



基于雷诺平均方法的高超音速边界层转捩模拟

符松, 王亮*

清华大学航天航空学院, 北京 100084

* 联系人, E-mail: wangliang99@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2008-06-12; 接受日期: 2008-12-19

自然科学基金(批准号: 10232020, 90505005)和博士点专项基金资助项目

摘要 基于雷诺平均方法, 建立了一种合理反映扰动模态和可压缩性影响的新型 $k-\omega-\gamma$ 湍流/转捩模式, 它由关于间歇因子 γ 、脉动动能 k 及其单位耗散率 ω 的 3 个输运方程组成. 其主要特点为: (i) k 包含湍流脉动部分和非湍流脉动部分, 且对后者的模化应用了稳定性分析的结果; (ii) γ 方程的源项中构造了具有“自动判断转捩起始位置”功能的函数; (iii) 构造的新型物面法向长度尺度使该模式的所有表达式均由当地变量构成, 可以方便地应用于现代 CFD 程序之中; (iv) 该模式在完全湍流区还原为标准的 SST 湍流模式. 模式在亚音速、超音速和高超音速条件下的边界层流动中进行了验证. 计算结果表明, 该模式可应用于较宽马赫数范围, 所具有的捕捉流动转捩的性能优于国际上的现有模式.

关键词

高超音速边界层
转捩
湍流模式
间歇因子

流动的失稳、转捩是流体力学中最重要的前沿问题之一. 它不仅为理论研究所热衷, 也有着极大的应用价值. 比如, 高超音速飞行器的推进和热防护系统设计的一个关键问题就是准确预测转捩起始位置及其发展. 在高超声速巡航条件下, 飞行器的表面摩擦阻力和波阻是一个量级, 成为总阻力的重要组成部分. 延迟转捩可使燃料消耗大大降低, 也使热防护材料的选择更加灵活. 鉴于发达国家已将研制高超音速飞行器列入发展议程, 对高超音速边界层转捩的研究具有重大意义.

近年来, 随着计算机技术的迅速发展, 直接数值模拟(direct numerical simulation, DNS)、大涡模拟(large-eddy simulation, LES)以及稳定性分析方法, 如扰动方程抛物化法(parabolized stability equations, PSE), 在高超音速边界层转捩的数值模拟中扮演着愈发重要的角色^[1]. 尽管如此, 从工程实际出发, 基于线性稳定性理论(linear stability theory, LST)的 e^N 方法和基于雷诺平均(reynolds-averaged navier-stokes,

RANS)的湍流/转捩模式方法仍最为有效. 前者是目前最常用的转捩预测方法, 而后者近十年来得到了研究者的广泛关注, 因为它抓住了转捩运动的统计特性. 选取恰当的模式模拟转捩过程, 对计算条件要求不高, 计算周期短. 因此, 模式理论在目前乃至可预见的将来是解决高超音速转捩问题的十分有效的方法.

湍流/转捩模式是以湍流模式理论为基础发展起来, 通过向其中加入经过模化的转捩过程的相关信息, 实现对其模拟的目的. 这方面的研究可分为三类^[2]: 低雷诺数湍流模式及其修正形式、考虑间歇性的转捩模式以及最近出现的基于当地变量的新型模式. 在低雷诺数湍流模式中, 用来模拟黏性次层的阻尼函数经过修正之后, 具有一定的转捩预测能力. 但也有观点认为这只是一种数值上的巧合而已^[3]. 考虑间歇性的模式通过某种方式将间歇因子^[4]与湍流模式进行耦合, 在一定程度上考虑了转捩的物理机制, 可较好地模拟简单流动中的转捩过程. 但其中所包

含的非当地变量(non-local variable)使其与现代CFD方法难以协调一致. 为了解决这一问题, 近几年研究者们发展了完全由当地变量构造的新型模式, 其中有代表性的是Menter等人^[5]、Walters和Leylek^[6]以及Volino^[7]的模式.

当前的当地变量的转捩模式在亚声速范围内具有捕捉二维边界层转捩起始位置的能力, 对转捩区长度的预测还不够准确, 但工程上已可接受. 通过对模式的进一步修正, 相信可以解决这些问题. 然而, 这些模式过于依赖数值试验, 较少考虑转捩的物理机制. 由于超音速转捩机制与不可压的情形有很大区别(详见 2.3 小节), 上述模式均无法模拟超声速条件下的转捩过程. 本文的研究目的为发展一种适用于高超音速边界层的¹⁾、基于当地变量的湍流/转捩模式, 并完成相应的数值计算与结果分析.

1 基本控制方程

流动的转捩不是随机发生的. 比如在著名的雷诺圆管实验中, 当基于管道直径的雷诺数达到 2300 时, 转捩才有可能发生. 可见, 转捩过程是一种统计行为. 这是应用雷诺平均方法的前提条件.

研究可压缩流动的统计行为时, 一般使用 Favre 平均, 或称质量加权平均, 记作;

$$\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}, \quad (1)$$

其中“~”为 Favre 平均量, “—”为不可压流动中常用的时间平均、体积平均或系综平均. 一个瞬时变量 f 因而可分成平均量和脉动量两部分: $f = \tilde{f} + f'' = \bar{f} + f'$. Favre 平均形式的守恒型连续方程、动量方程、能量方程和状态方程分别为

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\rho} \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{U}_j \bar{\rho} \left(\tilde{E} + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \right) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\sigma}_{ij} \tilde{U}_i + \bar{\sigma}_{ij} \overline{u_i'' u_j''} + \overline{u_i'' \sigma_{ij}'} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{q}_j + \bar{\rho} c_p \overline{u_i'' T''} + \bar{\rho} \tau_{ij} \tilde{U}_i + \frac{\bar{\rho} u_i'' u_j''}{2} \right), \quad (4)$$

$$\bar{P} = \bar{\rho} R \tilde{T}, \quad (5)$$

其中 $\bar{\sigma}_{ij} \approx 2\bar{\mu}(\tilde{S}_{ij} - 1/3\tilde{S}_{kk}\delta_{ij})$ 为黏性应力项, $\tau_{ij} \equiv \overline{u_i'' u_j''}$ 为 Favre 平均雷诺应力关联项, 黏性热通量为 $\bar{q}_j \approx -C_p \bar{\mu} / Pr \tilde{T}_{,j}$, C_p 为定压比热, $\bar{\mu}$ 为分子黏性, Pr 为普朗特数.

