奇异积分交换子的 Hardy 型估计*

孙永忠 苏维宜

(南京大学数学系，南京 210093)

摘要 研究了经典的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 T 与 Lipschitz 函数 b 生成的交换子 T_b 在 Hardy 型空间上的有界性质，并将相应结果推广到 b 与具变核的奇异积分算子 S 生成的交换子 S_b 上.

关键词 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 交换子 Lipschitz 空间 Hardy 型空间 带变核奇异积分算子

设 T 是一个 Calderón-Zygmund 奇异积分算子，即

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y)dy, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leqslant p < \infty),$$

其中 $K \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 是一奇异积分核函数，满足

(a) $\int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)dx = 0, \forall 0 < \varepsilon < N < \infty,$

(b) $|K(x)| \leqslant C\,|x|^{-n}, \quad x \neq 0,$

(c) $|K(x-y) - K(x)| \leqslant C\,|y|\,|x|^{-n-1}, \quad \forall\,|x| > 2\,|y|,$

这里 C 是常数.

设 b 是一局部可积函数. T 与 b 生成的交换子定义为

$$T_b f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x).$$

由于 T 是 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ 上的有界算子，易见当 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时 T_b 也是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子. Coifman 等在文献 [1] 中证明 T_b 是 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ 上有界算子当且仅当 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 文献 [2] 证明了交换子 T_b 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)(1 < p < q < \infty)$ 有界，当且仅当 $b \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)(\alpha = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))$. 这里 $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是通常的 α 阶 Lipschitz 空间 (见下节定义). 考虑 $p = 1$ 的情形. 此时，自然用 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 代替空间 $L^1(\mathbb{R}^n)$. 但一般来说，由于 b 的存在， T_b 甚至不

2003-10-08 收稿， 2004-03-15 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号:10041005, 10171045)

可能是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子，除非 b 恒为常数，见文献 [3] 中的定理 3.1. Pèrez[4] 证明了 T_b 在一类与 b 有关的原子型 Hardy 空间上的有界性．而 Paluszyński[5] 讨论了 $b\in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 时文献 [2] 中结果的一些有趣的推广．最近，文献 [6] 得到了交换子 T_b 在 Hardy 及 Herz 型 Hardy 空间上的各种有界性质．比如，他们证明了如下 (参见文献 [6] 定理 1.1,1.2 及 1.3)

定理 0.1 设 $b\in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

(i) 若 $\frac{n}{n+\alpha}<p\leqslant 1, \frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{\alpha}{n}$, 则 T_b 是 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

(ii) 若 $p=\frac{n}{n+\alpha}$, 则 T_b 是 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界当且仅当 $K\equiv 0$ 或对任意 H^p 原子 a 有 $\int_{\mathbb{R}^n} a(y)b(y)dy=0$.

(iii) 若 $p=\frac{n}{n+\alpha}$, 则 T_b 是 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 到弱 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

本文讨论交换子 T_b 作用于 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)(\frac{n}{n+1}<p<1)$ 的情形．形式上看，我们讨论的是上述定理的临界情形，即 $p=\frac{n}{n+\alpha}$. 我们证明了一个不同于上述类型的正面的结果，见本文定理 2.1. 事实上，奇异积分及其交换子在二阶椭圆型偏微分方程先验估计中所起的作用是众所周知的，参见文献 [7∼9] 等．我们的动机正是方程的解在 Hardy 型空间中的先验估计．为此，本文将相应结果推广到具变核奇异积分的交换子上．当二阶非散度 (散度) 型椭圆方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x)=f(x)\quad \left(\sum_{i,j=1}^n \partial_i\left(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\right)=\sum_{i=1}^n \partial_i f_i(x)\right)$$

的系数 $a_{ij}\in \mathrm{Lip}_\alpha\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时，在解的二 (一) 阶导数的积分表达式中就出现我们所讨论的奇异积分交换子，有兴趣的读者可参见文献 [8, 9] 等．由于 $p=1$ 时的特殊性，将在以后的文章中讨论.

1 Hardy 型空间及其点态乘子

本节给出 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 和局部 Hardy 空间 $h^p(\mathbb{R}^n)$ 的定义及其原子分解．同时证明一个关于 $h^p(\mathbb{R}^n)$ 上点态乘子的结果．首先给出一些记号．本文中总假设 $\frac{n}{n+1}<p<1$, 虽然有些定义及结果对 $0<p<\infty$ 都适用．记 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 函数类，而 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 为其对偶缓增广义函数空间．以后总是略去一个函数空间记号中的 $\mathbb{R}^n$.

定义 1.1 设 $\varphi\in\mathcal{S}, \int\varphi=1, f\in\mathcal{S}'$, 令

$$M_\varphi f(x)=\sup_{t>0}|f*\varphi_t(x)|,\quad m_\varphi f(x)=\sup_{0<t<1}|f*\varphi_t(x)|.$$

H^p 是由所有满足 $M_\varphi f\in L^p$ 的缓增广义函数所组成的空间, 赋以 “范数” $\|f\|_{H^p}=\|M_\varphi f\|_{L^p}$. h^p 是由所有满足 $m_\varphi f\in L^p$ 的缓增广义函数所组成的空间，赋以 “范数” $\|f\|_{h^p}=\|m_\varphi f\|_{L^p}$. 易见 $H^p\subset h^p$. 局部 Hardy 空间 h^p 是 Goldberg 在文献 [10] 中引进的.

