

基于最优一维分解的图像超分辨率方法

谭璐 朱矩波 吴翊

(国防科技大学数学与系统科学系, 长沙 410073)

摘要 提出了一种用分离变量的一维函数乘积形式逼近二维图像数据的方法, 通过在一维空间的超分辨率处理, 很容易实现对图像的超分辨率处理。从理论上证明了这种表达是最优的。实际结果显示了超分辨率的效果好, 计算量小。这种方法也可应用于图像处理的其他领域和海量数据信息特征提取。

关键词 最优分解 超分辨率 图像数据

中图法分类号: TP751 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)04-0423-06

Image Superresolution Basing on the Optimum Discomposition

TAN Lu, ZHU Ju-bo, WU Yi

(Dept of Mathematic and System Science, NUDT, Changsha 410073)

Abstract In this paper a novel method for image superresolution is proposed. The primary theory is proved that the 2-dimension image data can be approximated by the products of 1-dimension functions whose variables are separated from the image's variables. Therefore, the image superresolution can proceed conveniently through the 1-dimension superresolution. Concretely, the digital image ($M \times N$) can be expressed by the summation of the products of M -dimension vectors and N -dimension vectors. So the image superresolution process can be converted to the M -dimension vector processing and the N -dimension vector processing easily. Thus the method is based on the eigenvectors. In the mean-square-error sense, this expression or decomposition is optimum. It is also proved to be identical with the literature[3] when the hits go to infinite. At last the applications verify the theoretical result. Namely, this method has the better results and can reduce the calculations because the image can be adjusted adaptively and be expressed by the less parameters. In addition, this method can also be applied to other fields of image processing and the information processing of the great-capacity data.

Keywords optimum decomposition, superresolution, image data

1 引言

图像超分辨率是一种重要的图像处理技术, 通常是将图像作为二元函数, 利用周围的点来线性超分辨率此点或先使用二元函数基去逼近原图, 如傅里叶变换^[1]、小波变换^[2]等, 然后通过函数基的自然扩展来实现超分辨率的目的。通常这些基都具有可分离的形式, 图像中特征的变化体现在函数系数上。但对于具体的图像数据, 这种事先选取固定基的方法有一定的局限性, 一方面处理效果不一定好, 另一方面一般需要选取较多的项。因此有大量的文献在研究既

能有效地表示图像特征, 又能具有较少项的图像数据表示新方法。针对图像特征的多样性, 提出了一种图像最优分解方法, 它是一种特征向量方法, 基本思想是将二维图像自适应的分解为一维向量的综合。由于自适应性和较少参数表示, 故可以获得较好的效果。事实上若选取同样个数的基, 在均方误差准则下, 这种特征向量表示是最优的。并可证明在连续条件下, 当采样无限加细时这一结果收敛到相应连续的情形^[3]。利用这一分解过程, 再加上一元函数的超分辨率处理, 可以实现图像的超分辨率处理。实验结果表明效果是显著的。

2 理论结果

定理 1 (连续函数的单变量分解) $F(x, y)$ 为定义于 2 维空间 $\mathbf{R}^2$ 中单位矩形 $\Omega(\Omega = \{0 \leq x, y \leq 1\})$ 上平方可积函数, 则使得

$$L = \int_{\Omega} (F(x, y) - \lambda \varphi(x) \psi(y))^2 dx dy = \min$$

的 λ, φ, ψ 为如下算子方程的解

$$\phi \cdot \phi = \int_0^1 F(x, y) \psi(y) dy = \lambda \cdot \varphi$$

$$\phi \cdot \varphi = \int_0^1 F(x, y) \varphi(x) dx = \lambda \cdot \psi$$

其中, λ 为自伴算子 ϕ 的最大本征值; φ, ψ 为相应的自伴算子 ϕ 的本征元。

对 $F(x, y) - \lambda \varphi(x) \psi(y)$, 使用上述定理可得相应的 λ, φ, ψ , 继续这一过程可得 $F(x, y)$ 的最优可分离正交基。此外本征值 λ 是以指数下降的, 这相应于逼近误差以指数速度下降, 这一问题以及更加深入的讨论见文献[3]。

