



关于有限 p - 群的正规闭包的一些条件

吕恒^①, 周伟^{①*}, 郭秀云^②

① 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;

② 上海大学数学系, 上海 200444

E-mail: lvh529@sohu.com, zh_great@swu.edu.cn, xyguo@shu.edu.cn

收稿日期: 2012-12-22; 接受日期: 2013-05-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11001226, 11271301 和 11071155) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: XDJK2012B006) 资助项目

摘要 Berkovich 提出了研究满足下列条件的有限 p - 群 G , 对于 G 的每一个非正规子群 H 满足 $(N_1) \exp(H) = \exp(H^G)$; $(N_2) |H^G : H| \leq p$; $(N_3) H^G = HG'$. 本文首先研究满足条件 (N_3) 的有限 p - 群, 然后讨论满足条件 (N_1) , (N_2) 和 (N_3) 的有限 p - 群.

关键词 有限 p - 群 正规闭包 亚循环 p - 群

MSC (2010) 主题分类 20D15

1 引言

本文只考虑有限 p - 群. 令 G 为群, G 的子群 H 在 G 中的正规闭包 H^G 定义为 G 中的包含 H 的最小正规子群. 对于这类特殊的正规子群加以限制会对整个群的结构产生影响. 例如, 若对于每一个子群 H 都有 $H^G = H$, 则 G 就成为了 Dedekind 群. 此类群的详细结构刻画很早就给出, 同时有许多的应用, 而且对于此类群有许多推广^[1,2].

Berkovich^[3] 提出了研究满足下列条件的有限 p - 群 G , 对于每一个非正规的子群 H 满足 $(N_1) \exp(H) = \exp(H^G)$; $(N_2) |H^G : H| \leq p$; $(N_3) H^G = HG'$. 此问题为文献 [3] 中最后一节的问题 148. 一般说来, 一个 p - 群未必满足上面三个条件中的一个, 当然 Dedekind 群满足所有的条件.

本文称一个有限 p - 群 G 是 N_i - 群, 如果 G 满足条件 (N_i) ($i = 1, 2, 3$). 容易看出, 正则 p - 群^[4] 满足条件 (N_1) . 目前, 对于 N_2 - 群已有一些研究. Herzog 等人^[2] 研究了 J - 群的性质. 群 G 称为 J - 群, 如果对于 G 中的每一个元素 x 满足 $\langle x \rangle \triangleleft G$, 或者对于任意 $g \in G - N_G(\langle x \rangle)$, 都有 $\langle x, x^g \rangle \trianglelefteq G$. 在文献 [5,6] 中, 一类 $BI(p^m)$ - 群 (bounded index(p^m)- 群, 循环子群在其正规闭包中的指数 $\leq p^m$ 的群) 的性质得到了研究. 群 G 称为 $BI(p^m)$ - 群, 如果对于每一个非正规循环子群 $\langle a \rangle$ 都满足 $|\langle a \rangle^G : \langle a \rangle| \leq p^m$. 显然, N_2 - 群一定是 $BI(p)$ - 群, 并且 $BI(p)$ - 群一定是 J - 群. 文献 [6] 证明了如果 $p \geq 3$, G 是 J - 群当且仅当 G 是 $BI(p)$ - 群. 本文所用到的关于 N_2 - 群的结论主要来自上面的论文.

本文首先研究满足条件 (N_3) 的有限 p - 群, 在引理 2.2 证明群 G 一定是亚 Abel 群, 利用亚 Abel 群的换位子公式, 我们得到了满足条件 (N_3) 的 p - 群的主要性质 (定理 2.6 和 2.11).

利用这些结论, 我们研究同时满足条件 (N_2) 和 (N_3) 的有限 p - 群. 特别地, 我们分类满足 $\text{cl}(G) = 3$ 的这类群 (定理 3.4). 作为一个推论, 我们看到由条件 (N_2) 和 (N_3) 可以推出条件 (N_1) (推论 3.5).

本文的符号是标准的. 设 G 是一个有限 p - 群, 则 $H \leq G$ 表示 H 是正规子群, $\Phi(G)$ 是 Frattini 子群, $\Omega_n(G) = \langle x \in G \mid x^{p^n} = 1 \rangle$, $G^{p^n} = \langle x^{p^n} \mid x \in G \rangle$, $\text{cl}(G)$ 表示 G 的幂零类, 并且 $\exp(G)$ 为群 G 的方次数. 子群 $\gamma_i(G)$ 为 G 的下中心列的第 i 项, $G' = \gamma_2(G)$. 群 C_n 表示阶为 n 的循环群, Q_{2^m} 为 2^m 阶的广义四元数群.

2 满足条件 (N_3) 的有限 p - 群

本节主要研究满足条件 (N_3) 的有限 p - 群的性质. 这些结果将会在下节中用到.

引理 2.1 设 G 为满足 (N_3) 的有限 p - 群, 则对于任意 $a \in G$, 都有 $\langle a^p \rangle$ 在 G 中正规, 且 G 的商群也是 N_3 - 群.

证明 设 $a \in G$ 满足 $\langle a^p \rangle$ 不是正规子群, 则 $\langle a^p \rangle^G = \langle a^p \rangle G'$. 显然, $\langle a \rangle$ 在 G 中不正规. 令

$$H = \langle a \rangle^G = \langle a \rangle G',$$

于是 $|H/\Phi(H)| \geq p^2$, 并且 $\langle a^p \rangle^G \leq \Phi(H)$. 由于 $|\langle a \rangle G' : \langle a^p \rangle G'| \leq p$, 矛盾. 故 $\langle a^p \rangle$ 是正规子群.

令 N 是 G 的正规子群. 考虑 $\bar{G} = G/N$ 和 $\bar{x} = xN$. 如果 $\langle \bar{x} \rangle$ 在 $\bar{G}$ 中不正规, 那么, $\langle x \rangle$ 也在 G 中不正规. 由 G 是 N_3 - 群知, $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle G'$. 于是 $\langle \bar{x} \rangle^{\bar{G}} = \langle x \rangle^G N/N = \langle x \rangle G' N/N = \langle \bar{x} \rangle \bar{G}'$. 从而 G/N 是 N_3 - 群. $\square$

引理 2.2 设 G 是满足条件 (N_3) 的有限 p - 群, 则 G 是亚 Abel 群.

证明 令 G 是一个极小反例. 于是 $|G'| \geq p^3$.

情形 1 G' 含有一个型为 (p, p) 的 G - 不变子群 A . 设 $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, 其中 $|a| = |b| = p$. 若 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ 都在 G 中正规, 则由引理 2.1, 商群 $G/\langle a \rangle$ 和 $G/\langle b \rangle$ 都是 N_3 - 群. 于是由极小性, $(G/\langle a \rangle)'$ 和 $(G/\langle b \rangle)'$ 都是 Abel 群. 从而 G' 为 Abel 群, 矛盾. 于是 $\langle a \rangle$ 或 $\langle b \rangle$ 不是正规的. 不失一般性, 设 $\langle a \rangle$ 不正规. 于是 $\langle a \rangle^G \neq \langle a \rangle$, 从而由 $|A| = p^2$ 且 $A \leq G$, 有 $\langle a \rangle^G = A$. 又由 $G' \leq \langle a \rangle G' = \langle a \rangle^G$, 从而 G' 为 Abel 群, 矛盾.