注记 1.1 当 $p<1$ 时， $\|\cdot\|_{H^p}$ $(\|\cdot\|_{h^p})$ 并不是范数，但赋以距离 $d(f,g)=\|f-g\|_{H^p}^p$ $(d(f,g)=\|f-g\|_{h^p}^p)$, $H^p(h^p)$ 是完备的距离空间.

Hardy 型空间最重要的特征是它们的原子刻画. 先引入原子的概念.

定义 1.2　设 $\frac{n}{n+1} < p \leqslant 1$, 称一个有界可测函数 a 是一个 p- 原子，若

(i) 存在球 B, 使得 $\mathrm{supp} a \subset B$;

(ii) $|a(x)| \leqslant |B|^{-\frac{1}{p}}$, 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立;

(iii) $\int a(x)dx = 0$.

称 B 是原子 a 的支集球. 如果 a 是一个 p- 原子，且存在 a 的支集球，其半径小于 1, 则称函数 a 是一个 (a)- 型原子. 如果 b 满足上述条件 (i) 和 (ii), 且 b 的任一支集球的半径不小于 1, 则称函数 b 是一个 (b)- 型原子. (a)- 型和 (b)- 型原子统称为局部 p- 原子.

易证一个 p- 原子本身属于 H^p, 而局部 p- 原子属于 h^p. 下面的定理可参见文献 [11, 12]:

定理 1.1　设 $f \in H^p$, 则存在数列 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty} \in l^p$ 与一列原子 $a_j (j = 1, 2, 3, \cdots)$, 使得

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j a_j(x),$$

进一步有

$$\|f\|_{H^p}^p \sim \inf \sum |\lambda_j|^p,$$

其中 inf 取遍所有可能的分解.

对 h^p 分布，有类似的原子分解，见文献 [10].

定理 1.2　设 $f \in h^p$, 则存在数列 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}, \{\mu_j\}_{j=1}^{+\infty} \in l^p$ 与 (a)- 型原子 $a_j (j = 1, 2, 3, \cdots)$, 及 (b)- 型原子 $b_j (j = 1, 2, 3, \cdots)$, 使得

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j(x) + \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \mu_j b_j(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j a_j(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j b_j(x),$$

且有

$$\|f\|_{h^p}^p \sim \inf \left(\sum |\lambda_j|^p + \sum |\mu_j|^p \right),$$

其中 inf 取遍所有可能的分解.

再给出一些熟知的 Lipschitz 型函数空间的定义和性质.

一个局部可积函数 f 称为 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 阶 (齐次)Lipschitz 函数，如果存在常数 C, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C |x - y|^{\alpha}$$

对任意的 x, y 属于 $\mathbb{R}^n$ 成立. 满足上述条件的最小常数称为 f 的 Lipschitz 范数，记做 $[f]_\alpha$. 我们用 Lip_α 或 $\dot{\Lambda}_\alpha$ 来记全体 Lipschitz 函数组成的空间. 再记

$$\Lambda_\alpha^p = \dot{\Lambda}_\alpha \cap L^p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

赋以范数 $\|\cdot\|_{\alpha p} = [\cdot]_\alpha + \|\cdot\|_{L^p}$. 通常将 Λ_α^∞ 简单地记为 Λ_α, 相应的范数记为 $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$.

Hardy 型空间与 Lipschitz 型函数空间之间的对偶关系是众所周知的，参见文献 [10, 6].

定理 1.3 设 $\frac{n}{n+1} < p < 1$, 则 H^p 的对偶是 $\dot{\Lambda}_\alpha$, h^p 的对偶是 Λ_α, 其中 $\alpha = n(\frac{1}{p} - 1)$.

我们再引进一种空间. 设 $0 < p \leqslant 1 \leqslant q \leqslant +\infty$, 定义直和空间 $H^p_q = H^p + L^q$ 如下：

定义 1.3 定义

$$H^p_q = H^p + L^q = \{f | f = h + g, h \in H^p, g \in L^q\},$$

赋以范数 $\|f\|_{H^p_q} = \inf(\|h\|_{H^p} + \|g\|_{L^q})$, 其中 inf 取遍 f 的所有可能分解.

同样可定义 $h^p_q = h^p + L^q$. 注意到 h^p 的原子分解，易证

引理 1.1 对任意的 $q \in [1, +\infty]$, $h^p \subset H^p + L^q$, 从而 $H^p_q = h^p_q$.

我们还要用到一个关于 h^p 上点态乘子 (pointwise multiplier) 的结果.

由于 h^p 中的一个元素 h 一般来说是个分布，故只有用 $\mathcal{S}$ 中的函数去乘 h 才有意义. 下面将证明，对一个 $\Lambda_\alpha(\alpha = n(\frac{1}{p} - 1))$ 中的函数 ψ, 可以定义 (点态) 乘法 ψh. 对一个固定的 $p \in (\frac{n}{n+1}, 1)$, 以下总记 $\alpha = n(\frac{1}{p} - 1) \in (0, 1)$.

