdot)$ 和 $J^{-1}(\cdot)$ 均为一种互信息运算函数, 旨在通过多项式拟合计算得到外部传递值和先验信息之间的平均互信息, 具体介绍参见文献^[14]的附录和文献^[15]。为了能在EXIT图中更加清晰地观察迭代译码器的译码轨迹, 本文将校验节点的外部信息转移函数用其反函数来进行描述

$$I_{A,CND}(I_{E,CND}, d_c) = 1 - J\left(\sqrt{(d_c-1)^{-1}[J^{-1}(1 - I_{E,CND})]^2}\right) \quad (6)$$

由于非规则QC-LDPC码变量节点和校验节点的度数并不唯一, 因此非规则QC-LDPC码的外部信息转移函数为所有变量节点和校验节点对应度数的外部信息转移函数的加权平均

$$I_{E,VND}(I_{A,VND}, d_v, E_b/N_0, R) = \sum_{i=1}^{d_{vmax}} d_{vi} J\left(\sqrt{(d_v-1)[J^{-1}(I_{A,VND})]^2 + \sigma_{ch}^2}\right) \quad (7)$$

$$I_{A,CND}(I_{E,CND}, d_c) = \sum_{j=1}^{d_{cmax}} d_{cj} \left(1 - J\left(\sqrt{(d_c-1)^{-1}[J^{-1}(1 - I_{E,CND})]^2}\right)\right) \quad (8)$$

由上述分析可知, 在非规则QC-LDPC码的度分布多项式对已知的前提下, 可以利用式(7)和式(8)得到非规则QC-LDPC码在迭代译码过程中的所有外部互信息值, 从而通过绘制EXIT图来分析码字的收敛行为并得到收敛阈值。也就是说, 若能找到非规则QC-LDPC码在某一约束条件下所有度分布对应的收敛阈值, 则可以通过寻找最小收敛阈值对应的度分布得到该约束条件下的最优度分布, 这为QC-LDPC码的收敛性能分析提供了有力的理论支撑。

3.2 度分布多项式对的确定

为了利用EXIT图对非规则QC-LDPC码的收敛阈值进行分析, 首先需要得到非规则QC-LDPC码的度分布多项式对。由于基矩阵 $\mathbf{B}$ 具有与奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$ 相同的度分布, 并且基矩阵 $\mathbf{B}$ 的阵列远小于奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$, 因此通过分析基矩阵 $\mathbf{B}$ 的度分布来分析非规则QC-LDPC码的度分布是一种等效且更为简单的方式。考虑一个大小为 3×5 的基矩阵