在平均方程(2)~(5)中, 出现了 $\overline{u_i'' u_j''}$, $\overline{u_i'' T''}$, $\overline{u_i''}$, $\overline{u_i'' \sigma_{ij}'}$ 和 $\overline{u_i'' u_j''}$ 等未知关联项, 需要对它们进行模化、封闭. 在转捩的模拟中, 只有二阶关联项 $\overline{u_i'' u_j''}$ 和 $\overline{u_i'' T''}$ 是主要的. 本文采用传统的 B-oussinesq 假设, 将雷诺应力关联项模化为

$$\overline{u_i'' u_j''} = -2 \frac{\mu_{\text{eff}}}{\bar{\rho}} \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} k, \quad (6)$$

其中 $k = 0.5 \overline{u_i'' u_i''}$ 为总的脉动动能, μ_{eff} 为流动的有效黏性系数, 表征了边界层中的湍流脉动以及非湍流脉动(non-turbulent fluctuation)^[8]的黏性效应. 能否恰当地模化 μ_{eff} 决定了转捩问题模拟的好坏, 对此我们将在下一节详细讨论.

参照雷诺应力的表达式, 关联项 $\overline{u_i'' T''}$ 也可采用类似的扩散模型进行模化:

$$\overline{u_i'' T''} = -\frac{\nu_{\text{eff}}}{Pr_i} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}. \quad (7)$$

根据(6)和(7)式, 上述动量方程(3)和能量方程(4)可化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j}{\partial x_j} \\ = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2(\bar{\mu} + \mu_{\text{eff}}) \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) \right], \quad (8) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{U}_j \bar{\rho} \left(\tilde{E} + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \right) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\tilde{U}_i (\bar{\mu} + \mu_{\text{eff}}) \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned}$$

1) 本文不考虑高超音速边界层转捩中的壁面烧蚀、化学反应及真实气体效应, 原因是关于这些现象的实验研究尚不充分

$$+C_p \left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_{\text{eff}}}{Pr_i} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \Bigg]. \quad (9)$$

可见, 上述平均方程组在形式上与传统的涡黏性模式所采用的方程组是相同的, 从而保证在此基础上建立起来的转捩模式可以很方便地嵌入到现有的 CFD 程序之中.

2 新型转捩模式的建立

2.1 有效黏性系数的模化

如上节所述, 雷诺平均方程组中的有效黏性系数 μ_{eff} 对于转捩流动的模拟起着重要作用. 显然, 当流动发展为完全湍流时, μ_{eff} 的值应取为湍流黏性系数 μ_t ; 而在转捩之前的区域, μ_{eff} 应反映出层流边界层中的不稳定扰动波的影响. 因此, 本文对其进行模化时采用了 Warren 和 Hassan^[9] 的假设:

$$\mu_{\text{eff}} = (1 - \gamma)\mu_{nt} + \gamma\mu_t, \quad (10)$$

其中 μ_{nt} 表征了不稳定扰动波对有效黏性系数的贡献, γ 为间歇因子, 定义为流场中某一位置上流动保持为湍流的时间比例.

本文对于 μ_t 的模化采用了 SST 湍流模式^[10] (其他的涡黏性模式也是与本文模式框架相匹配的). 而模化 μ_{nt} 时, 为了避免深究扰动波的具体特性, 假设它们与湍流脉动是相似的^[9]:

$$\mu_{nt} = C_\mu \bar{\rho} k \tau_{nt}, \quad (11)$$

其中 C_μ 为模式常数¹⁾, k 为总的脉动动能, τ_{nt} 为对应于不同模态不稳定扰动波的时间尺度, 它的模化应用了稳定性理论的结果.

2.2 脉动动能的输运方程

Mayle 和 Schulz^[8] 首先提出并模化了关于非湍流脉动动能 (k_L) 的输运方程, 其模化形式与湍动能 (k_T) 方程的十分相似. 我们认为, 在模式中分别建立非湍流脉动动能和湍流脉动动能的输运方程并无必要. 实际上, 转捩中的脉动既有非湍流脉动也有湍动脉动. 因此, 本文以间歇因子作为权重, 提出统一的脉动动能输运方程:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = D_k - \underbrace{\widetilde{u_i u_j}}_{P_k} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - \varepsilon, \quad (12)$$

其中 $k = k_L + k_T$; D_k , P_k 和 ε 分别为 k 方程中的扩散项、生成项和耗散项. P_k 可表达为

$$P_k = 2\mu_{\text{eff}} \left(\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \tilde{S}_{ll} \right) + \frac{2}{3} \tilde{S}_{kk} \bar{\rho} k, \quad (13)$$

ε 通过求解耗散方程 (在完全湍流区即为 SST 湍流模式中的 ω 方程) 得到, 而 D_k 可写作:

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \mu_{\text{eff}}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\}. \quad (14)$$

2.3 转捩模拟中的长度和时间尺度

2.3.1 长度尺度

如 2.1 节所述, 本文工作的重点在于模化 (11) 式中涉及的时间尺度 τ_{nt} . 根据实验观测和理论分析的结果^[11], τ_{nt} 与边界层厚度相关. 然而, 现代 CFD 程序往往是并行且基于非结构网格的, 这导致在边界层内的积分十分复杂. 为了避免这些积分变量的出现, 本文构造物面法向的平均流动长度尺度为

$$\zeta = d^2 \Omega / (2E_u)^{0.5}, \quad (15)$$

其中 $E_u = 0.5 \times (U - U_w)_i (u - U_w)_i$, 为当地流体相对壁面的平均流动动能, Ω 为平均涡量的模, d 为物面距离. 推导该长度尺度根据的是由 Wilcox^[12] 提出并应用的关联式:

$$Re_{v, \max} = \left(\frac{\rho d^2 \Omega}{\mu} \right)_{\max} = 2.193 \left(\frac{\rho U \theta}{\mu} \right) = 2.193 Re_\theta, \quad (16)$$