引理 1.2 设 $\psi \in \Lambda_\alpha$, 若 a 是一个局部 p- 原子，则 $\psi a \in h^p$ 且

$$\|\psi a\|_{h^p} \leqslant C \|\psi\|_{\Lambda_\alpha},$$

其中常数 C 与 ψ, a 无关而仅与 n, p 有关.

证 若 a 是一个 (b)- 型原子，则易见 $b = \|\psi\|^{-1}_{L^\infty} \psi a$ 也是一个 (b)- 型原子且 $\|b\|_{h^p} \leqslant 1$. 下设 a 是一个 (a)- 型原子. 由定义，只需验证

$$\|m_\varphi(\psi a)\|^p_{L^p} \leqslant C \, \|\psi\|^p_{\Lambda_\alpha},$$

其中 $\varphi \in \mathcal{S}$ 固定.

$$\begin{aligned}
\int_{2B} (m_\varphi(\psi a)(x))^p dx &\leqslant C|B|^{\frac{2-p}{2}} \|m_\varphi(\psi a)\|^p_{L^2} \leqslant C|B|^{\frac{2-p}{2}} \|M(\psi a)\|^p_{L^2} \\
&\leqslant C|B|^{\frac{2-p}{2}} \|\psi a\|^p_{L^2} \leqslant C|B|^{\frac{2-p}{2}} \|a\|^p_{L^2} \|\psi\|^p_{L^\infty} \\
&\leqslant C|B|^{\frac{2-p}{2}} |B|^{-\frac{2-p}{2}} \|\psi\|^p_{L^\infty} \leqslant C\|\psi\|^p_{L^\infty} \leqslant C\|\psi\|^p_{\Lambda_\alpha},
\end{aligned}$$

若 $x \in \mathbb{R}^n \backslash 2B$, 由 a 的积分消失性条件 (iii), 及初等不等式 $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \backslash 2B} (m_\varphi(\psi a)(x))^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \backslash 2B} \left(\sup_{t<1} \left| \int_B \varphi_t(x-y)\psi(y)a(y)dy \right| \right)^p dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n \backslash 2B} \left(\sup_{t<1} \int_B |\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x-x_0)| \, |\psi(y)| \, |a(y)| \, dy \right)^p dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \backslash 2B} \left(\sup_{t<1} \int_B |\varphi_t(x-x_0)(\psi(y) - \psi(x_0))a(y)| \, dy \right)^p dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n\setminus 2B}\left(\int_B |y-x_0|\,|x-x_0|^{-n-1}\,|\psi(y)|\,|a(y)|\,dy\right)^p dx\\
&\quad + C\int_{B_{x_0}(1)\cap\mathbb{R}^n\setminus 2B}\left(\int_B |x-x_0|^{-n}\,|\psi(y)-\psi(x_0)|\,|a(y)|\,dy\right)^p dx\\
&\quad + C\int_{B^C_{x_0}(1)\cap\mathbb{R}^n\setminus 2B}\left(\int_B |x-x_0|^{-n-1}\,|\psi(y)-\psi(x_0)|\,|a(y)|\,dy\right)^p dx\\
&\leqslant Cr^p\int_{\mathbb{R}^n\setminus 2B}|x-x_0|^{-(n+1)p}\,dx\left(\int_B |\psi(y)|\,|a(y)|\,dy\right)^p\\
&\quad + C\int_{B_{x_0}(1)}|x-x_0|^{-np}\,dx\left(\int_B |\psi(y)-\psi(x_0)|\,|a(y)|\,dy\right)^p\\
&\quad + C\int_{B^C_{x_0}(1)}|x-x_0|^{-(n+1)p}\,dx\left(\int_B |\psi(y)-\psi(x_0)|\,|a(y)|\,dy\right)^p\\
&\leqslant C\,\|\psi\|^p_{L^\infty} + Cr^{\alpha p}\,|B|^{p-1}\,[\psi]^p_\alpha + Cr^{\alpha p}\,|B|^{p-1}\,[\psi]^p_\alpha \leqslant C\,\|\psi\|^p_{\Lambda_\alpha}.
\end{aligned}$$

上述的证明过程中利用了局部 p- 原子的尺度条件 (ii). 引理证毕.

有了上述引理，利用稠密性论证及 $\|\cdot\|^p_{h^p}$ 的完备性，易证

命题 1.1　对任一 $\psi\in\Lambda_\alpha$ 及 $h\in h^p$, 可以定义点态乘积 ψh, 且 $\psi h\in h^p$. 进一步有

$$\|\psi h\|_{h^p}\leqslant C\,\|\psi\|_{\Lambda_\alpha}\,\|h\|_{h^p},$$

其中常数 C 仅与 n,p 有关.

注记 1.2　当然，我们可以按如下方式定义一个 Λ_α 函数 ψ 和 h^p 分布 h 的乘法：将 h 理解为 h^p 的重对偶空间 $(h^p)''=(\Lambda_\alpha)'$ 中的元素，定义 ψh 为

$$\langle\psi h,\varphi\rangle=\langle h,\psi\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\Lambda_\alpha,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $(\Lambda_\alpha)'$ 中元素对 Λ_α 函数的作用．但这样定义的 ψh 并不显然是 h^p 分布.