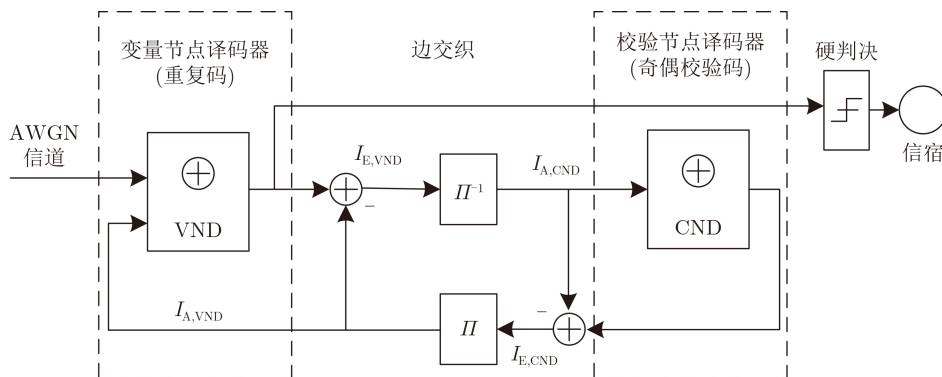


图1 LDPC码的并行级联迭代译码过程

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

变量节点的度分别为2和3, 校验节点的度恒为5, 则基矩阵 $\mathbf{B}$ 的度分布多项式对为 $\lambda(x) = \frac{6}{15}x + \frac{9}{15}x^2$ 和 $\rho(x) = x^4$ 。由此可以看出, 对于度分布多项式来说, 变量 x 的指数为对应节点度数值 $d_{c,v} - 1$, 系数值的分母为基矩阵 $\mathbf{B}$ 中元素“1”的总数, 分子为所有度为 $d_{c,v}$ 的变量节点或校验节点中元素“1”的总数, 且系数值之和为1。对于一个非规则QC-LDPC码来说, 行权重分布对收敛阈值的影响非常小, 并且非规则行权重分布会导致更高的实现代价和算法复杂度, 因此本文仅考虑规则行重约束条件下非规则QC-LDPC码的度分布优化设计。由于根据基矩阵结构计算度分布多项式对是一个单独而耗时的的工作, 为了解决这一问题, 提出一种基于度分布多项式对的生成算法, 用于提升整个构造方法的时效性, 算法流程如算法1所示。

根据算法1可以得到任意大小基矩阵结构的度分布多项式对, 尤其适用于基矩阵 $\mathbf{B}$ 的列权重值集合基数大于2的情况。特别地, 当基矩阵 $\mathbf{B}$ 的列权

算法1 基于基矩阵结构的度分布多项式对生成算法

输入: 基矩阵 $\mathbf{B}$
 输出: 变量节点度分布多项式 $\lambda(x)$, 校验节点度分布多项式 $\rho(x)$

- (1) 基矩阵列数 $L = \text{size}(\mathbf{B}, 1)$, 基矩阵行数 $J = \text{size}(\mathbf{B}, 2)$
- (2) for $i = 1$ to L
- (3) for $j = 1$ to J
- (4) if $b_{i,j} = 1$
- (5) 保存当前列的列重, $\text{col}(i) = \text{col}(i) + 1$
- (6) end
- (7) end
- (8) end
- (9) for $j = 1$ to J
- (10) for $i = 1$ to L
- (11) if $b_{i,j} = 1$
- (12) 保存当前行的行权重, $\text{row}(j) = \text{row}(j) + 1$
- (13) end
- (14) end
- (15) end
- (16) 根据列权重记录值计算变量节点的度分布多项式:

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^L \left(\text{col}(i) / \sum_{i=1}^L \text{col}(i) \right) x^{\text{col}(i)-1}$$
- (17) 根据行权重记录值计算校验节点的度分布多项式:

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^J \left(\text{row}(j) / \sum_{j=1}^J \text{row}(j) \right) x^{\text{row}(j)-1}$$

重值集合基数等于2时, 可以通过统一性公式直接得到非规则QC-LDPC码的度分布多项式对。假设一个大小为 $J \times L$ 的基矩阵 $\mathbf{B}$ 的列权重值集合基数等于2, 变量节点度数分别为 d_{v1} 和 d_{v2} , 对应的变量节点个数分别为 a 和 $(L - a)$, 校验节点度数恒为一个常数, 则基矩阵 $\mathbf{B}$ 的度分布多项式对为

$$\lambda(x) = \frac{d_{v1} \cdot a}{d_{v1} \cdot a + d_{v2} \cdot (L - a)} x^{d_{v1}-1} + \frac{d_{v2} \cdot (L - a)}{d_{v1} \cdot a + d_{v2} \cdot (L - a)} x^{d_{v2}-1} \quad (10)$$

$$\rho(x) = \frac{(J - d_{v1}) \cdot [(L - a) + \lfloor \frac{d_{v1} \cdot a}{J} \rfloor]}{d_{v1} \cdot a + d_{v2} \cdot (L - a)} \cdot x^{(L-a) + \lfloor \frac{d_{v1} \cdot a}{J} \rfloor - 1} + \frac{d_{v1} \cdot [(L - a) + \lfloor \frac{d_{v1} \cdot a}{J} \rfloor] + \lceil \frac{a \bmod \varepsilon}{a} \rceil}{d_{v1} \cdot a + d_{v2} \cdot (L - a)} \cdot x^{(L-a) + \lfloor \frac{d_{v1} \cdot a}{J} \rfloor + \lceil \frac{a \bmod \varepsilon}{a} \rceil - 1} \quad (11)$$

其中, $\varepsilon = k \cdot J / d_{v1}$, k 为使 ε 取整数的最小正整数。由于基矩阵 $\mathbf{B}$ 的变量节点的最大度数存在约束条件 $1 \leq d_{v\max} \leq J$, 且行数 J 通常为一个较小的值, 所以当基矩阵 $\mathbf{B}$ 的列权重集合基数为2时, 推导度分布多项式对的统一性公式对增加构造算法的实现可能性具有重要意义。