若将一幅图像 $(M \times N)$ 作为二元函数的采样, 则相应的得到如下的最优一维分解表示定理。

定理 2 $F(x, y)$ 为某一二元函数, $F(x, y)$ 为其相应的采样值, 则使得

$$L(f, g, \lambda) = \|F - \lambda f g^T\|^2 \quad (1)$$

达到最小的 λ, f, g (其中, $\|f\| = \sqrt{M}, \|g\| = \sqrt{N}$) 满足:

- (1) g 为 $F^T F$ 的最大特征向量;
- (2) f 为 $F F^T$ 的最大特征向量;
- (3) $MN\lambda^2$ 为 $F^T F$ (或 $F F^T$) 的最大特征根。

其中, $F = (F(x_i, y_j))_{M \times N}$ 为采样矩阵, $i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$ 。

$$f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_M))$$

$$g = (g(y_1), g(y_2), \dots, g(y_N))$$

$$\|F - \lambda f g^T\|^2 = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (F(x_i, y_j) - \lambda f(x_i) g(y_j))^2$$

证明 由于

$$\begin{aligned} \|F - \lambda f g^T\|^2 &= \frac{1}{MN} [tr(F^T F) - 2\lambda f^T F g + MN\lambda^2] \\ &= \frac{1}{MN} tr(F^T F) + \left(\lambda - \frac{1}{MN} f^T F g \right)^2 - \\ &\quad \left(\frac{1}{MN} f^T F g \right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

故使得式(2)最小等价于

$$\lambda = \frac{1}{MN} \sup_{f, g} \{f^T F g\}$$

故只需寻求 $\sup_{f, g} \{f^T F g\}$ 的 f, g 即可。

令 $Q(f, g) = f^T F g + l_1(f^T f - N) + l_2(g^T g - N)$ 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial f} = F g + 2l_1 f = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial g} = F^T f + 2l_2 g = 0 \end{cases}$$

进一步得

$$F^T F g + 2l_1 F^T f = 0$$

$\Downarrow$

$$F^T F g = 4l_1 l_2 g$$

从而 g 是 $F^T F$ 的特征值为 $4l_1 l_2$ 的特征向量。同理 f 是 $F F^T$ 的特征值为 $4l_1 l_2$ 的特征向量。又由 $f^T F g = f^T (-2l_1 f) = -2Ml_1, f^T F g = g^T (-2l_2 g) = -2Nl_2$, 知 $l_2 = \frac{M}{N} l_1$ 。

故 $\lambda = \frac{1}{MN} \sup_{f, g} \{f^T F g\} = \frac{2}{N} \sup \{-l_1\}$ 。若记 $F^T F$

的最大特征值为 $T_{\max}$, 则 $T_{\max} = 4l_1 l_2 = 4l_1^2 \frac{M}{N} = MN\lambda^2$, 此时 g 为 $F^T F$ 的最大特征向量, f 为 $F F^T$ 的最大特征向量。

证毕。

称满足式(1)的 f, g, λ 为矩阵 F 的一步最优分解。 λ 为一步最优分解系数, f, g 为一步最优分解因子。若令 $F = F - \lambda f g^T$, 则可继续这一过程, 进行二步分解, 并可继续进行下去。下面的定理 3 给出了最终的分解结果。

定理 3 给定采样矩阵 $F_{M \times N}$, 则存在相应的最优分解 $\{\lambda_i\}, \{f_i\}, \{g_i\}$, 使得

$$F = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i g_i^T$$

其中, $\{\lambda_i\}$ 为 i 步分解系数, $\lambda_i \in \mathbf{R}, \{f_i\}, \{g_i\}$ 为相应的 i 步分解因子, $f_i \in \mathbf{R}^M, g_i \in \mathbf{R}^N (i = 1, 2, \dots, k)$, $k = \text{Rank}(F)$ 。

则有下列结论成立

- (1) $\{f_i\}$ 为 $F F^T$ 的特征向量;
- (2) $\{g_i\}$ 为 $F^T F$ 的特征向量;
- (3) $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ 单降, 且对 $\forall 1 \leq i \leq k$ $MN\lambda_i^2$ 为 $F^T F$ 的非零特征值;
- (4) $\{f_i g_i^T\}_{i=1}^k$ 之间是标准正交的, 且 $\langle F, f_i g_i^T \rangle = \lambda_i (i = 1, 2, \dots, k)$;

$$(5) \text{第 } p \text{ 步近似误差 } L_p = \left\| F - \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i g_i^T \right\|^2 =$$

$$\|F\|^2 - \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad (p \leq k)$$