作为推论有

引理 1.3　设 $f\in H^p_q$, $\frac{n}{n+1}<p<1\leqslant q<\infty$, $\psi\in\Lambda_\alpha$, $\alpha=n(\frac{1}{p}-1)$, 则 $\psi f\in H^p_q$ 且

$$\|\psi f\|_{H^p_q}\leqslant C\,\|\psi\|_{\Lambda_\alpha}\,\|f\|_{H^p_q}.$$

2　奇异积分交换子的 Hardy 型估计

本节讨论当 $\frac{n}{n+1}<p<1<q<\infty$ 时奇异积分交换子 T_b 的 H^p_q 型估计．我们将证明：

定理 2.1　设 $\frac{n}{n+1}<p<1<q<\infty$, $\alpha=n(\frac{1}{p}-1)$. 若 $b\in\mathrm{BMO}\cap\dot{\Lambda}_\alpha$, 则 T_b

是 H_q^p 到 H_q^p 的有界算子，且存在一个仅与 n,p,q,K 有关的常数 C, 使得

$$\|T_b f\|_{H_q^p} \leqslant C[b]_{\alpha*}\,\|f\|_{H_q^p}\,,$$

这里

$$[b]_{\alpha*}=[b]_*+[b]_\alpha \sim \sup_{r<1}\frac{1}{r^{n+\alpha}}\int_{B_r}|f(y)-f_{B_r}|\,dy+\sup_{r\geqslant 1}\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|f(y)-f_{B_r}|\,dy.$$

注记 2.1 由上节的引理 1.3 及 T 的 H_q^p 有界性知

$$\|T_b f\|_{H_q^p}\leqslant C\|b\|_{\Lambda_\alpha}\|f\|_{H_q^p},$$

显然 $\Lambda_\alpha=L^\infty\cap\dot{\Lambda}_\alpha\subset BMO\cap\dot{\Lambda}_\alpha$.

注记 2.2 事实上，本文的结果为，当 $b\in \mathrm{BMO}\cap\dot{\Lambda}_\alpha$ 时，交换子 T_b 将 H^p 映入到 h_q^p 空间，这里 $q\in(1,\infty)$ 是任意的．写成定理的形式只是为了显得更对称．能否去掉 $b\in\mathrm{BMO}$ 这一条件，是一个有趣的问题．

定理 2.1 的证 设 $\frac{n}{n+1}<p<1$, 记 $\alpha=n(\frac{1}{p}-1)$, 亦即 $p=\frac{n}{n+\alpha}$. 设 a 是一个 p- 原子，支集球为 $B=B_r(x_0)$, 记 $B_0=B_1(x_0)$. 利用原子的消失性和尺度条件及 K 的条件 (c), 容易证明若 $y\notin 2B$, 则

$$|Ta(y)|\leqslant Cr^{1-\alpha}\,|y-x_0|^{-n-1}\,, \tag{2.1}$$

这里 C 是仅与 n,K 有关的常数．

下证

$$\|T_b a\|_{H_q^p}\leqslant C\,[b]_{\alpha*}\,. \tag{2.2}$$

若 $r\geqslant\frac{1}{8}$, 则由 T_b 的 L^q 有界性,

$$\|T_b a\|_{L^q}\leqslant C\,[b]_*\,\|a\|_{L^q}\leqslant C\,[b]_*\,|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\leqslant C[b]_*. \tag{2.3}$$

事实上， b 的 BMO 范数只出现在上面的式子中．

下设 $r<\frac{1}{8}$, 分解 $T_b a$ 如下：

$$\begin{aligned}T_b a(y)&=b(y)Ta(y)-T(ba)(y)\\&=(b(y)-b(x_0))Ta(y)-T((b-b(x_0))a)(y)\\&=I(y)+II(y).\end{aligned}$$

对 $I(y)$ 作如下分解：

$$\begin{aligned}I(y)&=(b(y)-b(x_0))Ta(y)\chi_{4B}(y)+(b(y)-b(x_0))Ta(y)\chi_{4B\cap B_0}(y)\\&\quad+(b(y)-b(x_0))Ta(y)\chi_{B_0^C}(y)\\&=I_1(y)+I_2(y)+I_3(y).\end{aligned}$$

先证 $I_1\in h^p$.

$$\int_{8B}|m_\varphi I_1(x)|^p\,dx\leqslant |8B|^{\frac{2-p}{2}}\,\|m_\varphi I_1\|_{L^2}^p\leqslant C\,|B|^{\frac{2-p}{2}}\,\|I_1\|_{L^2}^p$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\,|B|^{\frac{2-p}{2}}\left(\int_{4B}|b(y)-b(x_0)|^2\,|Ta(y)|^2\,dy\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\leqslant C\,|B|^{\frac{2-p}{2}}\,r^{\alpha p}[b]_\alpha^p\,\|Ta\|_{L^2}^p\\
&\leqslant C\,|B|^{\frac{2-p}{2}}\,r^{\alpha p}[b]_\alpha^p\,\|a\|_{L^2}^p\leqslant Cr^{\alpha p}[b]_\alpha^p\leqslant C[b]_\alpha^p.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