3.3 规则指数矩阵的设计

在基于置零操作的非规则QC-LDPC码的构造过程中, 规则指数矩阵的设计同样是影响码字译码性能的重要环节。为了确保构造的非规则QC-LDPC码的围长最大化, 本节提出一种基于广义等差数列的规则指数矩阵构造方法。广义等差数列是指所有偶数位上的值与其前一位奇数位上的值之差满足等差数列定义的一组整数数列, 由于广义等差数列中的元素具有差值不等性, 经演绎推理得到规则指数矩阵中的移位系数值可以由式(12)进行描述

$$p_{j,l} = a_1 + j(j-1) + \frac{1}{2}(2j-1)(l^2 - l) \quad (12)$$

其中, $1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L$, a_1 代表指数矩阵第1行第1列位置的初始值。例如将 $J = 3, L = 5, a_1 = 1$ 代入式(12), 将 $(j, l) = (1, 2)$ 作为初始坐标, 得到的规则指数矩阵为

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 11 & 16 \\ 6 & 12 & 21 & 33 & 48 \\ 12 & 22 & 37 & 57 & 82 \end{bmatrix} \quad (13)$$

且指数矩阵 $\mathbf{E}_0$ 中不存在长度为4和长度为6的短环结构, 能保证围长至少为8, 具有大围长性质, 证明过程见附录1和附录2。在这样的规则指数矩阵上进行置零操作, 能保证得到的非规则QC-LDPC码的

短环数量只会更少不会增加，因此构造的非规则QC-LDPC码也具有大围长性质。

3.4 基于最优度分布的基矩阵排列优化算法

非规则QC-LDPC码的基矩阵设计包括确定列度分布以及构建基矩阵，其中构建基矩阵是在确定列度分布之后进行的。研究表明，在列度分布相同的基矩阵中，不同列的随机排列对码字译码性能的影响较小。但基于本文构造方法的特殊性，在列度分布相同的基矩阵 $\mathbf{B}$ 中，不同列的随机排列会严重影响置零操作后的非规则指数矩阵的短环数量和围长。因此，本文提出一种基于最优度分布的基矩阵排列优化算法，用于确定具有相同列度分布下基矩阵的最佳排列结构，从而保证非规则QC-LDPC码具有最优度分布，同时使码字的围长最大化，短环数量最小化。算法的具体步骤如下：

步骤1 获取输入参数：基矩阵行数 J ，列数 L ，列权重集合 $\mathbf{D}_v$ ，信噪比 E_b/N_0 以及变量节点译码器的先验信息 $I_{A,VND}$ ，初始化阈值 $\text{thresholds} = \infty$ 。

步骤2 将列权重集合 $\mathbf{D}_v$ 作为约束条件构造大小为 $J \times L$ 的基矩阵，根据算法1或者式(10)和式(11)计算当前基矩阵 $\mathbf{B}$ 的度分布多项式对。

步骤3 根据信噪比 E_b/N_0 计算当前归一化信噪比初始值及信道软信息值的方差 σ_{ch}^2 ，同时根据先验信息 $I_{A,VND}$ 以及式(7)和式(8)计算变量节点和校验节点译码器的输入外部信息 $I_{E,VND}$ 和 $I_{A,CND}$ ，以固定步长逐渐增加归一化信噪比的值，当 $I_{E,VND} \geq I_{A,CND}$ 时，比较当前归一化信噪比与阈值 thresholds 的大小，将较小值作为新的阈值并记录对应基矩阵 $\mathbf{B}$ 的度分布，执行步骤2。

步骤4 若存在新的以列权重集合 $\mathbf{D}_v$ 作为约束条件的大小为 $J \times L$ 的基矩阵，执行步骤3；否则，记录当前基矩阵度分布为列权重集合 $\mathbf{D}_v$ 约束条件下的最优度分布，执行步骤5。