情形 2 G' 没有 G - 不变的 (p, p) 型子群. 由文献 [3, 引理 1.4], G 为 2- 群, 且 G' 同构于二面体群, 或者广义四元数群, 或者半二面体群. 若 $|G'| = 2^3$, 则由 G 是 2- 群, G' 一定含有一个 G - 不变的 2^2 阶子群 A . 从而 $|G : C_G(A)| \leq 2$. 于是 $G' \leq C_G(A)$. 由 $A \leq G'$, 有 G' 为 Abel 群, 矛盾. 因此, 只需考虑 $|G'| = 2^{n+1} \geq 2^4$. 由文献 [3, 定理 1.2], G' 只有一个阶为 2^n 的循环子群 C . 于是 $C \leq G$ 且 $G/C_G(C)$ 为 Abel 群. 从而 $G' \leq C_G(C)$. 同理, 由 $C \leq G'$ 和 $|G' : C| = 2$, 我们得到 G' 是 Abel 群, 矛盾. $\square$

对于亚 Abel 群 G 和正整数 m 和 n , 下面的公式^[7] 是众所周知的,

$$[a^m, b] = \prod_{i=1}^m [ia, b]^{(m)_i}, \quad [a, b^n] = \prod_{j=1}^n [a, jb]^{(n)_j},$$

其中

$$[ia, jb] = [a, b, \underbrace{a, \dots, a}_{i-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{j-1}].$$

由于本文只需要用到 G 是亚 Abel p - 群且 $\text{cl}(G) \leq 3$, 为了方便, 我们给出下面的结论.

引理 2.3 设 G 是 $\text{cl}(G) \leq 3$ 的亚 Abel p - 群. 对于 $a, b \in G$, 有

$$[a^p, b] = [a, b]^p [a, b, a]^{(2)}, \quad [a, b^p] = [a, b]^p [a, b, b]^{(2)}.$$

引理 2.4 设有限 p -群 $G = \langle a, b \rangle$ 满足 G' 是阶为 p^2 的循环群, 其中 $p \geq 3$, 则存在 a_1, b_1 满足 $G = \langle a_1, b_1 \rangle$, 并且 $\langle a_1 \rangle \cap \langle b_1 \rangle = 1$, $G' = \langle [a_1, b_1] \rangle$.

证明 由 G' 循环可知, G 是正则的 [3, 定理 7.1(c)]. 令 $c = [a, b]$. 由正则性知, $G' = \langle c \rangle$. 设 $|a| = p^m$, $|b| = p^n$. 不失一般性, 设 $n \geq m$. 对 m 进行归纳.

由于 G 正则, 从 $G' \leq \langle a \rangle^G$ 可知, $m \geq 2$. 设 $|a| = p^2$ 并且 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$, 则 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^p \rangle$, 并且 $\langle a^p \rangle \leq Z(G)$. 由文献 [3, 定理 7.1(e)], $1 = [a^p, b] = [a, b]^p = c^p$, 矛盾. 因此, 若 $|a| \leq p^2$ 或 $|b| \leq p^2$, 证明已完成.

现考虑 $m \geq 3$. 假设 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$, 则 $a^{p^{m-1}} = b^{dp^{n-1}}$, 其中 $(d, p) = 1$. 令 $a_0 = ab^{-dp^{n-m}}$. 由正则性知,

$$a_0^{p^{m-1}} = a^{p^{m-1}} b^{-dp^{n-1}} e^{p^{m-1}},$$

其中 $e \in \langle c \rangle$. 由 $|c| = p^2$, 可得 $a_0^{p^{m-1}} = 1$, 并且 $G = \langle a_0, b \rangle$. 由归纳假设, 存在 a_1 和 b_1 满足要求. $\square$

引理 2.5 设有限 p -群 G 满足 (N_3) , 其中 $p \geq 3$, 则 G' 不能是阶 $\geq p^2$ 的循环群.

证明 不失一般性, 设 G' 是 p^2 阶循环群. 显然, $\text{cl}(G) \leq 3$. 由于 p 是奇素数, G 是正则的. 于是存在 $a, b \in G$ 满足 $[a, b] = p^2$. 由引理 2.4, 存在 $a, b \in G$ 满足 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ 和 $G' = \langle c \rangle$, 其中 $c = [a, b]$. 由于 $\text{cl}(G) \leq 3$ 和 $|G'| = p^2$, 根据引理 2.3, 有

$$[a^p, b] = [a, b]^p [a, b, a]^{(p)} = c^p, \quad [a, b^p] = [a, b]^p [a, b, b]^{(p)} = c^p.$$

由引理 2.1, $\langle a^p \rangle \trianglelefteq G$ 且 $\langle b^p \rangle \trianglelefteq G$. 于是由 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ 可知, $[a^p, b] = [a, b^p] \in \langle a^p \rangle \cap \langle b^p \rangle = 1$. 因此, $[a^p, b] = [a, b^p] = c^p = 1$, 矛盾于 $|c| = p^2$. $\square$

定理 2.6 设有限 p -群 G 满足 (N_3) , 其中 $p \geq 3$, 则

- (1) G' 是初等 Abel 群;
- (2) $\text{cl}(G) \leq 3$;
- (3) $G^p \leq Z(G)$.

证明 (1) 假设 G' 不是初等 Abel p -群. 由引理 2.2, G' 是 Abel 群. 首先证明对于任意 $g \in G'$ 都有 $\langle g \rangle \trianglelefteq G$.

若 $u \in G'$ 且 $|u| = p$, 则 $\langle u \rangle^G \leq \Omega_1(G') \trianglelefteq G$. 由 G 是 N_3 -群可知, $\langle u \rangle \trianglelefteq G$. 从而 $\Omega_1(G') \leq Z(G)$.

令 $z \in G'$ 满足 $|z| = p^n \geq p^2$. 假设 $\langle z \rangle$ 在 G 中不正规. 由条件 (N_3) , $G' = \langle z \rangle^G$. 对于每个 $g \in G$, 有 $z^g = zw$, 其中 $w \in \gamma_3(G)$, 且由 g 唯一决定. 由引理 2.2, G' 是 Abel 群, 从而 $(z^p)^g = (z^g)^p = z^p w^p$. 根据引理 2.1, $\langle z^p \rangle \trianglelefteq G$. 于是 $w^p \in \langle z \rangle$ 且 $\langle z, w \rangle = \langle z \rangle \times \langle w_1 \rangle$, 其中 $w_1^p = 1$. 从而 $G' = \langle z \rangle \times E$, 其中 E 是初等 Abel p -群. 令 $M = \Omega_{n-2}(\langle z \rangle) \times E$, 则 $M \trianglelefteq G$ 且 $(G/M)'$ 是阶为 p^2 的循环群. 再由引理 2.1, G/N 也是 N_3 -群, 矛盾于引理 2.5. 因此, $\langle z \rangle \trianglelefteq G$, 并且对于任意 $g \in G'$ 有 $\langle g \rangle \trianglelefteq G$.

设 a 为 G' 中的阶极大的元, 则 $G' = \langle a \rangle \times C$. 令 $N = \langle a^{p^2} \rangle \times C$, 容易得到 $(G/N)' = G'/N$ 是阶为 p^2 的循环群. 由引理 2.5 也可得矛盾. 因此, G' 是初等 Abel p -群.

(2) 对于任意 $x \in \gamma_3(G)$, 若 $\langle x \rangle$ 不是 G 的正规子群, 则 $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle G' = G'$, 矛盾. 因此, $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, 且由 G' 是初等 Abel 群知, $x \in Z(G)$. 从而 $\gamma_3(G) \leq Z(G)$, 即 $\text{cl}(G) \leq 3$.

(3) 设 $a, b \in G$. 由 (1) 和 (2) 知, $[a^p, b] = [a, b]^p [a, b, a]^{(p)} = 1$. 从而对于任意 $a \in G$, $a^p \in Z(G)$. $\square$

因此, 对于 $p \geq 3$, 条件 (N_3) 对于幂零类的上界有很强的影响. 然而对于 $p=2$ 结果却不是这样的.