其中,在 $\mathbf{R}^{M \times N}$ 中定义

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} B_{ij} \quad \|A\|^2 = \langle A, A \rangle$$

$$\forall A, B \in \mathbf{R}^{M \times N}$$

证明 记一步最优分解为 λ_1, f_1, g_1 , 则 $f_1^T f_1 = M, g_1^T g_1 = N, F^T F g_1 = MN \lambda_1^2 g_1$

$$\text{令 } F_1 = F - \lambda_1 f_1 g_1^T$$

$$\text{则 } F_1^T F_1 = (F^T - \lambda_1 g_1 f_1^T)(F - \lambda_1 f_1 g_1^T)$$

$$= F^T F - MN \lambda_1^2 g_1 g_1^T$$

显然, $F^T F$ 的特征向量 (g_1 除外) 皆为 $F_1^T F_1$ 的特征向量 (由不同特征向量的正交性可见), 且对应的特征值也一样。故 $F_1^T F_1$ 的最大特征值、特征向量也为 $F^T F$ 的特征值、特征向量。进一步, 对任意的 $i=1, 2, \dots, k, F_i^T F_i$ 也有一致的结论。从而实际上 $F^T F$ 的所有特征值、特征向量就对应着全部的 λ 及 g 。从而上述结论 2、结论 3 成立。同理可知结论 1 成立。

又由结论 1、结论 2 可知

$$\langle f_i g_i^T, f_j g_j^T \rangle = \frac{1}{MN} (f_i^T (f_j g_j^T) g_i) = \frac{1}{MN} (f_i^T f_j) g_i^T g_i$$

$$= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

故 $\{f_i g_i^T\}$ 之间是标准正交的。

又

$$\langle F, f_i g_i^T \rangle = \frac{1}{MN} f_i^T F g_i = \frac{1}{MN} f_i^T N \lambda_i f_i = \lambda_i$$

$$(i=1, 2, \dots, k)$$

故

$$\langle F, f_i g_i^T \rangle = \lambda_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

因此结论 4 成立。由结论 4 推知结论 5 成立。

证毕。

定理 1、定理 2 和定理 3 分别给出了二元函数最优一维分解的相应结果。那二者之间是否有自然的对应关系呢? 当利用定理 3 进行超分辨率插值时, 结果收敛与否呢? 下面的定理 4 回答了这些问题。说明当分割无限加细时, 图像采样矩阵的分解对应于二元连续函数^[3]的分解。此外这一点不是明显的, 即采样矩阵的分解结果并不明显对应于连续分解的采样。这是由于在实际计算过程中对分解结果施加了正交的限制, 从而只有当连续分解结果的采样向量之间是正交时, 这里的结果与连续结果之间才有这

种自然的联系。下面以具有两个分解因子的函数为例来证明本文结果与连续结果的一致性。由证明过程可以看出这一证明可以无困难地扩展到对任意有限分解因子的情形。

定理 4 若 $F(x, y) \in C^2(\Omega)$, $F(x, y) =$

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i f_i(x) g_i(y) \text{ 为其相应的分解式。}$$

其中, $\lambda_1 > \lambda_2$, 并且 $f_i(x), g_i(y)$ 满足规范化条件

$$\|f_i(x)\|_2 = \|g_i(y)\|_2 = 1$$

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \langle g_1(y), g_2(y) \rangle = 0 \quad (i=1, 2)$$

若 $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1, 0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ 为区间 $[0, 1]$ 的 2 个等距划分, 又 $F = \lambda_1^n f_1^n(g_1^n)^T + \lambda_2^n f_2^n(g_2^n)^T$, 则以下结论成立

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^n = \lambda_i, i=1, 2;$$

$$(2) \text{适当地选择 } f_i^n, g_i^n \text{ 的符号, 有}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i^n = f_i, \lim_{n \rightarrow \infty} g_i^n = g_i, i=1, 2$$