步骤5 将最优度分布作为新的约束条件，构造大小为 $J \times L$ 的基矩阵 $\mathbf{B}_0$ ，将规则指数矩阵 $\mathbf{E}_0$ 与基矩阵 $\mathbf{B}_0$ 进行置零操作得到非规则指数矩阵 $\mathbf{E} = \mathbf{B}_0 * \mathbf{E}_0$ ，计算并记录当前指数矩阵 $\mathbf{E}$ 及其各短环数量和围长值，若存在新的以最优度分布为约束条件且大小为 $J \times L$ 的基矩阵 $\mathbf{B}_0$ ，执行步骤5；否则执行步骤6。

步骤6 记录步骤5中围长最大的指数矩阵对应的基矩阵排列结构及其对应的各短环数量，在围长相同的情况下选取短环数量更少的指数矩阵对应的基矩阵作为输出，算法结束。

为了对本文所提整个构造方法进行说明，将 $J = 4, L = 8, a_1 = 0$ ，初始坐标 $(j, l) = (1, 1)$ 代入式(12)，得到规则指数矩阵

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 16 & 21 & 29 \\ 2 & 5 & 11 & 20 & 32 & 47 & 65 & 86 \\ 6 & 11 & 22 & 36 & 56 & 81 & 111 & 146 \\ 12 & 20 & 34 & 54 & 83 & 117 & 159 & 208 \end{bmatrix} \quad (14)$$

同时将 $J = 4, L = 8$ ，列权重集合 $\mathbf{D}_v = \{2, 4\}$ 代入上述算法，得到最优度分布多项式对为 $\lambda(x) = 1/3x + 2/3x^3, \rho(x) = x^5$ ，在上式所示的规则指数矩阵下，基矩阵的最优排列为

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

最后根据规则指数矩阵 $\mathbf{E}_0$ 和基矩阵 $\mathbf{B}_0$ 得到非规则指数矩阵 $\mathbf{E}$ ，将非规则指数矩阵 $\mathbf{E}$ 扩展 P 倍即为目标非规则QC-LDPC码。

由上述分析可知，基于基矩阵排列优化算法得到的基矩阵与规则指数矩阵 $\mathbf{E}_0$ 的设计密切相关。对于大小完全相同的规则指数矩阵，不同的移位系数值设计将会得到不同的基矩阵最优排列。虽然规则指数矩阵的设计对构造非规则QC-LDPC码很重要，但基矩阵的度分布多项式和对应的排列结构更会对非规则QC-LDPC码的性能产生决定性的作用。基矩阵排列优化算法能保证在利用置零操作法构造非规则QC-LDPC码的同时，由同一规则指数矩阵得到的非规则QC-LDPC码的围长更大且短环数量更少，从而提升码字的译码性能。

4 仿真与性能分析

本节对根据同一规则指数矩阵得到的不同非规则QC-LDPC码以及文献[6-8]中提出的非规则QC-LDPC码分别进行了蒙特卡罗仿真，并对仿真结果进行了比较。仿真环境设置如下：加扰噪声为AWGN，调制方式为BPSK调制，译码算法采用对数似然比置信传播(Log-Likelihood Ratio Belief Propagation, LLR-BP)译码算法，最大迭代次数设置为50次，错误码组数为每个信噪比下不小于100组。

4.1 基矩阵排列结构分析

为了说明在相同度分布多项式对下，基矩阵的不同排列对非规则QC-LDPC码性能的影响，将3.4节的 $\mathbf{E}_0$ 作为规则指数矩阵，膨胀值 $P = 256$ ，根据不同的基矩阵排列结构构造非规则QC-LDPC码，基矩阵部分排列结构及其对应的各短环数量和仿真结果分别如表1和图2所示。由于非规则QC-LDPC码的短环数量会随着膨胀值 P 的改变而变化，为了增加全文的可读性，这里用膨胀值 P 对短环数量进行表示，此外，由于根据基矩阵结构 $\mathbf{B}_4$

表1 相同规则指数矩阵下基矩阵不同排列对应的各短环数量

基矩阵	6-cycle	8-cycle	10-cycle	基矩阵	6-cycle	8-cycle	10-cycle
$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	$33P$	$123P$	$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	$16P$	$59P$
$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	$23P$	$115P$	$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	$17P$	$55P$