例 2.7 设 G 极大类 2-群, 则 G 是 N_3 -群. 这是因为极大类 2-群 G 一定含有一个指数为 2 的循环群 $\langle c \rangle$ [8, III, 11.9]. 令 $\langle a \rangle$ 为非正规子群, 则 $a \notin \langle c \rangle$ 且 $G = \langle a, c \rangle$. 由 $G/\langle a \rangle^G$ 循环, 有 $G' \leq \langle a \rangle^G$, 且 $\langle a \rangle^G = \langle a \rangle G'$.

引理 2.8 设有限 2- 群 G 满足 (N_3) . 若 $\text{cl}(G) = 2$, 则 G' 不能是阶 $\geq 2^2$ 的循环群.

证明 不失一般性, 假设 G' 是阶为 4 的循环群. 令 $G' = \langle c \rangle$, 其中 $|c| = 4$. 由引理 2.2, G' 是 Abel 群. 于是存在 $a, b \in G$ 满足 $c = [a, b]$. 我们选择 a, b 满足 $c = [a, b]$ 且 $|a| + |b|$ 极小. 因

$$[a^2, b] = [a, b^2] = c^2 \neq 1,$$

故 $a^2 \notin \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ 且 $b^2 \notin \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. 由引理 2.1, $c^2 \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. 于是 $|a| = 2^m \geq 2^3$ 且 $|b| = 2^n \geq 2^3$.

(1) 若 $m = n \geq 4$, 则由 $a^{2^{m-1}} = b^{2^{m-1}}$ 是 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ 中的 2 阶元知,

$$(ab)^{2^{m-1}} = a^{2^{m-1}} b^{2^{m-1}} c^{2^{m-2}} = a^{2^{m-1}} b^{2^{m-1}} = 1,$$

从而, $|ab| \leq 2^{m-1}$. 显然, $[a, ab] = [a, b] = c$, 矛盾于 a, b 的选取.

(2) 设 $m \geq 4$ 且 $m > n$. 同理可得 $(a^{2^{m-n}} b)^{2^{n-1}} = a^{2^{m-1}} b^{2^{n-1}} = 1$ 且 $|a^{2^{m-n}} b| \leq 2^{n-1}$. 由 $[a, a^{2^{m-n}} b] = c$ 可得矛盾.

(3) 若 $m = n = 3$, 则 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^4 \rangle = \langle b^4 \rangle = \langle c^2 \rangle$. 因 $[a^2 c, b] = c^2$ 且 $(a^2 c)^2 = a^4 c^2 = 1$, 故 $\langle a^2 c \rangle$ 不是 G 的正规子群. 由 $|a^2 c| = 2$ 知, $c \notin \langle a^2 c \rangle^G$, 矛盾. $\square$

推论 2.9 设有限 2- 群 G 满足 (N_3) . 若 $\text{cl}(G) = 2$, 则 G' 是初等 Abel 2- 群.

证明 假设 G' 不是初等 Abel 2- 群. 因 $\text{cl}(G) = 2$, 所以, $G' \leq Z(G)$, 且存在 $N \trianglelefteq G$ 满足 $N \leq G'$, 使得 G'/N 为 4 阶循环群. 考虑 $\bar{G} = G/N$. 由引理 2.1 知, $\bar{G}$ 是 N_3 - 群. $\bar{G}'$ 是 4 阶循环群, 矛盾于引理 2.8. $\square$

众所周知, 对于有限 Abel 群 G , 若 x 是 G 的极大阶元, 则 $\langle x \rangle$ 是 G 的直因子. 本文需要下面的推广.

引理 2.10 设 G 是有限 Abel p - 群, 并且 $x \in G$. 若对于满足 $|g| > |x|$ 的 G 中的元 g 都有 $\langle x \rangle \cap \langle g \rangle = 1$, 则存在群 G 的子群 G_1 使得 $G = \langle x \rangle \times G_1$.

证明 显然只需考虑 G 非循环. 若 x 是极大阶元, 结论显然成立. 故下面考虑 $|x|$ 不是极大的. 令 $|x| = p^m$. 因此, 存在 $a \in G$ 满足 $|a| > |x| = p^m$. 故 $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle = 1$.

考虑 $\bar{G} = G/\langle a^{p^m} \rangle$. 我们断言 $\bar{x}$ 满足 x 的条件. 显然, $|\bar{x}| = |x| = p^m$. 令 $g \in G$ 满足 $|\bar{g}| > |\bar{x}|$. 若 $\langle \bar{g} \rangle \cap \langle \bar{x} \rangle \neq 1$, 则存在整数 i 满足 $1 \neq \bar{x}^{p^{m-1}} = \bar{g}^{p^m i}$. 因此, 存在整数 j , 满足

$$x^{p^{m-1}} = g^{p^m i} a^{p^m j} = (g^i a^j)^{p^m}.$$

由于 $|g^i a^j| > |x|$ 且 $\langle x \rangle \cap \langle g^i a^j \rangle \neq 1$, 故得矛盾.

由归纳法, 存在 $\bar{G}_1 \leq \bar{G}$ 满足 $\bar{G} = \langle \bar{x} \rangle \times \bar{G}_1$. 令 $G_1 \leq G$ 满足 $\bar{G}_1 = G_1/\langle a^{p^m} \rangle$. 于是 $G = \langle x \rangle G_1$, 且 $G_1 \cap \langle x \rangle \leq \langle a^{p^m} \rangle$. 因为 $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, 所以, $G_1 \cap \langle x \rangle \leq \langle a^{p^m} \rangle \cap \langle x \rangle = 1$. 故有 $G = \langle x \rangle \times G_1$. $\square$

定理 2.11 设有限 p - 群 G 满足 (N_3) . 若 $\text{cl}(G) \geq 3$, 则

(1) 存在 $a, b \in G$ 满足 $G = AB = \langle a, b \rangle B$, 其中 A 和 B 为 G 的正规子群, $B \cap G'$ 为 G' 的真子群且 B 的每个子群都在 G 中正规;

(2) 更进一步, 若 G' 是初等 Abel 群, 则 $\Omega_1(Z(G)) \leq G'$, 且 (1) 中的子群 B 或者是循环群, 或者 $B \cong Q_8$, 其中 $p = 2$.

证明 (1) 首先考虑 $|G'| = p^2$ 的情形. 此时 $\text{cl}(G) = 3$. 令 $M \leq G' \cap Z(G)$ 且 $|M| = p$, 则 M 正规且 $|G' : M| = p$. 由 G 是 N_3 - 群, 故存在 $c \in G$ 满足 $G' = \langle c \rangle$ 或 $G' = \langle c \rangle^G$. 由于 $|G'| = p^2$, 故都有 $G' = \langle c \rangle M$. 令 $\bar{G} = G/M$, 则 $\bar{G}'$ 阶为 p . 由文献 [9, 引理 5.2], $\bar{G} = (A_1 * A_2 * \cdots * A_m)Z(\bar{G})$, 其中

$A_1, \dots, A_m$ 是极小非 Abel 群. 假定 $m \geq 2$. 令 $A_{k_1} = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle$, $A_{k_2} = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$, $k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$, 其中 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$. 于是有 $[\bar{a}_i, \bar{b}_j] = \bar{1}$, 则 $[a_i, b_j] \in M \leq Z(G)$, $i, j = 1, 2$. 由于 G' 是 Abel 群, 有

$$[a_1, a_2, b_j] = [a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2, b_j] = [a_1^{-1}, b_j][a_2^{-1}, b_j][a_1, b_j][a_2, b_j] = 1.$$

因为 A_i 是非 Abel 群, 所以, $[a_1, a_2] \in G' - M$, 从而 $[a_1, a_2] = c^s z_1$, 其中 $(s, p) = 1, z_1 \in Z(G)$. 因此, $[c^s z_1, b_j] = [c^s, b_j] = 1$. 于是 $[c, b_1] = [c, b_2] = 1$. 同理有 $[b_1, b_2, a_i] = 1, i = 1, 2$, 从而 $[c, a_1] = [c, a_2] = 1$. 若 $\bar{z} \in Z(\bar{G})$, 其中 $z \in G$, 由 $[a_i, z] \in Z(G), i = 1, 2$ 可得 $[c, z] = 1$. 故 $c \in Z(G)$, 从而 $\text{cl}(G) \leq 2$, 矛盾. 因此, $m \leq 1$ 且 $\bar{G} = A_1 Z(\bar{G})$.