其中 U 为当地流体平均速度, θ 为边界层的动量厚度. (16) 式适用于零压梯度的不可压缩平板边界层 (Blasius 边界层) 流动. 因此, (15) 式定义的长度尺度 ζ 能否适用于其他流动还有待于进一步的检验 (见第三节). 接下来, 定义湍流长度尺度为

$$l_T = k^{0.5} / \omega. \quad (17)$$

于是转捩模拟中的有效长度尺度可表示为

$$\zeta_{\text{eff}} = \min(\zeta, C_l l_T). \quad (18)$$

1) 本文中以大写字母 C 加下标表示模式常数, 下同

2.3.2 时间尺度

超音速边界层流动与亚音速流动的一个重要区别是其中出现了广义拐点 y_s , 此处有:

$$\frac{d}{dy} \left(\rho \frac{dU}{dy} \right) = 0. \quad (19)$$

接下来我们定义当地相对马赫数:

$$M_{rel} = (U - C_r) / a, \quad (20)$$

其中 a 为当地声速, C_r 为扰动的相速度. 根据线性稳定性理论^[13], 在边界层中 $|M_{rel}| > 1$ 的区域, 存在着无数的中性模态, 其中第一模态扰动对应于不可压流动中的 Tollmien-Schlichting 波, 而其他的高阶模态中最不稳定的是第二模态. 于是, 时间尺度 τ_{nt} 可表示为

$$\tau_{nt} = \begin{cases} \tau_{nt1}, & |M_{rel}| \leq 1; \\ \tau_{nt1} + \tau_{nt2}, & |M_{rel}| > 1, \end{cases} \quad (21)$$

其中下标 $nt1$ 和 $nt2$ 分别为第一模态和第二模态. 而且, 这些模态具有相同相速度, 均等于广义拐点处流体的平均速度.

线性稳定性理论和实验观测均证实第一模态扰动在中、低马赫数流动的转捩中占统治地位, 而第二模态扰动在高马赫数时起主要作用^[13]. 根据 Walker 给出的具有最大增长率的第一模态扰动的频率公式^[14], τ_{nt1} 可模化为

$$\tau_{nt1} = C_2 \cdot \zeta_{eff}^{1.5} / [(2E_u)^{0.5} \nu]^{0.5}, \quad (22)$$

同时, 由于第二模态扰动的波长大约为边界层名义厚度的两倍^[9], τ_{nt2} 可表示为

$$\tau_{nt2} = C_3 \cdot 2\zeta_{eff} / U(y_s). \quad (23)$$

2.4 间歇因子的输运方程

在转捩模拟中采用间歇因子 γ 的输运方程已成为研究者的共识^[3]. 本文模式中的间歇因子输运方程为

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \gamma)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \mu_{eff}) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right\} + P_\gamma - \varepsilon_\gamma, \quad (24)$$

其中 P_γ 和 ε_γ 分别为 γ 方程的生成项和耗散项.

除了流动中存在较大逆压梯度的情形, 转捩区内间歇因子的发展过程具有普适性, 可采用 Dhawan 和 Narasimha 的经验公式^[4]很好地描述:

$$\gamma = 1 - \exp \left[-(x - x_t)^2 n \sigma / U_e \right] \quad (x > x_t), \quad (25)$$

其中 n 为湍斑的生成速率, σ 为表征湍斑传播速度的参数, 下标 t 为转捩起始点. 对上式求导, 有

$$\frac{d\gamma}{dx} = 2 \sqrt{\frac{n\sigma}{U_e}} (1 - \gamma) [-\ln(1 - \gamma)]^{0.5}. \quad (26)$$

若定义无量纲的湍斑生成速率 $\hat{n} = n\nu^2 / U^3$, 则根据 Mayle 的经验公式^[15], $\hat{n}\sigma$ 只与来流湍流度相关, 其在转捩区内为常数. 以此为基础, 生成项和耗散项可分别表示为

$$P_\gamma = C_4 \rho F_{onset} [-\ln(1 - \gamma)]^{0.5} \left(1 + C_5 \frac{k^{0.5}}{(2E_u)^{0.5}} \right) \frac{d}{\nu} |\nabla E_u|, \\ \varepsilon_\gamma = \gamma P_\gamma, \quad (27)$$

其中函数 F_{onset} 与转捩起始位置直接相关:

$$F_{onset} = 1.0 - \exp \left(-C_6 \frac{\zeta_{eff} k^{0.5} |\nabla k|}{\nu |\nabla E_u|} \right). \quad (28)$$

2.5 本文模式的总体框架

总之, 本文模式包含如下的关于脉动动能 k 和 ω 的单位耗散率 ω 以及间歇因子 γ 的 3 个输运方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \mu_{eff}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + P_k - \varepsilon, \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \sigma_\omega \mu_{eff}) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right\} + P_\omega - D_\omega + C d_\omega, \\ \frac{\partial(\rho \gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \gamma)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \mu_{eff}) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right\} + P_\gamma - \varepsilon_\gamma. \end{aligned} \quad (29)$$

在完全湍流区 ($\gamma = 1$), 上述方程组就还原为 SST 湍流模式^[10]. 而且, 本文对其中的 k 方程进行了可压缩修正^[16,17].

本文在有效黏性系数(或者说雷诺应力)中将间歇因子 γ 作为湍流脉动部分和非湍流脉动部分的权重, 以实现转捩过程的模拟. 并且, 流场中 γ 开始增长的位置(对应于转捩的起始位置)由 γ 方程源项中的函数 F_{onset} 决定, 而 F_{onset} 的值又取决于 k (非湍流脉动部分)和平均流动的发展程度. 本文的模式常数值均见表 1.

表 1 本文模式常数

C_μ	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
0.09	700	0.35	0.005	8×10^{-5}	0.07	1.2

3 模式在层流区的数值特性分析

本节中我们利用不可压平板与超音速绝热平板边界层流的相似解, 考查本文模式对于转捩起始位置的预测能力, 即在转捩前的区域内考查本文对于各扰动模态时间尺度的模化效果.