在 $8B$ 外的估计如下：

$$\begin{aligned}
&|\varphi_t*I_1(x)|\\
=&\left|\int_{4B}\varphi_t(x-y)(b(y)-b(x_0))Ta(y)dy\right|\\
\leqslant&\int_{4B}|\varphi_t(x-y)(b(y)-b(x_0))Ta(y)|\,dy\\
\leqslant&\,C\min\left\{|x-x_0|^{-n},|x-x_0|^{-n-1}\right\}\int_{4B}|(b(y)-b(x_0))Ta(y)|\,dy;\\
&\int_{\mathbb{R}^n\setminus 8B}|\varphi_t*I_1(x)|^p\,dx\\
\leqslant&\int_{B_0\cap 8B}|\varphi_t*I_1(x)|^p\,dx+\int_{B_0^C}|\varphi_t*I_1(x)|^p\,dx\\
\leqslant&\,C\left[\int_{B_0\cap 8B}|x-x_0|^{-np}\,dx+\int_{B_0^C}|x-x_0|^{-(n+1)p}\,dx\right]\\
&\times\left[\int_{4B}|(b(y)-b(x_0))Ta(y)|\,dy\right]^p\\
\leqslant&\,C\left[\int_{4B}|(b(y)-b(x_0))Ta(y)|\,dy\right]^p\\
\leqslant&\,Cr^{\alpha p}[b]_\alpha^p\left[\int_{4B}|Ta(y)|\,dy\right]^p\\
\leqslant&\,C\,|B|^{1-p}\,[b]_\alpha^p\,|B|^{\frac{p}{2}}\left[\int_{4B}|Ta(y)|^2\,dy\right]^{\frac{p}{2}}\\
\leqslant&\,C\,|B|^{1-p}\,[b]_\alpha^p\,|B|^{\frac{p}{2}}\,|B|^{\frac{p}{2}-1}\leqslant C[b]_\alpha^p.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

故有

$$\|I_1\|_{h^p}=\|m_\varphi I_1\|_{L^p}\leqslant C[b]_\alpha.\tag{2.6}$$

再证 $I_2\in h^p$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_t*I_2(x)|&\leqslant\int_{1>|y|\geqslant 4r}|x-y|^{-n}\,|b(y)-b(x_0)|\,|Ta(y)|\,dy\\
&\leqslant Cr^{-n}r^{1-\alpha}\int_{|y-x_0|\geqslant 4r}|b(y)-b(x_0)|\,|y-x_0|^{-n-1}\,dy\\
&\leqslant Cr^{-n+1-\alpha}[b]_\alpha\int_{|y-x_0|\geqslant 4r}|y-x_0|^{\alpha}\,|y-x_0|^{-n-1}\,dy\\
&\leqslant Cr^{-n}[b]_\alpha,
\end{aligned}$$

故有

$$\int_{2B} |\varphi_t * I_2(x)|^p \, dx \leqslant C[b]_\alpha^p. \tag{2.7}$$

若 $x \in 2B_0 \backslash 2B$, 则

$$\begin{aligned} |\varphi_t * I_2(x)| &= \left| \int_{B_0 \backslash 4B} \varphi_t(x-y)(b(y)-b(x_0))Ta(y)dy \right| \\ &\leqslant \left| \int_{(B_0 \backslash 4B) \cap B_r(x)} \varphi_t(x-y)(b(y)-b(x_0))Ta(y)dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{(B_0 \backslash 4B) \cap B_r^C(x)} \varphi_t(x-y)(b(y)-b(x_0))Ta(y)dy \right| \\ &= L_{1t}(x) + L_{2t}(x). \end{aligned}$$

先估计 L_{1t}. 记 $B_j(x) = B_{2^j r}(x)$, 注意到若 $x \in B_{j+1}$, $y \in B_j(x)$, 则 $y \in B_{j+2}$, 故对 $x \in B_{j+1}$ 有