令 $\bar{c} = cM$. 假设存在 $x \in G$ 满足 $\bar{x} \in \bar{D} - \langle \bar{c} \rangle$ 且 $\bar{x}^p = \bar{c}$. 于是对于每个 $y \in G$, 有 $[c(x^p)^{-1}, y] = 1$. 因为 $[x, y] \in M$ 且 M 为 p 阶正规子群, 所以, $[c, y] = [x^p, y] = [x, y]^p = 1$, 矛盾于 $\text{cl}(G) = 3$. 由引理 2.10, 有 $Z(\bar{G}) = \langle \bar{c} \rangle \times \bar{D}$, 其中 $\bar{D} \leq Z(\bar{G})$. 因此, $\bar{G} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \bar{D}$ 且 $\bar{D} \cap \bar{G}' = \bar{1}$.

令 $a, b \in G$ 满足 $\langle a, b \rangle M / M = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$, 且 B 满足 $\bar{D} = B / M$, 则 $G = \langle a, b \rangle B$. 令 $A = \langle a, b \rangle M$. 由 $c \notin B \cap G'$ 知, $B \cap G'$ 是 G' 的真子群.

现在考虑 $|G'| \geq p^3$. 下面证明存在正规子群 N 满足 $|G' : N| = p^2$ 且 $\gamma_3(G) \not\leq N$.

不失一般性, 假设 $|\gamma_3(G)| = p$. 由定理 2.6 和推论 2.9, 有 $G' / \gamma_3(G)$ 为初等 Abel p -群. 由引理 2.2, G' 是 Abel 群. 故 G' 是 Abel 群且 $\exp(G') \leq p^2$. 若 $|G' / \gamma_3(G)| = p$, 则可取 $N = 1$. 现假定 $|G' / \gamma_3(G)| \geq p^2$. 令 M 为 G 的 p^2 阶的正规子群且 $\gamma_3(G) \leq M$. 若 M 不循环, 则 $M = \gamma_3(G) \times \langle x \rangle$, 其中 $x \in M$. 因为 G 是 N_3 -群, 所以, $\langle x \rangle$ 正规于 G , 从而对 $G / \langle x \rangle$ 归纳找到 N . 若 M 循环, 可选择 $M_1 \leq G$ 满足 $M \leq M_1 \leq G'$ 且 $|M_1 : M| = p$. 于是 $M_1 = M \times \langle x \rangle$, 其中 $x \in G'$ 且 $|x| = p$. 由 G 是 N_3 -群, 故 $\langle x \rangle \leq G$. 同样对 $G / \langle x \rangle$ 归纳可找到 N .

因此, 若 $|G'| \geq p^3$, 都可找到正规子群 N 满足 $|G' : N| = p^2$ 且 $\text{cl}(G/N) = 3$. 由引理 2.1, G/N 是 N_3 -群. 应用上面所得的特殊情形的结果到 G/N 上知, 存在正规子群 A 和 B 满足 $N \leq A \cap B$ 且 $G/N = (A/N)(B/N)$. 更进一步, 存在 M 满足 $|G' : M| = p$, 有 $A = \langle a, b \rangle M$, $A \cap B = M$ 且 $B/M \leq Z(G/M)$. 由 $N \leq \Phi(G)$, 有 $G = AB = \langle a, b \rangle B$. 对于任意 $y \in B$, 因为 $\langle y, M \rangle \leq G$ 且 G' 不含于 $\langle y, M \rangle$ 中, 所以, $\langle y \rangle \leq G$. 因此, B 的子群都在 G 中正规.

(2) 由 $\text{cl}(G) \geq 3$, 存在 $a, b \in G$ 满足 $c = [a, b] \in G' - Z(G)$. 由于 G' 是初等 Abel 群, 所以, 对于任意 $x \in G'$, $\langle x \rangle$ 在 G 正规的充要条件是 $x \in Z(G)$. 故 $\langle c \rangle$ 不正规, 从而 $\langle c \rangle^G = G'$.

下面证明 $\Omega_1(Z(G)) \leq G'$. 假设 $x \in \Omega_1(Z(G))$, 考虑 $\langle xc \rangle$. 显然 $\langle xc \rangle$ 不正规. 由 G 是 N_3 -群, 又 $c \in G'$, 从而有 $\langle xc \rangle^G = \langle xc \rangle G' = \langle x \rangle G'$. 令

$$\langle xc \rangle^G = \langle (xc)^{g_1}, (xc)^{g_2}, \dots, (xc)^{g_s} \rangle.$$

因为 $c \in G' - Z(G)$, 所以, $c^{g_i} = cz_i$, 其中 $z_i \in G' \cap Z(G), i = 1, 2, \dots, s$. 又因为 $x \in \langle xc \rangle^G$, 所以, $x = ((xc)^{g_1})^{l_1} ((xc)^{g_2})^{l_2} \dots ((xc)^{g_s})^{l_s} = (xc)^{l_1} z_1^{l_1} (xc)^{l_2} z_2^{l_2} \dots (xc)^{l_s} z_s^{l_s}$. 从而

$$x^{1-(l_1+\dots+l_s)} = c^{l_1+\dots+l_s} z_1^{l_1} \dots z_s^{l_s}.$$

由于 $x^{1-(l_1+\dots+l_s)} \in Z(G)$ 且 $z_1^{l_1} \dots z_s^{l_s} \in Z(G)$, 有 $c^{l_1+\dots+l_s} \in Z(G)$. 因此, $l_1 + \dots + l_s$ 被 p 整除. 从而 $x \in G'$. 故 $\Omega_1(Z(G)) \leq G'$.

最后, 我们证明 B 是循环或 $B \cong Q_8$. 首先, 假设 G' 的阶是 p^2 , 从而 $\Omega_1(Z(G))$ 阶为 p . 由于 B 的子群都在 G 中正规, 故 $\Omega_1(B) \leq \Omega_1(Z(G))$. 从而 $\Omega_1(B)$ 的阶为 p , 故 B 为循环或 $B \cong Q_8$. 若

$|G'| \geq p^3$, 与 (1) 相同, 存在含于 G' 中的 G 的正规子群 N 满足 $\text{cl}(G/N) = 3$ 且 $(G/N)'$ 是阶为 p^2 的初等 Abel 群. 从而有 A 和 B 满足 $G/N = (AN/N)(B/N)$, 其中 B/N 循环或 $B/N \cong Q_8$ 且 B 的子群均正规. 若 B/N 循环, 则 $B = B_1 \times N_1$, 其中 B_1 循环且 $N_1 \leq N$. 若 $B/N \cong Q_8$, 则 $B = B_1 \times N_1$, 其中 $B_1 \cong Q_8$ 且 $N_1 \leq N$. 由 $G = AB_1N_1$ 且 $N_1 \leq \Phi(G)$, 可得 $G = AB_1$. $\square$

3 满足条件 (N_1) , (N_2) 和 (N_3) 的有限 p - 群

本节首先讨论同时满足条件 (N_2) 和 (N_3) 的群.