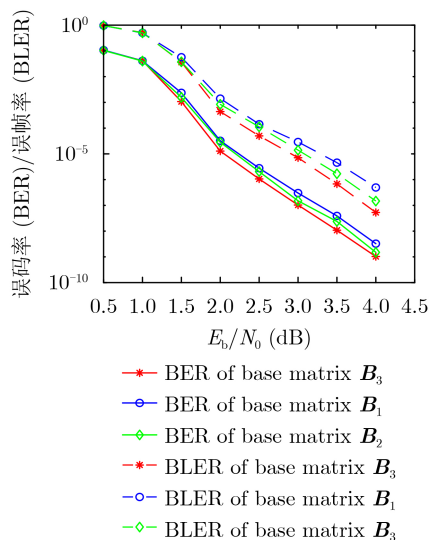


图2 基矩阵不同排列对应的非规则QC-LDPC码的BER性能比较

和 B_3 得到的误码率仿真结果相近,因此图2仅保留了基矩阵 B_3 的仿真结果。

由图2可知,当规则指数矩阵同为3.4节中的 E_0 所示时,根据基矩阵 B_1 、 B_2 和 B_3 构造的非规则QC-LDPC码的误码率性能有明显差异,当BER为 10^{-8} 时,由于基矩阵结构的选取不同甚至出现了0.3 dB的BER性能差异,结合表1可知,导致不同基矩阵结构出现性能差异的原因实质为短环数量的不同。由此可见,相同规则指数矩阵下采用置零操作对非规则QC-LDPC码进行构造时,具有相同度分布多项式对的基矩阵 B 的不同排列对非规则QC-LDPC码的译码性能影响较大,因此如何选取合适的基矩阵结构对提升非规则QC-LDPC码的译码性能具有重要意义。

4.2 误码率性能仿真

为了验证本文所提构造方法的有效性,以3.4节所示的规则指数矩阵为基础,根据本文所提出的基于最优度分布的基矩阵排列优化算法设计基矩阵结构,构造非规则QC-LDPC码进行性能仿真,为了兼顾各参考文献之间对比的可行性,令 $J=4$, $L=8$,膨胀值 $P=256$,构造的非规则QC-LDPC码长为2048。另外,分别根据文献[6-8]提出的构造

方法构造相同码长的非规则QC-LDPC码并与本文提出的码字进行比较,为了保证仿真结果的可比性,根据参考文献构造的码字的度分布多项式与所提码字的度分布多项式保持一致,只是相同度分布下的基矩阵排列结构和指数矩阵中移位系数值的设计不同,仿真结果如图3所示。

由图3可知,与文献[6-8]提出的码字相比,本文构造的非规则QC-LDPC码在BER为 10^{-8} 时分别实现了约0.4 dB、0.1 dB和0.3 dB的BER性能提升。此外,从图3可以看出,由于本文提出的码字具有最优度分布结构,因此收敛阈值较低,根据对比文献构造的码字由于保持了和所提码字相同的度分布多项式,因此收敛阈值和所提码字的收敛阈值相近。另外,在BER接近 10^{-10} 的时候,“瀑布区”仍然具有很大的倾斜并没有出现错误平层,这很可能是由于所提码字具有大围长性质而导致最小汉明距离(Minimum Hamming Distance, MHD)下界提升的结果。

5 结束语

本文提出一种基于基矩阵排列优化算法的非规则QC-LDPC码构造方法,在具有最优度分布的码字集合中,进一步考虑基矩阵的不同排列对非规则QC-LDPC码性能的影响。首先,通过EXIT图分析得到目标基矩阵下的最优度分布,并将围长和短环数量作为新的约束条件,对具有最优度分布的一