定理的具体证明见附录。

3 超分辨率算法

由定理 3 可知最优分解过程是寻求特征向量的过程。给定图像的 $M \times N$ 采样矩阵 F , 给出了具体的超分辨率处理算法流程 (图 1)。

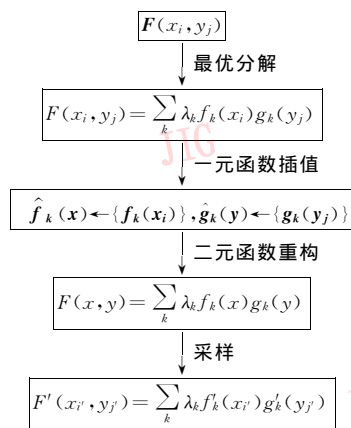


图 1 算法流程

具体的算法步骤为:

(1) 计算矩阵 $F^T F$ 的特征值 $\lambda_i (\{\lambda_i\} \text{ 单降})$ 及相应的特征向量 g_i ;

(2) 给定误差限 ϵ , 通过 $\|F\|^2 - \sum_{i=1}^k \lambda_i < \epsilon$ 来截取相应的特征值的个数 k ;

(3) 计算相应的 $f_i = F g_i$;

- (4) 进行规范化使得 $\|f_i\| = \sqrt{M}, \|g_i\| = \sqrt{N}$, $i=1,2,\cdots,k$;
- (5) 使用三次样条函数拟合 $f_i, g_i, i=1,2,\cdots,k$;
- (6) 对 f_i, g_i 进行再采样得 $f'_i, g'_i, i=1,2,\cdots,k$;
- (7) 合成图像, $F' = \sum_{i=1}^k \lambda_i f'_i g'^T_i$ 。

注:当最优分解因子 f_i, g_i 都是“光滑“的且变化曲率半径较大时,步骤 5 中使用三次样条函数进行拟合是合适的。因为此处主要是为了说明基于一维分解的超分辨的可行性,所以这里简单的选取三次样条函数。实际处理过程中,应当根据最优分解因子 f_i, g_i 的特性,采用相应的插值方法。

4 实算例子

- 例 1 取灰度图像大小为 372×372 ,对其间隔采样然后再插值。使用最优表达,取 $k=186$ 。对分解因子使用三次样条函数^[4]来进行插值,并将结果与直接放大的结果进行了对比(图 2)。
- 例 2 取灰度图像大小为 200×200 ,对其间隔采样然后再插值。使用最优表达,取 $k=100$ 。对分解因子使用三次样条函数来进行插值。并将结果与直接放大的结果进行了对比(图 3)。

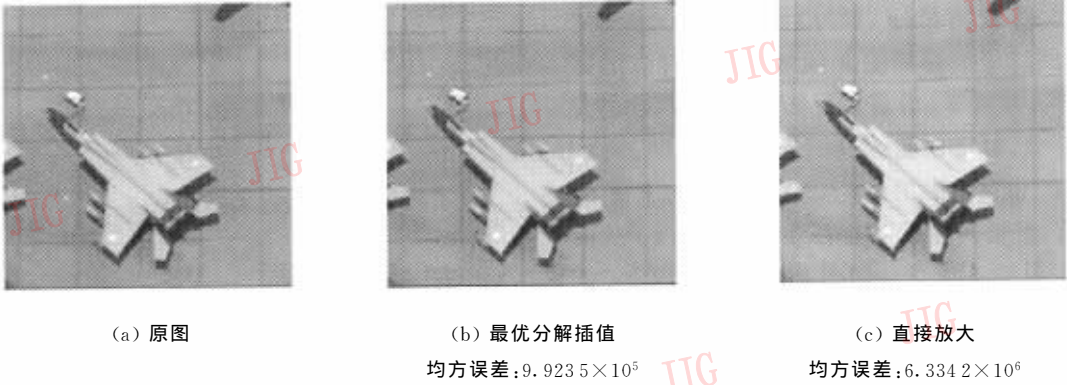


图 2 最优分解插值



图 3 最优分解插值

通过以上两例可以看出,寻求图像在 L_2 范数意义下的近似最优表达,将二维图像数据的超分辨问题,转化为一维分解的超分辨问题在实际中是可行的。并且由于最优分解充分考虑了图像本身的特性从而会有更好的效果。