3.1 存在压力梯度的不可压平板边界层

为了检验本文模式在存在压力梯度的不可压边界层流动中的数值特性, 我们通过求解 Falkner-Skan 边界层的相似解, 考查了 2.3 节中的模化项 ζ 和 τ_{nt1} 随外流压力梯度的变化. 若假设外流速度 U_e 与 x^m 成正比(x 为流向坐标), 则无量纲的流函数 $f(\eta)$ 满足常微分方程:

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{m+1}(1-f'^2) = 0, \quad (30)$$

相似变量 η 可表示为

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U_e}{\nu_e x}}, \quad (31)$$

其中下标 e 表示边界层外缘的值, 该方程的边界条件为

$$\eta = 0: f' = f = 0; \quad \eta \rightarrow \infty: f' = 1. \quad (32)$$

平均流动 $U = f' U_e \sim f' x^m$. 表 2 给出了本文所涉及的 m 值, 其中的 Hartree 参数 $\beta = 2m/(m+1)$. 上述方程的物理背景是顶角为 $\beta\pi$ 的二维楔绕流流场中滞止区附近的流动. $m = x(dU_e/dx)/U$, 表征了外流中的压力梯度. 图 1 显示了 f' 随 m 的变化. 可见, 当 $m < 0$ 时, 流动减速, 剖面存在拐点; $m = 0$ 时(Blasius 剖面)

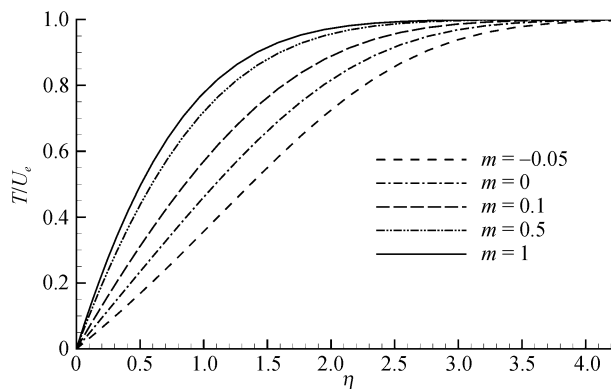


图 1 速度剖面随外流压力梯度(m)的变化

$$\eta = y[(m+1)U_e/(2\nu_e x)]^{0.5}, \quad m = x(dU_e/dx)/U$$

和 $m > 0$ 时则没有拐点.

图 2 显示了不同外流压力梯度下以边界层名义厚度 δ 无量纲的法向长度尺度 ζ 的比值. 可见, 随着 m 的减小, 该比值剖面的峰值增大, 且略向边界层外缘移动. 这与实际的边界层随着顺压梯度的减小(或逆压梯度的增加)而变厚的趋势是一致的.

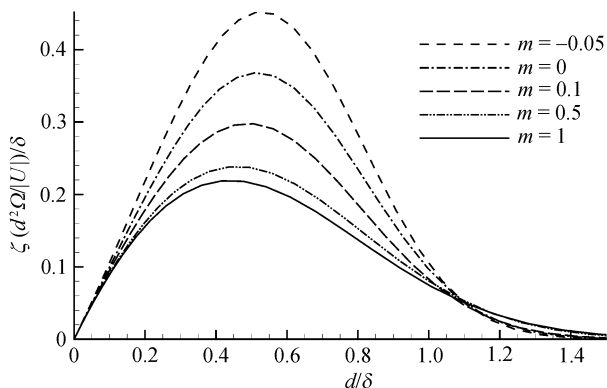


图 2 不同外流压力梯度(m)下的法向长度尺度 ζ 与边界层厚度 δ 的比值

$$m = x(dU_e/dx)/U$$

图 3 显示了相同 x 位置处, 无量纲的单位脉动动能生成项随 m 的变化. 图 3 中纵坐标可表示为:

$$(P_k/k)_{nt1}^* \times \eta_{\delta}^{1.5} \times \left(\frac{m+1}{2}\right)^{-0.75} = \frac{\nu_e^{0.75} x^{0.25}}{\rho_e U_e^{1.75}} (P_k/k)_{nt1}, \quad (33)$$

其中下标 $nt1$ 为第一模态扰动, 上标*为基于长度尺度 η 和速度尺度 U_e 的无量纲量, η_{δ} (见表 2) 为边界层外缘位置对应的 η 值. 可见, 随着外流压力梯度的减小, 该剖面的峰值向边界层外缘移动, 且其平均值增

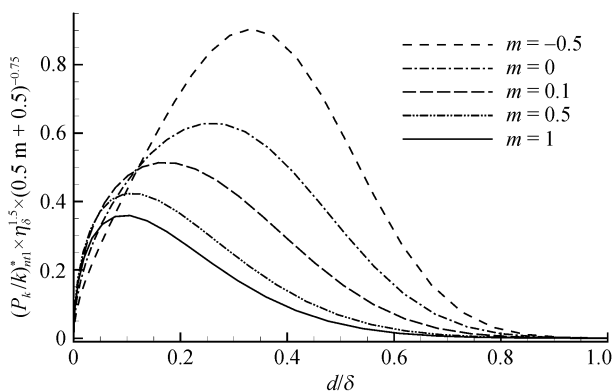


图 3 无量纲的单位脉动动能生成项, δ 为边界层厚度

$$m = x(dU_e/dx)/U$$

表 2 各个 Falkner-Skan 剖面的参数

m	β	η_δ
-0.05	0.105	3.8
0	0	3.48
0.1	0.182	3.14
0.5	0.667	2.59
1	1	2.38

大. 这意味着 k 在层流中的增长被强化, 从而导致转捩起始位置(x_i)向流场的上游移动. 这在定性上与实验中的转捩雷诺数($U_e x_i / \nu_e$)在加速流动中增大(或在减速流动中减小)是一致的. 可见, 本模式具有模拟上述物理现象的基本能力.