引理 3.1 设有限 p - 群 G 满足 (N_2) 和 (N_3) . 若 $\text{cl}(G) = 3$, 则存在 $a, b \in G$ 和 G 正规子群 B 满足 $G = \langle a, b \rangle B$, $\text{cl}(\langle a, b \rangle) = 3$, 且 B 的子群都在 G 中正规.

证明 由定理 2.11, 存在 $a, b \in G$ 和正规子群 B 满足 $G = \langle a, b \rangle B$, $\langle a, b \rangle \cap B \leq \gamma_3(G)$ 并且 B 的子群都在 G 中正规. 故只需证明 $\text{cl}(\langle a, b \rangle) = 3$.

由于 G 满足 (N_2) 和 (N_3) , 根据文献 [2, 性质 12] 和引理 2.2, 有 G' 为 Abel 群且 $\exp(G') \leq p^2$. 由于 $\text{cl}(G) = 3$, 故 G 不是 Dedekind 群, 从而存在 $x \in G$ 满足 $\langle x \rangle$ 不正规. 由 G 满足 (N_3) , 有 $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle G'$. 再由 G 满足 (N_2) , 有 $|G' : G' \cap \langle x \rangle| = p$. 从而 $G' \cong C_p \times C_p, C_{p^2}$ 或 $C_{p^2} \times C_p$.

我们断言存在 $M \trianglelefteq G$ 满足 $|G' : M| = p$ 且 $M \leq Z(G)$. 显然, 由于 $\text{cl}(G) = 3$ 且 G 是 N_3 - 群, 当 $G' \cong C_p \times C_p$ 或 C_{p^2} 结论成立. 假定 $G' \cong C_{p^2} \times C_p$. 由于 G 是 N_3 - 群, 故 $\Omega_1(G') \leq Z(G)$. 此时, 令 $M = \Omega_1(G')$. 由定理 2.11, 有 $G/M = \langle a, b \rangle BM/M$, 其中 $\langle a, b \rangle M/M = A_1, BM/M \leq Z(G/M)$. 令 $c = [a, b]$, 于是 $G' = \langle c, M \rangle$.

假设 $\text{cl}(\langle a, b \rangle) \leq 2$. 对于每一个 $g \in G$, 有 $g = xy$, 其中 $x \in \langle a, b \rangle, y \in B$. 故

$$[g, c] = [xy, c] = [x, c]^y [y, c] = [y, c].$$

由定理 2.11, $[a, y] \in M, [b, y] \in M$. 因此, $[y, c] = 1$. 从而 $\text{cl}(G) \leq 2$, 矛盾. $\square$

由于 N_2 - 群一定是 $\text{BI}(p)$ - 群, 下面的引理就是文献 [6, 引理 2.4] 的特殊情况.

引理 3.2 设 $G = \langle a, b \rangle$ 是有限 p - 群. 若 G 是非 Abel 的 N_2 - 群且 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, 则 $|G'| = p$.

显然 $\text{cl}(G) = 1$ 的群 G 满足 (N_2) 和 (N_3) . 现在研究 $\text{cl}(G) = 2$ 的群. 若 $|G'| = p$, G 满足 (N_2) 和 (N_3) . 下面的定理说明若 $p \neq 2$, 其逆成立.

定理 3.3 设有限 p - 群 G 满足 (N_2) 和 (N_3) . 若 $\text{cl}(G) = 2$, 则 $|G'| \leq p^2$. 更进一步, 若 $|G'| = p^2$, 则 $p = 2$, G' 是初等 Abel 2- 群, 且存在正规子群 N 满足 $\Omega_1(G/N) = (G/N)'$ 为 4 阶初等 Abel 群, 且 $G/N = \bar{G}$ 含有正规子群 $W \cong C_4 \times C_4$ 和指数最多为 4 的正规亚循环群 $\bar{M}$, 而且 $\bar{G}/\bar{M}$ 是初等 Abel 群.

证明 假设 $|G'| \geq p^2$. 显然 $G' \leq Z(G)$. 由 G 是 N_3 - 群, 根据定理 2.6 和推论 2.9, G' 是初等 Abel 群. 由 $|G'| \geq p^2$, G 不能是 Dedekind 群. 因此, 存在 $x \in G$ 使得 $\langle x \rangle$ 不在 G 中正规, 即 $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle G'$. 由于 G 是 N_2 - 群, 有 $|\langle x \rangle^G : \langle x \rangle| = p$, 于是 $|G'| = p^2$. 故 $G' \cong C_p \times C_p$.

对于每一个 p 阶元 $x \in G$, 若 $\langle x \rangle$ 不在 G 中正规, 则 $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle G'$. 由于 $G' \leq Z(G)$, 故 $\langle x \rangle \cap G' = 1$, 且 $|\langle x \rangle^G : \langle x \rangle| = |G' : \langle x \rangle \cap G'| = p^2$, 矛盾. 因此, $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ 且 $x \in Z(G)$. 从而 $\Omega_1(G) \leq Z(G)$. 令 $\Omega_1(G) = G' \times E$. 考虑 $\bar{G} = G/E$. 易知, $\bar{G}$ 也满足 (N_2) 和 (N_3) , 且 $|\bar{G}'| = p^2$. 如上, 有 $Z(\bar{G}) \geq \Omega_1(\bar{G}) \geq \bar{G}'$. 若 $\Omega_1(\bar{G}) > \bar{G}'$, 则可找到 $\bar{G}$ 的正规子群 E_1 满足 $E_1 > E$, $\bar{G}/E_1$ 满足 (N_2) 和 (N_3) , 且 $|(\bar{G}/E_1)'| = p^2$. 因此, 可找到 G 的正规子群 N 满足 $(G/N)' = \Omega_1(G/N)$ 阶为 p^2 且 G/N 满足 (N_2) 和 (N_3) . 令 $\bar{G} = G/N$.

若 $p \geq 3$, 则 $\bar{G}$ 正则. 从而有

$$|\Omega_1(\bar{G})| = |\bar{G} : \bar{G}^p|.$$

由于 $|\Omega_1(\bar{G})| = p^2$, 故 $|\bar{G} : \Phi(\bar{G})| \leq p^2$, 从而存在 $a, b \in G$ 满足 $\bar{G} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$. 因为 $\text{cl}(\bar{G}) = 2$, 所以, $\bar{G}'$ 循环, 且 $|\bar{G}'| = p$, 矛盾. 从而 $p = 2$, 且 $\bar{G}$ 只有三个对合. 由于 $\text{cl}(\bar{G}) = 2$, 故 G 不是亚循环群.

与文献 [10, 定理 2.2] 一样, 令 $W \leq \bar{G}$ 为方指数 ≤ 4 的极大正规非循环的 Abel 子群. 由文献 [10, 定理 2.2], 有 $W \cong C_4 \times C_2$ 或 $W \cong C_4 \times C_4$.