$$\begin{aligned} L_{1t}(x) &\leqslant \int_{(B_0 \backslash 4B) \cap B_j(x)} \varphi_t(x-y) \, |b(y)-b(x_0)| \, |Ta(y)| \, dy \\ &\leqslant Cr^{1-\alpha} \int_{B_j(x)} \varphi_t(x-y) \, |b(y)-b(x_0)| \, |x_0-y|^{-n-1} \, dy \\ &\leqslant Cr^{1-\alpha} \, |x-x_0|^{-n-1} \int_{B_j(x)} \varphi_t(x-y) \, |b(y)-b(x_0)| \, \chi_{B_{j+2}}(y) dy \\ &\leqslant Cr^{1-\alpha} \, |x-x_0|^{-n-1} \, m_\varphi \left(|b-b(x_0)| \, \chi_{B_{j+2}} \right)(x), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\int_{2B_0 \backslash 2B} |L_{1t}(x)|^p \, dx \\ &\leqslant Cr^{(1-\alpha)p} \sum_{j=1}^{\left[\log_2 \frac{2}{r}\right]+1} \int_{B_{j+1} \backslash B_j} \left[|x-x_0|^{-n-1} \, m_\varphi \left(|b-b(x_0)| \, \chi_{B_{j+2}} \right)(x) \right]^p dx \\ &\leqslant Cr^{(1-\alpha)p} \sum_{j=1}^{\left[\log_2 \frac{2}{r}\right]+1} \frac{1}{(2^j r)^{(n+1)p}} \int_{B_{j+1}} \left[m_\varphi \left(|b-b(x_0)| \, \chi_{B_{j+2}} \right)(x) \right]^p dx \\ &\leqslant C \sum_{j=1}^{\left[\log_2 \frac{2}{r}\right]+1} \frac{1}{2^{j(1-\alpha)p}} \frac{1}{|B_{j+1}|} \left[\int_{B_{j+1}} \left[m_\varphi \left(|b-b(x_0)| \, \chi_{B_{j+2}} \right)(x) \right]^2 dx \right]^{\frac{p}{2}} |B_{j+1}|^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leqslant C \sum_{j=1}^{\left[\log_2 \frac{2}{r}\right]+1} \frac{1}{2^{j(1-\alpha)p}} \left[\frac{1}{|B_{j+1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \left[|b(y)-b(x_0)| \, \chi_{B_{j+2}}(y) \right]^2 dy \right]^{\frac{p}{2}} \\ &\leqslant C \sum_{j=1}^{\left[\log_2 \frac{2}{r}\right]+1} \frac{1}{2^{j(1-\alpha)p}} \left[\frac{1}{|B_{j+2}|} \int_{B_{j+2}} |b(y)-b(x_0)|^2 \, dy \right]^{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{[\log_2\frac{2}{r}]+1}\frac{\left(2^jr\right)^{\alpha p}}{2^{j(1-\alpha)p}}[b]_\alpha^p\leqslant C\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j(1-\alpha)p}}[b]_\alpha^p\leqslant C[b]_\alpha^p, \tag{2.8}$$

倒数第 2 个不等式由 $2^jr\leqslant 4(j=1,2,\cdots)$，$[\log_2\frac{2}{r}]+1$ 而来.

对 L_{2t} 有如下估计：

$$\begin{aligned}L_{2t}(x)&=\left|\int_{(B_0\backslash 4B)\cap B_j^C(x)}\varphi_t(x-y)(b(y)-b(x_0))Ta(y)dy\right|\\&\leqslant C\int_{(B_0\backslash 4B)\cap\{|y-x|\geqslant 2^jr\}}|x-y|^{-n}\,|b(y)-b(x_0)|\,|Ta(y)|\,dy\\&\leqslant C\left(2^jr\right)^{-n}\int_{B_0\backslash 4B}|b(y)-b(x_0)|\,|Ta(y)|\,dy\\&\leqslant C\,|B_j|^{-1}\,r[b]_\alpha\int_{|y-x_0|>4r}|x_0-y|^{-n-1}\,dy\leqslant C\,|B_j|^{-1}\,[b]_\alpha,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_{2B_0\backslash 2B}|L_{2t}(x)|^p\,dx\\\leqslant&\sum_{j=1}^{[\log_2\frac{2}{r}]+1}\int_{B_{j+1}\backslash B_j}|L_{2t}(x)|^p\,dx\leqslant C\sum_{j=1}^{[\log_2\frac{2}{r}]+1}|B_j|^{1-p}\,[b]_\alpha^p\\=&\,Cr^{n(1-p)}\sum_{j=1}^{[\log_2\frac{2}{r}]+1}\left(2^{n-np}\right)^j[b]_\alpha^p\leqslant C[b]_\alpha^p.\end{aligned} \tag{2.9}$$

由 (2.8) 和 (2.9) 式可得

$$\int_{2B_0\backslash 2B}|m_\varphi I_2(x)|^p\,dx\leqslant C[b]_\alpha^p. \tag{2.10}$$

若 $x\notin 2B_0$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n\backslash 2B_0}\left|m_\varphi I_2\left(x\right)\right|^p dx\\=&\int_{\mathbb{R}^n\backslash 2B_0}\left|\sup_{t<1}\int_{B_0\backslash 4B}\varphi_t(x-y)(b(y)-b(x_0))Ta(y)dy\right|^p dx\\\leqslant&\, C\int_{\mathbb{R}^n\backslash 2B_0}|x-x_0|^{-(n+1)p}\,dx\left[\int_{B_0\backslash 4B}|b(y)-b(x_0)|\,|Ta(y)|\,dy\right]^p\\\leqslant&\, C[b]_\alpha^p.\end{aligned} \tag{2.11}$$

综合 (2.7)、(2.10) 和 (2.11) 式即得 I_2 的估计：

$$\|I_2\|_{h^p}=\|m_\varphi I_2\|_{L^p}\leqslant C[b]_\alpha. \tag{2.12}$$

I_3 的估计较简单. 事实上，对任意的 $q\in[1,+\infty]$, $I_3\in L^q$, 且 $\|I_3\|_{L^q}\leqslant C[b]_\alpha$, 这

是因为

$$\begin{aligned}\|I_3\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0} |(b(y)-b(x_0))\,Ta(y)|\,dy\\ &\leqslant Cr^{1-\alpha}\int_{|y-x_0|\geqslant 1} |x_0-y|^{-n-1}\,|y-x_0|^{\alpha}\,dy[b]_\alpha\\ &\leqslant Cr^{1-\alpha}\int_{|y-x_0|\geqslant r} |x_0-y|^{-n-1+\alpha}\,dy[b]_\alpha\\ &\leqslant C[b]_\alpha;\end{aligned}$$