3.2 超音速绝热平板边界层

为了检验本文模式在超音速区的表现, 我们通过求解可压缩层流边界层的相似解, 考查了 2.3 节中的模化项 ζ , τ_{n1} 和 τ_{n2} 随来流马赫数的变化. 可压缩绝热平板层流边界层方程组的相似解可通过 Illingworth 变换得到. 无量纲的流函数 $f(\xi)$ 和无量纲温度 $g(\xi)$ 满足常微分方程组:

$$\left(\frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}f''\right)' + \frac{1}{2}ff'' = 0, \quad (34)$$

$$\left(\frac{\rho k}{\rho_e k_e}g'\right)' + \frac{1}{2}Prfg' = -Pr(\gamma-1)Ma_e^2\frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}f'^2, \quad (35)$$

其中 Pr 为普朗特数, 下标 e 为边界层外缘的值, 相似变量 ξ 可表示为

$$\xi = (\rho_e U_e / \mu_e x)^{1/2} \int_0^y (\rho / \rho_e) dy. \quad (36)$$

该方程组的边界条件为

$$\xi = 0: f' = f = g' = 0; \quad \xi \rightarrow \infty: f' = g = 1. \quad (37)$$

图 4 为不同来流马赫数下的速度和温度剖面, 其中相似变量 $\eta = y[U_e / (\nu_e x)]^{0.5}$. 可见, 随着来流马赫数的增大, 速度剖面越发趋于线性, 壁面温度大幅提高. 由于壁面附件高温气体的膨胀效应, 边界层在高超音速区域显著增厚, 如表 3 所示.

图 5 显示了不同马赫数下法向长度尺度 ζ 与边界层名义厚度 δ 的比值的剖面. 可见, 随着来流马赫数的增大, 该剖面的峰值增大, 且向边界层外缘移动, 原因在于速度剖面变得越来越平坦. 比值的这种变化与实际的边界层随着来流马赫数的增大(或逆压梯

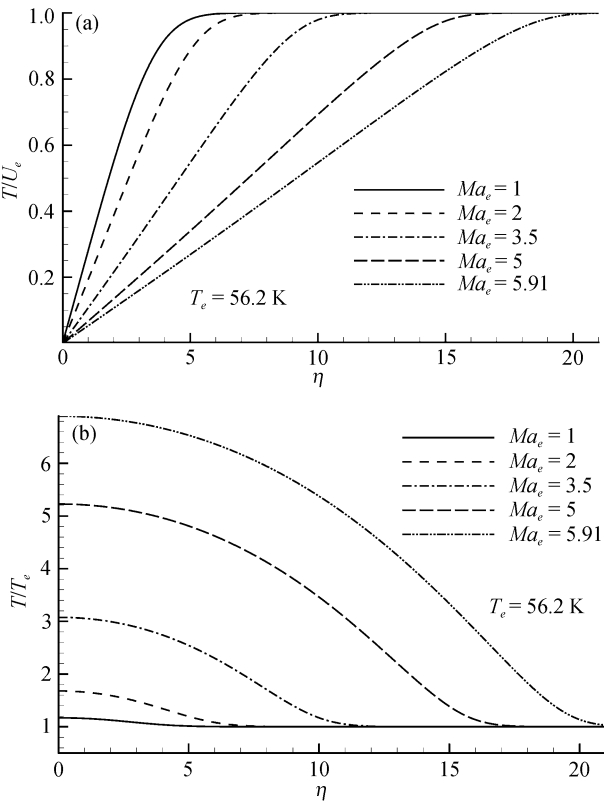


图 4 不同来流马赫数下的速度(a)和温度(b)剖面
下标 e 为边界层外缘的值, $\eta = y[U_e / (\nu_e x)]^{0.5}$

表 3 不同马赫数下可压缩绝热边界层参数表^{a)}

Ma_e	η_δ	C_f/U_e	$(d/\delta)_{crit}$
1	5.39	0.15	0
2	6.79	0.46	0
3.5	10.5	0.85	0.324
5	15.6	0.9	0.45
5.91	19.4	0.93	0.505

a) δ 为边界层名义厚度, 该位置对应的 η 值为 η_δ , 下标 crit 代表各剖面内的当地相对马赫数(M_{rel})的绝对值大于 1 的临界位置, d 为物面距离

度的增加)而增厚的趋势是一致的.

图 6 显示了相同单位雷诺数下, 无量纲的单位脉动动能生成项分量随来流马赫数的变化. 图 6 中纵坐标可分别表示为

$$(P_k/k)_{n1}^{**} Re_x^{-0.25} = (P_k/k)_{n1}^* \frac{L^{0.5} \eta_\delta^{1.5}}{x^{0.5}} = \frac{\nu_e^{0.75} L^{0.5}}{\rho_e U_e^{1.75} x^{0.25}} (P_k/k)_{n1}, \quad (38)$$