5 结 论

本文的超分辨方法主要基于两点:图像的最优

一维分解和一元函数的超分辨(以三次样条函数为例)。因此其他各种一元函数超分辨方法都可以应用。同时利用这种分解还可应用于其他图像处理问题中,也就是说图像的最优一维分解提供了一种新的图像处理的基础。虽然本文的讨论仅限于一元、二元函数,但所有的过程都可扩展到任意维甚至只有表面含义的数据集,而没有本质的困难。由于这样可以将高维数据处理转化为较低维数据处理,从而只要数据来源合适,则可在一定程度上减少维数灾

难^[5]的问题。此外就图像数据而言,可能将最优分解系数应用于图像识别、分类、噪声抑制方面;将最优分解因子应用于噪声抑制、图像压缩等方面。

参考文献

- 1 Bracewell R N. The Fourier Transform and its Applications [M]. New York: McGraw-Hill, 1986.
- 2 Daubechies I. Ten lectures on wavelets [A]. In: Society for Industrial and Applieal Mathematics [C], Philadelphia, PA, USA, 1992.
- 3 宋健. 高维函数和流形在低维可视空间中的最优表达[J]. 科学通报, 2001, 46(12): 977~984.
- 4 李岳生. 样条与插值[M]. 上海科学技术出版社, 1983.
- 5 Huber P J. Projection pursuit [J]. Annals of statistics, 1985, 13(2): 435~475.

附录:定理4的证明

引理1 若 $F(x, y) \in C^2(\Omega)$, $F(x, y) =$

$\sum_{i=1}^2 \lambda_i f_i(x) g_i(y)$ 为其相应的分解式。

其中, $\lambda_1 > \lambda_2$, 并且 $f_i(x), g_i(y)$ 满足规范化条件:

$$\|f_i(x)\|_2 = \|g_i(y)\|_2 = 1$$

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \langle g_1(y), g_2(y) \rangle = 0 \quad i=1, 2$$

若 $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1, 0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ 为区间 $[0, 1]$ 的两个等距划分, 则有下列结论成立:

(1) $F^T F$ 的特征向量具有形式 $g^n = l_1^n g_1(n) + l_2^n g_2(n)$ 。其中, $g_i(n)$ 代表 $g_i(y)$ 的容量为 n 的采样向量;

(2) 若 $(g^n)^T g^n = n$, 则 $\{l_1^n\}, \{l_2^n\}$ 皆为有界序列;

(3) 对 FF^T 也有一致的结论。

证明 记 $b_{ij}^n = g_i^T(n) g_j(n), a_{ij}^n = f_i^T(n) f_j(n), i, j=1, 2$ 。

由于连续函数的本征函数是连续的, 故 $f_i(x), g_i(y) \in C^2([0, 1]), i=1, 2$

此外由已知易见

$$F^T F = \lambda_1^2 a_{11}^n (g_1(n) g_1^T(n) + g_2(n) g_2^T(n)) + \lambda_2^2 a_{22}^n (g_1(n) g_1^T(n) + g_2(n) g_2^T(n))$$

由定理3知最优分解因子为 $F^T F$ 的特征向量, 故有

$$g^n = l_1^n g_1(n) + l_2^n g_2(n) \quad (3)$$

由 $(g^n)^T g^n = n$ 得

$$\frac{(l_1^n)^2 g_1^T(n) g_1(n)}{n} + \frac{2l_1^n l_2^n g_1^T(n) g_2(n)}{n} +$$

$$\frac{(l_2^n)^2 g_2^T(n) g_2(n)}{n} = 1 \quad (4)$$

若有一无界, 不妨设为 $\{l_1^n\}$, 则由规范化条件得

$$\exists n_k \text{ s.t. } \frac{g_1^T(n_k) g_1(n_k)}{n_k} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{g_2^T(n_k) g_2(n_k)}{n_k} \geq \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{g_1^T(n_k) g_2(n_k)}{n_k} \right| \leq \frac{1}{4}$$

则式(4)右边 $\geq \frac{1}{2} ((l_1^{n_k})^2 - |l_1^{n_k}| |l_2^{n_k}| + (l_2^{n_k})^2) \geq ((l_1^{n_k})^2 + (l_2^{n_k})^2)/4 \rightarrow +\infty$, 与式(4)矛盾。