若 $\bar{G}$ 没有同构于 $C_4 \times C_4$ 的正规子群, 则 $W \cong C_4 \times C_2$. 由文献 [10, 定理 2.2], 有 $C_{\bar{G}}(W) \cong C_{2^n} \times C_2$ 是 $\bar{G}$ 的真子群. 令 $C_{\bar{G}}(W) = \langle \bar{c} \rangle \times \langle \bar{d} \rangle$, 其中 $\bar{c}^{2^n} = \bar{d}^2 = 1$. 若 $n \geq 3$, 对于每一个 $\bar{x} \in \bar{G}$, 都有 $[\bar{c}^2, \bar{x}] = [\bar{c}, \bar{x}]^2 = 1$, 从而 $\bar{c}^2 \in Z(\bar{G})$. 于是 $W \leq Z(\bar{G})$, 矛盾于 $C_{\bar{G}}(W)$ 是 $\bar{G}$ 的真子群. 若 $n = 2$, 则 $C_{\bar{G}}(W) = W$. 由文献 [10, 定理 2.2], 有 $\bar{G}/C_{\bar{G}}(W)$ 是 D_8 的非平凡真子群. 若 $\bar{G}/W \cong C_2$ 或 C_4 , 则 $d(\bar{G}) \leq 2$, 且 $\bar{G}'$ 阶为 2, 矛盾. 因此, $\bar{G}/W \cong C_2 \times C_2$, 从而 $\bar{G}$ 的阶为 2^5 . 由于 $\text{cl}(\bar{G}) = 2$ 且 $\Omega_1(\bar{G}) = \bar{G}' \cong C_2 \times C_2$, 故 $G^2 \leq Z(G)$. 从而 $\exp(\bar{G}) = 4$. 易知, $\bar{G}$ 具有 $(32-4)/2 = 14$ 个 4 阶循环子群. 从而存在 4 阶循环子群 $\bar{H}$ 满足 $|\bar{G} : C_{\bar{G}}(\bar{H})| \leq 2$. 由于 $W \cong C_4 \times C_2$ 是方次数小于或者等于 4 的极大正规非循环 Abel 群, 故 $\bar{H}$ 不含于 $Z(G)$ 中, 且 $|\bar{G} : C_{\bar{G}}(\bar{H})| = 2$. 然而, $\Omega_1(\bar{G}) \leq Z(\bar{G})$, 于是 $\Omega_1(\bar{G}) \leq C_{\bar{G}}(\bar{H})$. 从而 $C_{\bar{G}}(\bar{H})$ 是 Abel 群, 矛盾. 故 W 不能同构于 $C_4 \times C_2$.

若 $W \cong C_4 \times C_4$, 由于 $\Omega_1(W) = \bar{G}' \leq Z(\bar{G})$, 根据文献 [10, 定理 2.8], 有 $\bar{G}$ 包含指数不超过 4 的正规亚循环群 $\bar{M}$ 满足 $\bar{G}/\bar{M}$ 是初等 Abel 2- 群. $\square$

易知, $Q_8 \times Q_8$ 提供了定理 3.3 中的例子.

定理 3.4 设有限 p - 群 G 满足 (N_2) 和 (N_3) . 若 $\text{cl}(G) \geq 3$, 则 $\text{cl}(G) = 3$, 且下列之一成立:

- (1) 若 $p \geq 3$, 则 $p = 3$ 且 $G = \langle a, b \mid a^3 = b^{-3}, [a, b] = c, [c, a] = a^{-3}, a^9 = b^9 = c^3 = [c, b] = 1 \rangle$;
- (2) $p = 2$ 且 $G' \cong C_2 \times C_2$, $G = H = \langle a, b \mid a^8 = b^4 = c^2 = 1, [b, a] = c, [c, a] = b^2, [b, c] = 1, a^4 = b^2 \rangle$;
- (3) $p = 2$ 且 $G' \cong C_4$, $G = H \times E$, 其中 $H = \langle a, b \mid a^8 = b^4, a^4 = b^2, a^b = a^{-1} \rangle \cong Q_{16}$, 或

$$H = \langle a, b \mid a^4 = b^8 = d^2 = 1, b^a = b^{-1}d, [d, a] = [d, b] = 1, a^2 = b^4 \rangle,$$

$E \leq Z(G)$ 为初等 Abel 2- 群.

证明 此时 $\text{cl}(G) \geq 3$. 由于 G 满足 (N_2) , 由文献 [2, 性质 10], 有 $\text{cl}(G) \leq 3$. 从而 $\text{cl}(G) = 3$. 若 $p \geq 3$, 由文献 [2, 定理 23], 有 $p = 3$ 且 $G = AB$, 其中

$$A = \langle a, b \mid a^3 = b^{-3}, [a, b] = c, [c, a] = a^{-3}, a^9 = b^9 = c^3 = [c, b] = 1 \rangle,$$

$\exp(B) = 3$ 且 $\text{cl}(B) \leq 2$. 因为 $\langle c \rangle$ 不在 G 中正规, 由 G 是 N_3 群知, $\langle c \rangle^G = \langle c \rangle G' = G'$. 显然, $G' \geq A' = \langle c \rangle \times \langle a^3 \rangle$. 由条件 (N_2) , 有 $|\langle c \rangle^G : \langle c \rangle| = 3$, 故 $G' = A'$. 若 $G \neq A$, 则存在 $d \in B - A$, 从而 $|d| = 3$. 若 $\langle d \rangle$ 不在 G 中正规, 则 $\langle d \rangle^G = \langle d \rangle A'$. 由 G 是 N_2 - 群, 有 $|\langle d \rangle^G : \langle d \rangle| = 3$, 矛盾. 从而 $\langle d \rangle \leq G$, 且 $d \in Z(G)$. 显然 $\langle cd \rangle$ 也在 G 中不正规. 由于 G 是 N_3 - 群,

$$\langle cd \rangle^G = \langle c^g d \mid g \in G \rangle \geq \langle cd, c^a d \rangle A' \geq \langle d \rangle A'.$$

但是由条件 (N_2) , 有 $|\langle cd \rangle^G : \langle cd \rangle| = 3$, 矛盾. 因此, $B = 1$, 且

$$G = A = \langle a, b \mid a^3 = b^{-3}, [a, b] = c, [c, a] = a^{-3}, a^9 = b^9 = c^3 = [c, b] = 1 \rangle.$$

现考虑 $p = 2$. 由于 G 是 N_2 - 群, 有 $\exp(G) \leq 2^3$ [6, 定理 2.8], 且 $\exp(G') \leq 4$ [2, 定理 13]. 由引理 2.2, 有 G' 是 Abel 群. 由 G 满足 (N_2) 和 (N_3) , 有 $G' \cong C_2 \times C_2$, C_4 或 $C_4 \times C_2$. 由引理 3.1, 存在 $a, b \in G$

和正规子群 B 满足 $G = \langle a, b \rangle B$, $\text{cl}(\langle a, b \rangle) = 3$. 由于 $\langle a, b \rangle$ 也是 N_2 - 群, 根据引理 3.2, 有 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$. 令 $H = \langle a, b \rangle$. 则 $H' \cong C_2 \times C_2$, C_4 或 $C_4 \times C_2$.

不失一般性, 令 a, b 为 G 中极小阶的元满足 $G = \langle a, b \rangle B$.

情形 1 $H' \cong C_2 \times C_2$. 由 $\text{cl}(H) = 3$, 有 H' 不含于 $Z(G)$ 中. 我们断言 $H' = G' \cong C_2 \times C_2$. 否则 $G' \cong C_4 \times C_2$. 由 G 是 N_3 - 群, 有 $\Omega_1(G') \leq Z(G)$, 从而 $H' = \Omega_1(G') \leq Z(G)$, 矛盾. 故此时 $G' = H' \cong C_2 \times C_2$. 假设 $y \in G - H'$ 且 $y^2 = 1$, 则由 G 是 N_2 - 群知, $\langle y \rangle \trianglelefteq G$. 又由定理 2.11, 有 $y \in G'$. 从而 $\Omega_1(G) \leq G'$.