而因为 $r<1$ 而 $|y-x_0|\geqslant 1$,

$$\|I_3\|_{L^\infty}\leqslant C[b]_\alpha r^{1-\alpha}|y-x_0|^{-n-1+\alpha}\leqslant C[b]_\alpha,$$

故 $I_3\in L^q$, 且

$$\|I_3\|_{L^q}\leqslant C[b]_\alpha. \tag{2.13}$$

为证明 $II\in H_q^p$, 只需证明下述引理:

引理 2.1 $(b-b(x_0))a\in H_q^p$ 且

$$\|(b-b(x_0))a\|_{H_q^p}\leqslant C[b]_\alpha,$$

其中常数 C 只与 n,p,q 有关.

这个引理本质上就是命题 1.1, 证明从略. 有了上述引理, 再由 T 的 H_q^p 有界性, 即可得

$$\|T((b-b(x_0))a)\|_{h_q^p}\leqslant C[b]_\alpha. \tag{2.14}$$

最后, 由 (2.6)、(2.12)、(2.13) 式及上式, 结合引理 1.1 便知 (2.2) 式成立. 定理证毕.

3 带变核奇异积分及其交换子的 Hardy 型估计

本节将上节建立的估计推广到带变核的奇异积分及其交换子上.

设 $K\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 满足

(i) $K(x)$ 是一 n 次齐次函数,

(ii) $\int_\Sigma K(x)d\sigma(x)=0$, 这里 $\Sigma=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面,

则称 K 是一个 Calderón-Zygmund 核 (C-Z 核). 显然 C-Z 核是一开始引进的奇异积分核的特例. 设 $k:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, 使得对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$, $k(x,y)$ 关于 y 是一个 C-Z 核. 对 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$Sf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,x-y)f(y)dy,$$

$$S_bf(x)=b(x)Sf(x)-S(bf)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,x-y)(b(x)-b(y))f(y)dy,$$

这里 b 是局部可积函数, 则称 S 是带变核的奇异积分 (算子), S_b 是 S 与 b 生成的交换子. 下面关于 S 及 S_b 的 $L^q(1<q<\infty)$ 有界性的结果是熟知的, 见文献 [7, 8] 等.

定理 3.1　设 k 满足

$$\max_{|\beta|\leqslant 2n}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}k(x,y)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\Sigma)}\leqslant M.$$

再设 $b\in\mathrm{BMO}$, 则 S 和 S_b 能够延拓成 $L^q(1<q<\infty)$ 上的有界算子且

$$\|Sf\|_{L^q}\leqslant c(n,q,M)\,\|f\|_{L^q}\,;\quad \|S_bf\|_{L^q}\leqslant c(n,q,M)\,[b]_*\,\|f\|_{L^q}\,.$$

研究带变核奇异积分的标准方法是利用球面调和展开，为此需要球面调和函数的概念和性质 (参见文献 [7, 13] 等).

m 阶齐次调和多项式在单位球面 Σ 上的限制称为 m 阶球面调和函数. 所有 m 阶球面调和函数构成的空间记做 H_m. 每个 H_m 是有限维的, 其维数 $\dim H_m$ 记做 g_m. 设 $\{Y_{km}\}(k=1,2,\cdots,g_m,m=1,2,3,\cdots)$ 是一族球面调和函数正交系，即 $\{Y_{km}\}$ 在 $L^2(\Sigma)$ 中稠密，$\int_\Sigma Y_{km}^2d\sigma=1$, 且对 $(k,m)\neq(k',m')$, $\int_\Sigma Y_{km}Y_{k'm'}d\sigma=0$. 下面总是将一个球面调和函数 $p(x)$ 和它在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的零次齐次扩张 $p(x/|x|)$ 等同起来. 最后引进算子 $\Lambda u=|x|^2\Delta u$, 并且记 Λ^l 是 Λ 的 l 重算子. 下面关于球面调和函数的性质是熟知的 [7,13]:

引理 3.1　(i) $g_m=C_m^{n+m-1}-C_{m-2}^{n+m-3}\leqslant c(n)m^{n-2}$;

(ii) $|Y_{km}(x)|\leqslant c(n)m^{\frac{n-2}{2}}$, 对任意的 $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\},k=1,2,\cdots,g_m$;

(iii) $Y_{km}=\frac{1}{(-m)^l(m+n-2)^l}\Lambda^lY_{km}$, 对 $k=1,2,\cdots,g_m$, 任意的 $l\in\mathbb{N}$ 及 $m=1,2,3,\cdots$.

引理 3.2　设 $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 零次齐次函数，则

$$\int_\Sigma f\Lambda^lgd\sigma=\int_\Sigma g\Lambda^lfd\sigma,$$

对任意的 $l=0,1,2,\cdots$ 成立.

本节的主要结果是带变核奇异积分的 H_q^p 估计.