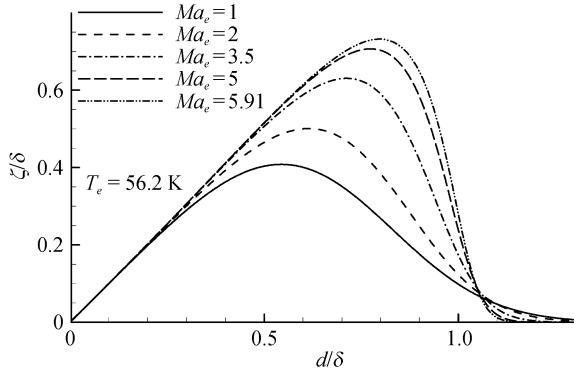


图 5 不同马赫数下的法向长度尺度 ζ 与边界层名义厚度 δ 的比值剖面

δ 为边界层名义厚度, d 为物面距离

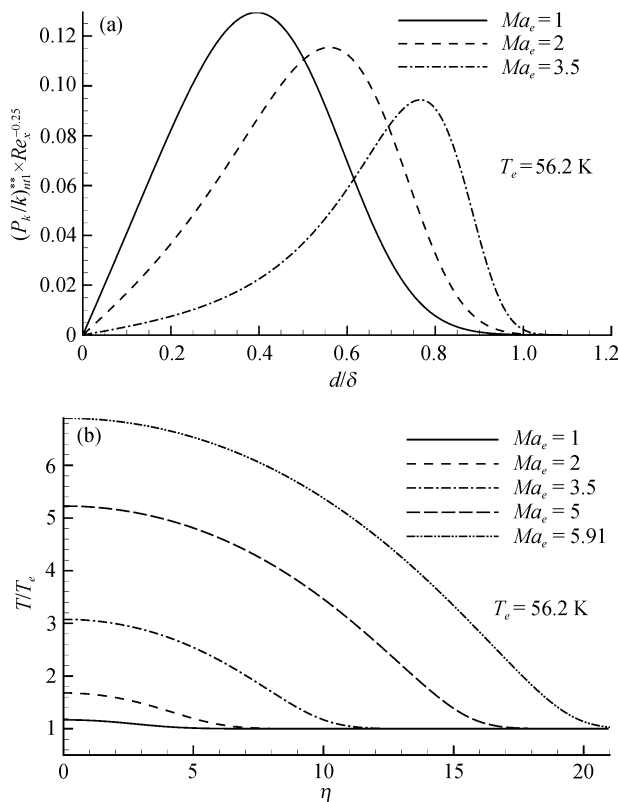


图 6 相同雷诺数下的第一模态(a)和第二模态(b)的无量纲单位湍动能生成项分量

$$\begin{aligned} (P_k/k)_{nt2}^{**} Re_x^{-0.5} &= (P_k/k)_{nt2}^* \frac{L\eta\delta}{x} \\ &= \frac{Lv_e^{0.5}}{\rho_e U_e^{1.5} x^{0.5}} (P_k/k)_{nt2}, \end{aligned} \quad (39)$$

其中下标 $nt1$ 和 $nt2$ 分别代表第一模态和第二模态, 上标*和**分别表示基于长度尺度 η 和单位长度尺度 L 的无量纲量(特征速度尺度均为 U_e)。这里只显示了较低马赫数下的第一模态分量(因其在高超音速边界层中与第二模态分量相比较小, 见图7)和较高马赫数下的第二模态分量(因其在低超音速边界层中不存在有效作用区, 见表3)。对于第一模态分量, 来流马赫数 1, 2 和 3.5 所对应的 $x(m)$ 值分别为 0.2, 0.1 和 0.057; 对于第二模态分量, 来流马赫数 3.5, 5 和 5.91 所对应的 $x(m)$ 值分别为 0.1, 0.07 和 0.059。可见, 随着来流马赫数的增大, 第一模态分量在壁面附近下降较大, 而峰值下降的幅度很小, 且其逐渐远离壁面; 第二模态分量的峰值也在下降, 但趋势逐渐变慢。

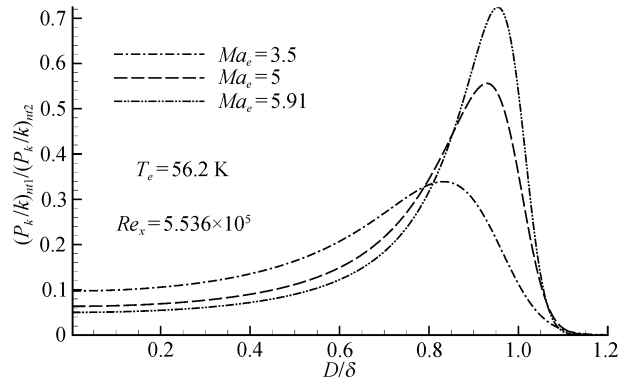


图 7 第一、第二模态单位湍动能生成项分量的比值

图 7 显示了第一、第二模态的单位脉动动能生成项分量的比值。图 7 中各曲线对应的单位雷诺数均为 5.536×10^5 , 而来流马赫数 3.5, 5 和 5.91 所对应的 $x(m)$ 值分别为 0.1, 0.07 和 0.059。可见, 在壁面附近, 第一模态分量均远小于第二模态分量, 大约差一个量级; 而在边界层外缘, 第一模态分量与第二模态分量值的量级相同, 随着来流马赫数的增大, 该比值逐渐增大。

综上所述, 在低马赫数区(0~2.5), 由于边界层内不存在当地相对马赫数大于 1 的区域, 第二模态的单位脉动动能生成项分量不发挥作用, 且随着来流马赫数的增大, 第一模态的单位脉动动能生成项分量而减小, 这导致了转捩的延迟。在中等马赫数区(2.5~5), 壁面附近出现了 $|M_{rel}| > 1$ 的区域, 第二模态

分量开始发挥作用, 其值远大于第一模态分量, 其作用区随着来流马赫数的增大而逐渐扩大, 这导致了转捩起始位置的快速前移. 在高马赫数区(大于 5), 随着来流马赫数的增大, $|M_{rel}| > 1$ 的区域的扩张变缓, 而第二模态分量逐渐减小, 这导致了转捩起始位置的缓慢推迟. 这与实验观察及稳定性理论的结果是一致的.

图 8 比较了本文模式与实验以及 e^N 方法^[13]所得的超音速平板和圆锥边界层转捩起始位置. 可见, 该模式成功地重现了上述3个马赫数区域内转捩起始位置的变化规律. 需要说明的是, 由于上述实验均是在常规风洞中进行的, 存在较强的声模态扰动. 根据 Papp 等对此类风洞的数值模拟经验^[18], 本文计算中将来流湍流度(freestream turbulence intensity, FSTI)的值设为 0.6 (Papp 等设之为 0.66).

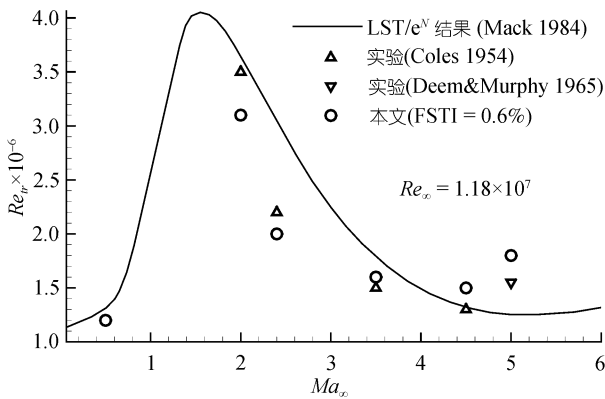


图 8 可压缩平板边界层转捩起始位置(x_{tr})随来流马赫数(Ma_{∞})的变化
 Re_{tr} 为基于 x_{tr} 的雷诺数

4 计算结果与讨论

为了验证模式, 本文进行了大量的数值计算, 算例包括不可压缩平板边界层转捩、超音速以及高超音速圆锥边界层转捩等.