因为 $\text{cl}(H) = 3$ 且 $H' \cong C_2 \times C_2$, 所以, $|H : C_H(H')| = 2$. 不失一般性, 设 $b \in C_H(H')$. 令 $c = [b, a]$, $d = [c, a]$, 则 $d \in Z(H) \cap Z(G)$ 且 $H' = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$. 由定理 2.11, 有 $[H, B] \leq \langle d \rangle$. 由于 $[b^2, a] = c^2 = 1$, 故 $b^2 \in Z(H)$.

由上可知, $\exp(G) \leq 2^3$ 且 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$. 故 $4 \leq |a|, |b| \leq 8$. 假设 $|b| = 2^3$. 若 $|a| = |b| = 2^3$, 由于 $\text{cl}(H) \leq 3$ 且 $H' \cong C_2 \times C_2$, 根据 Hall-Petrescu 公式, 可得 $(ab)^4 = a^4 b^4 = 1$, 且 $\langle a, b \rangle = \langle ab, b \rangle$, 矛盾. 若 $|a| = 4$, 则由 $b^2 \in Z(H)$, 有 $|ab^2| = 2$. 从而 $\langle a, b \rangle = \langle ab^2, b \rangle$, 矛盾. 因此, $|b| = 4$. 又利用定理 2.11 可知, $b^2 \in G'$, 即有 $b^2 = d$. 因为 $b^a = bc$, 所以, $b^{a^2} = (bc)^a = bc^2 d = b^{-1}$. 从而 $|a^2| \geq 4$. 因此, $|a| = 8$ 且 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle b^2 \rangle$. 故

$$H = \langle a, b \mid a^8 = b^4 = c^2 = 1, [b, a] = c, [c, a] = b^2, [b, c] = 1, a^4 = b^2 \rangle.$$

由定理 2.11, B 或是循环子群或 $B \cong Q_8$. 若 $G \neq H$, 则存在 $x \in B - H$. 于是由 $\exp(G) \leq 8$ 知, $|x| \leq 8$. 显然, 由 $\Omega_1(G) \leq G' = H' \leq H$ 知, $|x| \neq 2$. 假设 $|x| = 4$. 则由 $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ 知, $x^2 = b^2 \in \Omega_1(G) \leq G'$. 令 $K_1 = \langle a^2, b, x \rangle$. 显然, $\langle a^2, b \rangle \cong Q_8$, 于是 $K_1' \leq \langle b^2 \rangle$ 且 $\exp(K_1) = 4$. 从而 $\Omega_1(K_1)$ 是阶 ≥ 4 的初等 Abel 群. 由于已经证明 $\Omega_1(G) \leq G' = H'$, 故 $\Omega_1(K_1) = H'$, 从而 $K_1 = H' \langle a^2, b \rangle \leq H$, 矛盾. 假设 $|x| = 8$. 由 $[H, B] \leq \langle d \rangle$, 有 $x^2 \in Z(G)$ 且 $x^4 = b^2$. 即有 $|bx^2| = 2$. 因此, $G = \langle a, bx^2 \rangle B$, 矛盾于 a 和 b 的选取. 故可得

$$G = H = \langle a, b \mid a^8 = b^4 = c^2 = 1, [b, a] = c, [c, a] = b^2, [b, c] = 1, a^4 = b^2 \rangle.$$

情形 2 $H' \cong C_4$. 则 $G' \cong C_4$ 或 $C_4 \times C_2$. 首先考虑 $G' = H' \cong C_4$. 于是 $H \trianglelefteq G$. 由

$$|H : C_H(H')| = 2,$$

可假设 $b \in C_H(H')$. 令 $c = [b, a]$. 注意到此时有 $H' \cong C_4$, 故由 $H = \langle a, b \rangle$, 有 $H' = \langle c^h \mid h \in H \rangle = \langle c \rangle$. 于是由 $\text{cl}(H) = 3$ 知, $[c, a] = c^2$. 从而由 H 是 N_2 - 群知, $\langle c^2 \rangle \leq \langle b \rangle \cap \langle c \rangle$.

情形 2.1 元素 c 在 $\langle b \rangle$ 中. 此时由于 $\langle a^2 \rangle \trianglelefteq G$ 且 a, b 满足 $G = \langle a, b \rangle B$ 的极小阶元, 有 $\langle b^2 \rangle = \langle c \rangle$ 且 $|b| = 8$. 注意到 $|a| \leq 8$. 假设 $|a| = 8$. 由 $[a^2, b^2] = [a, b^2]^2 = [a, b]^4 = 1$ 知, $a^2 b^2$ 阶为 2 ($\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$). 显然, $(a^2 b^2)^a = a^2 b^{-2} \neq a^2 b^2$, 故 $\langle a^2 b^2 \rangle$ 在 G 中不正规. 由条件 (N_3) , 有 $c \in \langle a^2 b^2 \rangle^G$. 但由条件 (N_2) , 有 $|\langle a^2 b^2 \rangle^G : \langle a^2 b^2 \rangle| = 2$, 且 $\langle a^2 b^2 \rangle^G = \langle c \rangle = \langle a^2 b^2, a^2 b^{-2} \rangle$, 矛盾. 因此, $|a| = 4$, 即得 $H = \langle a, b \rangle \cong Q_{16}$.

假设 B 有 4 阶元 x 满足 $\langle x \rangle \cap H = 1$. 注意到 $H \trianglelefteq G$ 且对于任意 $x \in B$ 有 $\langle x \rangle \trianglelefteq G$. 故 $(b^2 x)^a = b^{-2} x \notin \langle b^2 x \rangle$. 现在, 对于任意 $g_1 \in H$ 且 $g_2 \in B$, 有 $[b^2 x, g_i] \in \langle a^2 \rangle, i = 1, 2$. 故 $b^2 \notin \langle b^2 x \rangle^G$, 与条件 (N_3) 矛盾.

若 B^2 不循环, 则存在阶为 4 的元 $x_1, x_2 \in B^2$ 满足 $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2 \rangle = 1$. 因此, $\langle x_1 \rangle \cap H = 1$ 或 $\langle x_2 \rangle \cap H = 1$, 矛盾. 故 B^2 循环, 从而 $B = \langle x \rangle \times E$ 或 $B = Q_8 \times E$ 且 $H \cap B = \langle a^2 \rangle$, 其中 $8 \geq |x| \geq 2$ 且 E 是初等 Abel 群.

现假设 $B = \langle x \rangle \times E$. 若 $|x| = 2$, 结论显然成立. 若 $|x| \geq 4$, 则 $H \cap B = H \cap \langle x \rangle \leq \langle b^2 \rangle$. 若 $|x| = 8$, 则有 $|bx| \leq 4$. 若 $|bx| = 2$, 易知, $\langle bx \rangle \trianglelefteq G$, 从而 $G = H \times \langle bx \rangle \times E$. 假设 $|bx| = 4$, 则 $\langle bx \rangle \cap \langle b^2 \rangle = \langle b^4 \rangle$. 若 $[bx, b^2] = 1$, 则 $|b^3x| = 2$ 且 $G = H \times \langle b^3x \rangle \times E$. 假设 $[bx, b^2] \neq 1$, 则 $\langle bx, b^2 \rangle \cong Q_8$. 注意到由 $\langle b^2 \rangle = G'$ 知, $\langle bx, b^2 \rangle \trianglelefteq G$. 由 G 是 N_3 -群, 有 $\langle bx \rangle \trianglelefteq G$. 从而 $[b^2, bx] = [b, bx]^2 = 1$, 矛盾. 若 $B = Q_8 \times E$, 同理, 可得 $G = HB = H \times E$.