定理 3.2　设对 $|\beta|=0,1,\cdots,2n$ 及任意的 $y\in\Sigma$, 有 $\frac{\partial^\beta k(\cdot,y)}{\partial y^\beta}\in\Lambda_\alpha$, 且

$$\max_{|\beta|\leqslant 2n}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}k(x,y)\right\|_{L^\infty(\Lambda_\alpha,\Sigma)}\leqslant M. \tag{3.1}$$

设 $b\in\mathrm{BMO}\cap\dot{\Lambda}_\alpha,\alpha=n(\frac{1}{p}-1),\frac{n}{n+1}<p<1$, 则 S,S_b 能够延拓为 $H_q^p(1<q<\infty)$ 上的有界算子，且对任意的 $f\in H_q^p$ 有

$$\|Sf\|_{H_q^p}\leqslant C\,\|f\|_{H_q^p}\,, \tag{3.2}$$

$$\|S_bf\|_{H_q^p}\leqslant C\,[b]_{\alpha*}\,\|f\|_{H_q^p}\,, \tag{3.3}$$

这里 C 是一个仅与 n,p,q 和 M 有关的常数.

证　定理的证明基于对核 $k(x,y)$ 的第 2 个变量作球面调和展开. 首先注意到对任一 $x\in\mathbb{R}^n$, $y\mapsto|y|^n k(x,y)$ 属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 且 $\int_\Sigma k(x,y)d\sigma(y)=0$, 因此

$$|y|^n\,k\,(x,y)=\sum_{m=1}^\infty\sum_{k=1}^{g_m}a_{km}(x)Y_{km}\,(y)\,,$$

其中 $a_{km}(x)=\int_\Sigma k\,(x,y)\,Y_{km}(y)d\sigma(y)\ (m=1,2,3,\cdots,k=1,2,\cdots,g_m)$, 故有

$$Sf\,(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}a_{km}(x)R_{km}f\,(x)\,,\tag{3.4}$$

$$S_bf\,(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}a_{km}(x)R_{km,b}f\,(x)\,,\tag{3.5}$$

这里 $R_{km}f\,(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{Y_{km}(x-y)}{|x-y|^n}f(y)dy$ 是 C-Z 奇异积分算子， $R_{km,b}$ 是 R_{km} 与 b 构成的交换子.

由引理 3.1 及 3.2 知

$$\begin{aligned}a_{km}(x)&=\frac{1}{(-m)^n(m+n-2)^n}\int_\Sigma k\,(x,y)\,\Lambda^nY_{km}(y)d\sigma(y)\\&=\frac{1}{(-m)^n(m+n-2)^n}\int_\Sigma \Lambda^n(|y|^nk\,(x,y))Y_{km}(y)d\sigma(y).\end{aligned}$$

再注意到算子 Λ 的定义与定理 3.2 中 k 的条件 (3.1), 易证

$$\|a_{km}\|_{\Lambda_\alpha}\leqslant c(n)Mm^{-2n}.\tag{3.6}$$

由奇异积分的 H_q^p 有界性、引理 1.3 与 3.1 及上式，有

$$\begin{aligned}\|Sf\|_{H_q^p}\leqslant&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\|a_{km}R_{km}f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\|a_{km}\|_{\Lambda_\alpha}\|R_{km}f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q,M)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}m^{-2n}\|R_{km}f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q,M)\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-2}m^{-2n}\|f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q,M)\|f\|_{H_q^p}.\end{aligned}$$

对 S_b, 应用定理 2.1, 引理 1.3 与 3.1, 类似上面的讨论，有

$$\begin{aligned}\|S_bf\|_{H_q^p}\leqslant&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\|a_{km}R_{km,b}f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\|a_{km}\|_{\Lambda_\alpha}\|R_{km,b}f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\|a_{km}\|_{\Lambda_\alpha}[b]_{\alpha*}\|f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q,M)[b]_{\alpha*}\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-2}m^{-2n}\|f\|_{H_q^p}\\&\leqslant C(n,p,q,M)[b]_{\alpha*}\|f\|_{H_q^p}.\end{aligned}$$

定理证毕.

参　考　文　献

1 Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. Ann of Math, 1976, 103: 611～635
2 Janson S. Mean oscillation and commutators of singular integral operators. Ark Mat, 1978, 16: 263～270
3 Harbour E, Segovia C, Torrea J L. Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p. Ill J Math, 1997, 41: 676～700
4 Pèrez C. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. J Func Anal, 1995, 128: 163～185
5 Paluszyński M. Characterization of the Besov spaces via the commutator of Coifman, Rochberg and Weiss. Indiana Univ Math J, 1995, 44: 1～17
6 陆善镇, 吴强, 杨大春. 交换子在 Hardy 型空间上的有界性. 中国科学，A 辑，2002, 32(3): 232～244
7 Calderón A P, Zygmund A. Singular integral operators and differential equations. Amer J Math, 1957, 79: 801～821
8 Chiarenza F, Frasca M, Longo P. Interior estimates for divergence elliptic equations with discontinuous coefficients. Ricerche di Mat, 1991, 40: 149～168
9 Di Fazio G. L^p estimates for divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients. Boll UMI, 1996, A10(7): 409～420
10 Goldberg D. A local version of real Hardy spaces. Duke Math J, 1979, 46: 27～42
11 陆善镇. H^p 空间实变理论及其应用. 上海：上海科学技术出版社，1992
12 Stein E M. Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogobality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton Univ Press, 1993
13 Stein E M, Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton: Princeton Univ Press, 1971