各算例均采用 H 型计算网格. 为捕捉物理量在壁面及转捩位置附近的变化, 网格在靠近壁面方向及转捩位置附近(双向)进行等比级数加密. 壁面型线与实验模型一致. 表 4 显示了各算例对应的计算网格参数.

表 4 各算例对应的计算网格参数

算例	网格数	网格尺寸/ m	法向最小网格 间距/m	法向指数 拉伸率
不可压平板	201×221	2×0.33	0.5	1.031
超音速直圆锥	201×221	1.21×0.37	0.3	1.05
高超音速裙锥	201×221	0.708×0.33	0.5	1.031

4.1 不可压缩平板边界层转捩

本算例的数据来自 Schubauer 和 Klebanoff^[19] 的平板边界层转捩实验. 来流雷诺数 $Re_{\infty} = 1.6 \times 10^6$, 来流湍流度 0.03%. 计算网格参数见表 4, 流动进口处给定速度、温度剖面(层流精确解)以及 k 和 ω , 压力外插; 出口处提流向充分发展条件; 平板处提无滑移条件; 平板对称面提远场边界条件.

图 9 显示了平板边界层的壁面摩擦系数分布. 可见, Menter 模式^[5]预测的转捩起始位置偏后, 转捩区长度过短. 相比之下, 本文模式得到了较准确的转捩区长度, 转捩起始位置也与实验值更为接近.

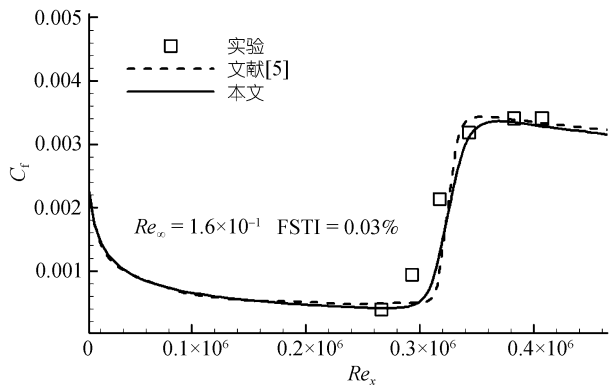


图 9 不可压缩平板边界层的壁面摩擦系数(C_f)分布图

4.2 超音速平板和圆锥边界层转捩

圆锥算例参照的实验是 Chen 和 Malik^[20] 在 NASA 兰利研究中心的低端流度风洞中进行的, 实验模型为半顶角 5° 的尖锥, 来流攻角为 0° . 来流马赫数为 3.5, 来流雷诺数为 5.89×10^7 , 来流温度为 92.3 K, 来流湍流度为 0.1%.

本文采用轴对称程序进行计算. 网格参数见表 4, 流动进口处给定速度、温度、压力以及 k 和 ω ; 出口处提流向充分发展条件; 锥面上提无滑移、绝热条件; 锥前缘至入口线上提对称边界条件, 顶面处提远场

边界条件.

图 10 给出了圆锥的温度恢复系数分布, 并与实验结果以及 Hassan 模式^[9]的计算结果进行了比较. 可见, 本文模式预测出了恢复系数的突增. 所得结果整体上好于 Hassan¹⁾的计算结果, 尤其在圆锥头部及尾段与实验符合较好. 但是预测的转捩起始位置均偏前, 峰值也较实验值偏低.

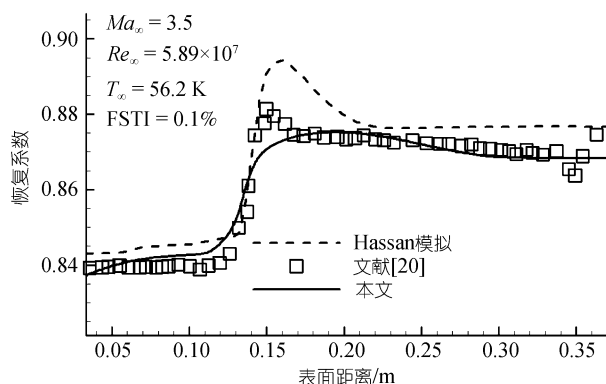


图 10 零攻角圆锥的温度恢复系数

纵轴为恢复系数 $r = (T_{aw} - T_e)/(T_0 - T_e)$, T_{aw} 为绝热壁面温度, T_0 为总温

4.3 高超音速圆锥边界层转捩

本算例参照的实验是在 NASA 兰利研究中心的低湍流度风洞中进行的^[21]. 实验模型为半角 5° 的带裙尾的圆锥 (flared cone), 头部至其后 10 英寸 (25.4 cm) 处为尖锥, 10 至 20 英寸处为曲率半径 93.07 英寸的尾裙, 被称为 93-10 模型. 本算例的来流马赫数为 5.91, 来流雷诺数为 9.348×10^6 , 来流温度为 56.2 K, 来流湍流度为 0.1%, 来流攻角为 0° . 计算网格参数见表 4, 边界条件的提法同 4.2 节中的圆锥算例. 此外, 在相同的来流条件和边界条件下, 我们选择半角 5° 的直圆锥 (轴向长度为 1 m) 进行计算, 以检验本文模式对充分发展湍流的模拟水平.