情形 2.2 元素 c 不含于 $\langle b \rangle$ 中. 则 $\langle c^2 \rangle = \langle b \rangle \cap \langle c \rangle$. 若 $|b| = 4$, 则 $(b^a)^2 = (bc)^2 = b^2c^2 = 1$, 矛盾. 故 $|b| = 8$. 若 $|a| = 8$, 由 $b^{a^2} = (bc)^a = bcc^{-1} = b$, 有 $a^2 \in Z(H)$. 由于 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$, 故 $a^4 = b^4 = c^2$. 由 $(a^2c)^a = a^2c^{-1}$ 可知, $\langle a^2c \rangle$ 在 G 中不正规. 易知, $\Omega_1(\langle a^2c, c \rangle) = \langle a^2c, c^2 \rangle \trianglelefteq G$, 从而 $c \notin \langle a^2c \rangle^G$, 与 G 是 N_3 -群矛盾. 因此, $|a| = 4$. 令 $d = b^2c$, 则 $d \in Z(H)$ 且 $b^a = bc = b^{-1}d$. 于是

$$H = \langle a, b \mid a^4 = b^8 = d^2 = 1, b^a = b^{-1}d, [d, a] = [d, b] = 1, a^2 = b^4 \rangle.$$

显然, $H/\langle d \rangle \cong Q_{16}$. 由 $H \cap B$ 是 G' 的真子群, 有 $B \cap \langle d \rangle = 1$. 现在考虑商群 $G/\langle d \rangle$. 由情形 2.1 中的讨论, 可设 $G/\langle d \rangle = H/\langle d \rangle \times B/\langle d \rangle$, 其中 $B/\langle d \rangle$ 是初等 Abel 群. 由 $\langle d \rangle \cap G' = \langle d \rangle \cap H' = 1$, 有 $B \leq Z(G)$. 我们断言 $\exp(B) = 2$. 否则存在 $x \in B$ 满足 $x^2 = d$. 从而 $(b^2x)^a = b^{-2}x$. 于是 $\langle b^2x \rangle$ 不正规于 G . 但 $\langle c \rangle \cap \langle b^2x \rangle = 1$, 矛盾于 G 是 N_2 -群. 故 $B = E \times \langle d \rangle$, 其中 E 是初等 Abel 群. 从而 $G = HB = H \times E$.

情形 3 下证 G' 不同构于 $C_4 \times C_2$, 从而完成证明. 假设 $G' \cong C_4 \times C_2$. 同上考虑 $H = \langle a, b \rangle$.

若 $\langle a \rangle \trianglelefteq H$, 则由 $\text{cl}(H) = 3$, 有 $H' < \langle a \rangle$. 若 $|a| \leq 4$, 则 $H' \leq \langle a^2 \rangle$, 含于 $Z(H)$ 中. 从而 $\text{cl}(H) \leq 2$, 矛盾. 因此, $|a| = 8$. 若 $\langle b \rangle$ 不在 H 中正规, 则 $\langle b \rangle$ 不在 G 中正规. 由条件 (N_2) 和 (N_3) , 有 $G' \leq \langle b \rangle^G$ 且 $|\langle b \rangle^G : \langle b \rangle| = 2$, 也得到 $|b| = 8$. 由 $\text{cl}(H) = 3$, 有 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ 不能都正规于 H . 不失一般性, 假设 $\langle b \rangle$ 不正规于 H . 则由条件 (N_2) , 有 $|\langle b \rangle^G : \langle b \rangle| = 2$. 注意到 $\langle b \rangle^H = \langle b \rangle^G = \langle b \rangle^{G'} = \langle b \rangle \Omega_1(G')$. 于是 $G' \leq H$. 根据情形 1, H' 不同构于 $C_2 \times C_2$. 故 $H' \cong C_4 \times C_2$ 或 $H' \cong C_4$.

若 $H' \cong C_4 \times C_2$, 则 $G' = H'$. 从而 $\langle a \rangle^H = \langle a \rangle \Omega_1(G')$ 且 $\langle b \rangle^H = \langle b \rangle \Omega_1(G')$. 显然, $\Omega_1(G') \leq Z(G)$, 从而 $\langle a \rangle^H$ 和 $\langle b \rangle^H$ 是 Abel 群. 故 $\text{cl}(H) \leq 2$, 矛盾.

若 $H' \cong C_4$, 则 $\langle a \rangle \trianglelefteq H$ 或 $\langle b \rangle \trianglelefteq G$. 否则, 有 $\langle a \rangle^H = \langle a \rangle^G = \langle a \rangle \Omega_1(G')$ 且 $\langle b \rangle^H = \langle b \rangle^G = \langle b \rangle \Omega_1(G')$ 是 Abel 群, 矛盾. 令 $\langle a \rangle \trianglelefteq H$. 若 $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 4$, 则 $|H| = 2^4$. 由 $\Omega_1(G') \leq H$ 知, $H = \langle b \rangle^H = \langle b \rangle \Omega_1(G')$, 矛盾. 从而 $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$. 易知, $[a^2, b^2] = 1$, 从而 $|a^2b^2| = 2$. 由 $\text{cl}(H) = 3$, 有 $(a^2)^b = a^{-2}$. 由 $(a^2b^2)^b = a^{-2}b^2$ 可知, $\langle a^2b^2 \rangle$ 不正规于 G . 而且 $G' \cong C_4 \times C_2$, 则 $|\langle a^2b^2 \rangle^G : \langle a^2b^2 \rangle| \geq 4$, 与 G 是 N_2 -群矛盾. 因此, G' 不同构于 $C_4 \times C_2$, 从而若 $H' \cong C_4$, 则有 $H' = G'$. 这就完成了证明. $\square$

易知, 定理 3.3 和 3.4 中的群都满足条件 (N_1) . 由于满足 $|G'| \leq p$ 的有限 p -群也满足条件 (N_1) – (N_3) , 我们可得到下面的有趣的结论.

推论 3.5 设 G 是有限 p -群. 则由条件 (N_2) 和 (N_3) 可得条件 (N_1) .

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- Guo X, Wang J. On generalized Dedekind groups. *Acta Math Hungar*, 2009, 122: 37–44
- Herzog M, Longobardi P, Maj M, et al. On generalized Dedekind groups and Tarski super Monsters. *J Algebra*, 2000, 226: 690–713
- Berkovich Y. *Groups of Prime Power Order*. Berlin: Walter de Gruyter, 2008
- Hall P. A contribution to the theory of groups of prime power order. *Proc Lond Math Soc* (3), 1933, 36: 29–95

- 5 Lv H, Zhou W, Guo X. Finite 2-groups with index of every cyclic subgroup in its normal closure no greater than 4. J Algebra, 2011, 342: 256–264
- 6 Lv H, Zhou W, Yu D. Some finite p -groups with bounded index of every cyclic subgroup in its normal closure. J Algebra, 2011, 338: 169–179
- 7 Brisley W, Macdonald I D. Two classes of metabelian p -groups. Math Z, 1969, 112: 5–12
- 8 Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967
- 9 Berkovich Y. On subgroups of finite p -groups. J Algebra, 2000, 224: 198–240
- 10 Janko Z. A classification of finite 2-groups with exactly three involutions. J Algebra, 2005, 291: 505–533

Some conditions on normal closure in finite p -groups

LV Heng, ZHOU Wei & GUO XiuYun

Abstract Berkovich posed the following problem: study the finite p -group G which satisfies the conditions that, for each non-normal subgroup H of G , $(N_1) \exp(H) = \exp(H^G)$; $(N_2) |H^G : H| \leq p$; $(N_3) H^G = HG'$. In this paper, we first study the finite p -groups satisfying Condition (N_3) , and then study the finite p -groups satisfying Conditions (N_1) , (N_2) and (N_3) .

Keywords finite p -groups, normal closure, metabelian p -groups

MSC(2010) 20D15

doi: 10.1360/012011-1026