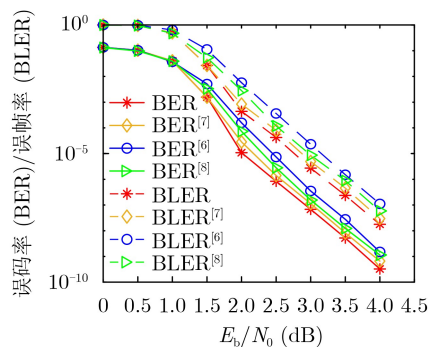


图3 本文构造的(2048,1024)非规则QC-LDPC码与对比文献的码字BER性能比较

类基矩阵结构进行进一步分析,从而得到最优度分布下围长更大且短环数量更少的基矩阵排列结构。其次,将基矩阵 B 与大小相同的规则指数矩阵进行置零操作得到非规则QC-LDPC码的指数矩阵。最后,根据膨胀值 P 扩展非规则指数矩阵得到非规则QC-LDPC码。通过该构造方法得到的非规则QC-LDPC码,由于最优度分布具有较低的收敛阈值和良好的瀑布性能,同时由于大围长性质具有良好的译码能力。仿真结果表明,与现有的一些构造方法相比,本文所提基于基矩阵排列优化算法构造的非规则QC-LDPC码在AWGN信道上表现出更好的误码率性能。

附录1 无4环证明

令 $p_{j_0, l_0} - p_{j_0, l_1} + p_{j_1, l_1} - p_{j_1, l_0} = C_{\text{four}}$, 将式(12)代入其中可得

$$C_{\text{four}} = (j_1 - j_0) [(l_1^2 - l_1) - (l_0^2 - l_0)] \quad (16)$$

由于 $l^2 - l$ 在 $l \geq 1$ 时为单调递增函数, 因此 $C_{\text{four}} > 0$ 。另外, 将 C_{four} 中的 p_{j_0, l_0} 换成 p_{j_1, l_0} 可得

$$C_{\text{four}} < p_{j_1, l_0} - p_{j_0, l_1} + p_{j_1, l_1} - p_{j_1, l_0} < p_{j_1, l_1} < P \quad (17)$$

由不等式性质可知 $0 < C_{\text{four}} < P$, 因此4环结构不存在。

附录2 无6环证明

令 $p_{j_0, l_0} - p_{j_0, l_1} + p_{j_1, l_1} - p_{j_1, l_2} + p_{j_2, l_2} - p_{j_2, l_0} = C_{\text{six}}$ 将式(12)代入 C_{six} 可得

$$C_{\text{six}} = (j_0 - j_2) (l_0^2 - l_0) + (j_1 - j_0) (l_1^2 - l_1) + (j_2 - j_1) (l_2^2 - l_2) \quad (18)$$

将式(18)中的 j_2 换成 j_1 , C_{six} 值减小, 即

$$\begin{aligned} C_{\text{six}} &> (j_0 - j_1) (l_0^2 - l_0) + (j_1 - j_0) (l_1^2 - l_1) \\ &\quad + (j_1 - j_1) (l_2^2 - l_2) \\ &= (j_1 - j_0) [(l_1^2 - l_1) - (l_0^2 - l_0)] > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

同理将 p_{j_0, l_0} 换为 p_{j_2, l_0} 可得

$$\begin{aligned} C_{\text{six}} &= -p_{j_0, l_1} + p_{j_1, l_1} - p_{j_1, l_2} + p_{j_2, l_2} \\ &< p_{j_1, l_2} - p_{j_1, l_2} + p_{j_2, l_2} < P \end{aligned} \quad (20)$$