故结论2成立, 同理可知结论3成立。

引理2 条件同引理, 若 g^n 为 $F^T F$ 的最大特征向量, 则有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{l_2^n}{l_1^n} \right| < +\infty$; 若 g^n 为 $F^T F$ 的次大特征向量, 则有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{l_1^n}{l_2^n} \right| < +\infty$ 。

证明 记 $b_{ij}^n = g_i^T(n) g_j(n), a_{ij}^n = f_i^T(n) f_j(n), i, j=1, 2$ 。

其中, $g_i(n)$ 代表 $g_i(y)$ 的容量为 n 的采样向量, $f_i(n)$ 代表 $f_i(x)$ 的容量为 n 的采样容量。记 l_{ij}^n 表示采样为 n 时, 采样矩阵的第 i 个分解因子对应的第 j 个连续分解因子采样向量的系数。

反证, 若不然, 由引理1知 l_{11}^n, l_{12}^n 皆有界, 故 $\exists n_k$ s.t. $|l_{11}^{n_k}| \rightarrow 0, |l_{12}^{n_k}| \rightarrow 1$ 。进一步由 $F^T F g_1^n = \lambda_1^n g_1^n$ 可知, $\lambda_1^{n_k} \rightarrow \lambda_2$ 。

再由正交性知: $l_{11}^n l_{21}^n b_{11}^n + l_{12}^n l_{21}^n b_{12}^n + l_{11}^n l_{22}^n b_{21}^n + l_{12}^n l_{22}^n b_{22}^n = 0$ 。

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_{22}^n = 0$ 。由式(4)可以看出 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |l_{21}^n| = 1$, 同样由 $F^T F g_2^n = \lambda_2^n g_2^n$ 可知, $\lambda_2^{n_k} \rightarrow \lambda_1$, 从而 $\lambda_1 \leq \lambda_2$ 与已知 $\lambda_1 > \lambda_2$ 矛盾。

故结论成立。

定理4的证明: 记 $b_{ij}^n = g_i^T(n) g_j(n), a_{ij}^n = f_i^T(n) f_j(n)$, 简记 $g_i = g_i(n), f_i = f_i(n), (i, j=1, 2)$ 。

由引理1可知

$$(F^T F)(l_1^n g_1 + l_2^n g_2) = [\lambda_1^2 a_{11}^n (l_1^n b_{11}^n + l_2^n b_{12}^n) + \lambda_1 \lambda_2 a_{12}^n (l_1^n b_{12}^n + l_2^n b_{22}^n)] g_1 + [\lambda_2^2 a_{22}^n (l_1^n b_{12}^n + l_2^n b_{22}^n) + \lambda_1 \lambda_2 a_{21}^n (l_1^n b_{11}^n + l_2^n b_{21}^n)] g_2 = n^2 (\lambda^n)^2 (l_1^n g_1 + l_2^n g_2) \quad (5)$$

若 g^n 为最大特征向量, 将式(5)两侧左乘以 g_1^T 后令 $n \rightarrow +\infty$ 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_1^2 - (\lambda_1^n)^2) l_1^n = 0$$

结合引理2知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_1^n)^2 = \lambda_1^2$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^n = \lambda_1$ 。同理将

式(5)两侧左乘以 g_2^T 后令 $n \rightarrow +\infty$ 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_2^2 - (\lambda_1^n)^2) l_2^n = 0$$

从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_2^n = 0$, 进一步可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (l_1^n)^2 = 1$ 。

故适当的选择 g_1^n 的符号, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_1^n = g_1$ 。同理可知在相同意义下有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1^n = f_1$ 。

若 g'' 为次大特征向量, 同理可知结论成立。



谭 璐 1977 年生, 2000 年于山东师范大学获应用数学专业学士学位, 现为国防科技大学数学与系统科学系博士研究生。主要研究领域为高维数据处理和数据融合。



朱矩波 1967 年生, 国防科技大学数学与系统科学系副教授, 硕士生导师, 1992 年于上海复旦大学获计算数学专业硕士学位。研究领域为测量数据建模与参数估计、信号与信息处理等。



吴 翊 1948 年生, 国防科技大学数学与系统科学系教授, 博士生导师, 1988 年于国防科学技术大学获概率统计专业硕士学位。研究领域为数据融合、随机控制、实验系统分析与评估等。