图 11 给出了模型表面的温度分布, 并与实验以及 Hassan 模式^[9]的计算结果进行了比较. 可见, 本文模式预测出了圆锥表面温度的突增, 得到了较为准确的转捩起始位置, 但对转捩峰值的预测偏低. 图 12 显示了本模式得到的圆锥边界层的壁面律与理论值

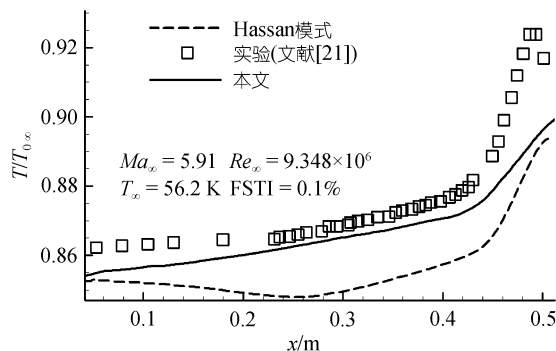


图 11 93-10 模型表面的温度分布

$x(m)$ 为距驻点的轴向距离, $T_{0,\infty}$ 为来流总温

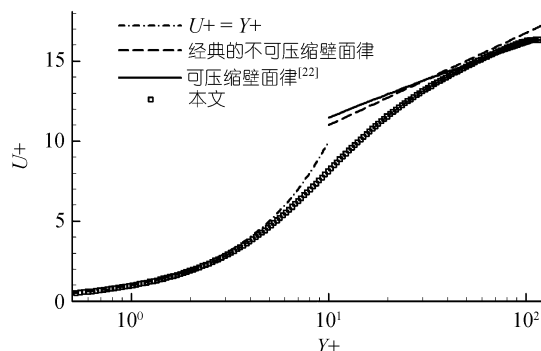


图 12 零攻角圆锥充分发展湍流段内层速度分布

的对比. 可见两者得到的内层速度分布在黏性次层和对数层中都符合得很好. 这说明本文模式进行的可压缩修正是有效的.

5 结论

本文建立了一种合理反映扰动模态和可压缩性影响的新型 $k-\omega-\gamma$ 转捩模式, 它由关于间歇因子 γ 、脉动动能 k 及其单位耗散率 ω 的 3 个输运方程组成. 其主要特点为: (i) k 包含湍流脉动部分和非湍流脉动部分; (ii) γ 方程的源项中构造了具有“自动判断转捩起始位置”功能的函数; (iii) 构造的新型物面法向长度尺度使该模式的所有表达式均由当地变量构成, 可以方便地应用于现代 CFD 程序之中; (iv) 该模式在完全湍流区还原为标准的 SST 湍流模式.

本文模式已具有一定的普适性, 可应用于较宽马赫数范围, 所具有的捕捉流动转捩的性能优于国

1) Hassan 模式属于基于半经验的转捩起始位置判据的模式, 其中包含非当地变量

际上的现有模式: 在亚音速情形下, 与Menter的模式^[5]相比, 该模式不仅含有较多的物理机制, 还能更好地预测转捩起始位置和转捩区长度; 在超音速和高超

音速情形下, 该模式可以很好地模拟流体的压缩性对转捩的影响, 反映出相关的失稳模态变化, 是目前唯一具有转捩预测能力的基于当地变量的模式。

参考文献

- 1 Mansour N, Pittman J, Olson L. Fundamental aeronautics hypersonics project at NASA: Overview. AIAA Paper, 2007, 2007-4263
- 2 符松, 王亮. 湍流转捩模式研究进展. 力学进展, 2007, 37(3): 409—416
- 3 Savill A M. One-point closures applied to transition. In: Turbulence and Transition. Kluwer: Academic Publishers, 1996. 233—268
- 4 Dhawan S, Narasimha R. Some properties of boundary-layer flow during transition from laminar to turbulent motion. J Fluid Mech, 1958, 3(4): 414—436
- 5 Menter F R, Langtry R B, Volker S. Transition modelling for general purpose CFD codes. Flow Turbul Combust, 2006, 77: 277—303 [\[DOI\]](#)
- 6 Walters D K, Leylek J H. A new model for boundary layer transition using a single-point RANS approach. ASME J Turbomach, 2002, 126: 193—202 [\[DOI\]](#)
- 7 Volino R J. A new model for free-stream turbulence effects on boundary layers. ASME J Turbomach, 1998, 120: 613—620
- 8 Mayle R E, Schulz A. The path to predicting bypass transition. ASME J Turbomach, 1997, 119: 405—411
- 9 Warren E S, Hassan H A. Transition closure model for predicting transition onset. J Aircraft, 1998, 35(5): 769—775 [\[DOI\]](#)
- 10 Menter F R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. AIAA J, 1994, 32: 1598—1605 [\[DOI\]](#)
- 11 Arnal D, Casalis G. Laminar-turbulent transition prediction in three-dimensional flows. Prog Aerospace Sci, 2000, 36: 173—191 [\[DOI\]](#)
- 12 Wilcox D C W. Turbulence model transition prediction. AIAA J, 1975, 13(2): 241—243 [\[DOI\]](#)
- 13 Mack L M. Boundary-layer linear stability theory. AGARD Rept, 709, 1984
- 14 Walker G J, Gostelow J P. Effects of adverse pressure gradients on the nature and length of boundary-layer transition. ASME J Turbomach, 1990, 112: 196—205 [\[DOI\]](#)
- 15 Mayle R E. The role of laminar-turbulent transition in gas turbine engines. ASME J Turbomach, 1991, 113: 509—537 [\[DOI\]](#)
- 16 Sarkar S, Erlebacher G, Hussaini, M Y. The analysis and modeling of dilatational terms in compressible turbulence. J Fluid Mech, 1991, 227: 473—493 [\[DOI\]](#)
- 17 Sarkar S. The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. J Fluid Mech, 1995, 282: 163—186 [\[DOI\]](#)
- 18 Papp J L, Kenzakowski D C, Dash S M. Extensions of a rapid engineering approach to modeling hypersonic laminar to turbulent transitional flows. AIAA Paper, 2005, 2005-0892
- 19 Schubauer G B, Klebanoff P S. Contribution on the mechanics of boundary layer transition. NACA-TN-3489, 1955
- 20 Chen F J, Malik M R, Beckwith I E. Boundary-layer transition on a cone and flat plate at Mach 3.5. AIAA J, 1989, 27(6): 687—693 [\[DOI\]](#)
- 21 Lachowicz J T, Chokani N, Wilkinson S P. Boundary-layer stability measurements in a hypersonic quiet tunnel. AIAA J, 1996, 34(12): 2496—2500 [\[DOI\]](#)