由不等式性质可知 $0 < C_{\text{six}} < P$, 因此6环结构不存在。

参 考 文 献

- [1] GALLAGER R G. Low-density parity-check codes[J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1962, 8(1): 21–28. doi: 10.1109/TIT.1962.1057683.
- [2] 康婧, 安军社, 王冰冰. 星地高速数传系统低复杂度可重构LDPC编码器设计[J]. *电子与信息学报*, 2021, 43(12): 3727–3734. doi: 10.11999/JEIT200118.
- [3] KANG Jing, AN Junshe, and WANG Bingbing. Low complexity and reconfigurable LDPC encoder for high-speed satellite-to-ground data transmissions[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(12): 3727–3734. doi: 10.11999/JEIT200118.
- [4] 张顺外, 付勇峰. 编码协作系统准循环重复累积码的联合设计与性能分析[J]. *电子与信息学报*, 2021, 43(5): 1298–1305. doi: 10.11999/JEIT190990.
- [5] ZHANG Shunwai and FU Yongfeng. Joint design of QC-RA codes and performance analysis of coded cooperation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(5): 1298–1305. doi: 10.11999/JEIT190990.
- [6] WANG Liqian, WANG Dongdong, NI Yongjing, et al. Design of irregular QC-LDPC code based multi-level coded modulation scheme for high speed optical communication systems[J]. *China Communications*, 2019, 16(5): 106–120. doi: 10.23919/j.cc.2019.05.009.
- [7] KHARIN A, DRYAKHLOV A, MIROKHIN E, et al. Irregular QC-LDPC codes generation based on EMD maximization criterion for protograph[C]. 2020 9th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), Budva, Montenegro, 2020: 1–4. doi: 10.1109/MECO49872.2020.9134365.
- [8] WANG Dongdong, GUO Yantao, WANG Zhihui, et al. PEG based construction of irregular QC-LDPC codes by jointly optimizing the girth and the number and ACE of short cycles[C]. 2019 18th International Conference on Optical Communications and Networks (ICOON), Huangshan, China, 2019: 1–3. doi: 10.1109/ICOON.2019.8934212.
- [9] KARIMI B and BANIHASHEMI A H. Construction of irregular protograph-based QC-LDPC codes with low error floor[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, 69(1): 3–18. doi: 10.1109/TCOMM.2020.3028302.
- [10] WANG Dongdong, WANG Liqian, CHEN Xue, et al. Construction of QC-LDPC codes based on pre-masking and local optimal searching[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(6): 1148–1151. doi: 10.1109/LCOMM.2017.2756640.
- [11] WANG Ruyan, LI Yong, ZHAO Hui, et al. Construction of girth-eight quasi-cyclic low-density parity-check codes with low encoding complexity[J]. *IET Communications*, 2016, 10(2): 148–153. doi: 10.1049/iet-com.2015.0056.
- [12] 徐恒舟, 朱海, 冯丹, 等. 低秩循环矩阵的构造方法及其关联的多元LDPC码[J]. *电子与信息学报*, 2021, 43(1): 85–91. doi: 10.11999/JEIT200351.
- [13] XU Hengzhou, ZHU Hai, FENG Dan, et al. Construction of low-rank circulant matrices and their associated nonbinary LDPC codes[J]. *Journal of Electronics & Information*

- Technology*, 2021, 43(1): 85–91. doi: [10.11999/JEIT200351](https://doi.org/10.11999/JEIT200351).
- [11] HASHEMI Y and BANIHASHEMI A H. Characterization of elementary trapping sets in irregular LDPC codes and the corresponding efficient exhaustive search algorithms[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2018, 64(5): 3411–3430. doi: [10.1109/TIT.2018.2799627](https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2799627).
- [12] SARIDUMAN A, PUSANE A E, and TAŞKIN Z C. On the construction of regular QC-LDPC codes with low error floor[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(1): 25–28. doi: [10.1109/LCOMM.2019.2953058](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2019.2953058).
- [13] TEN BRINK S. Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, 49(10): 1727–1737. doi: [10.1109/26.957394](https://doi.org/10.1109/26.957394).
- [14] TEN BRINK S, KRAMER G, and ASHIKHMEN A. Design of low-density parity-check codes for modulation and detection[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2004, 52(4): 670–678. doi: [10.1109/TCOMM.2004.826370](https://doi.org/10.1109/TCOMM.2004.826370).
- [15] 洪少华, 马文卓, 王琳. 截断式原模图低密度奇偶校验卷积码边扩展优化[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(1): 45–50. doi: [10.11999/JEIT200350](https://doi.org/10.11999/JEIT200350).
- HONG Shaohua, MA Wenzhuo, and WANG Lin. Edge spreading optimization for terminated protograph-based low-density parity-check convolutional codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(1): 45–50. doi: [10.11999/JEIT200350](https://doi.org/10.11999/JEIT200350).
- 赵 辉: 女, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号与信息处理、光通信.
- 余孟洁: 女, 硕士生, 研究方向为无线通信、信息论与编码.
- 安 静: 女, 硕士生, 研究方向为无线通信、自适应光学.
- 邝凯达: 男, 硕士生, 研究方向为无线通信、自适应光学.
- 吕典楷: 男, 硕士生, 主要研究方向为无线通信、自适应光学.
- 刘媛妮: 女, 博士, 副教授, 博士生导师, 研究方向为网络空间安全.
- 责任编辑: 余 蓉