论 文

一种新型分数阶小波变换及其应用

史军*, 张乃通, 刘晓萍

哈尔滨工业大学通信技术研究所, 哈尔滨 150001

* 通信作者. E-mail: j.shi@yahoo.cn

收稿日期: 2010-03-30; 接受日期: 2011-04-28

国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2007CB310606) 和国家重大专项 “新一代宽带无线移动通信网” (批准号: 2009ZX03004-001) 资助项目

摘要 小波变换和分数 Fourier 变换是应用非常广泛的信号处理工具. 但是, 小波变换仅局限于时频域分析信号; 分数 Fourier 变换虽突破了时频域局限能够在分数域分析信号, 却无法表征信号局部特征. 为此, 提出了一种新型分数阶小波变换, 该变换不但继承了小波变换多分辨分析的优点, 而且具有分数 Fourier 变换分数域表征功能. 与现有分数阶小波变换相比, 新型分数阶小波变换可以实现对信号在时间 - 分数频域的多分辨分析. 此外, 该变换具有物理意义明确和计算复杂度低的优点, 更有利于满足实际应用需求. 最后, 通过仿真实验验证了所提理论的有效性.

关键词 时频分析 小波变换 多分辨分析 分数 Fourier 变换 时间 - 分数频分析

1 引言

小波变换 (wavelet transform, WT) 被认为是最为理想的时频分析工具, 在语音、图像、通信、雷达等领域得到了广泛应用^[1]. 但随着研究对象和研究范围的不断扩展, 也逐步暴露了其在研究某些问题上的局限性. 这种局限性主要体现在, 不同尺度的 WT 相当于一组频域带通滤波器对信号进行处理^[1], 因此 WT 仅局限在时、频域内分析信号. 对于那些在频域能量非最佳聚集的信号, WT 分析结果将不是最优的. 譬如在自然界和人工场合普遍存在的 chirp 类信号^[2] 就是典型的频域能量非最佳聚集信号^[3]. 为此, 人们提出了分数阶小波变换 (fractional wavelet transform, FRWT)^[4~7]、分数 Fourier 变换 (fractional Fourier transform, FRFT)^[8]、短时 FRFT^[9]、Radon-Wigner 变换^[10] 等. 但 Radon-Wigner 变换属于二次型变换, 具有交叉项; FRFT 虽具有许多独特性能却无法表征信号局部特征; 短时 FRFT 存在分辨率的缺陷, 即时域和分数域分辨率不能同时达到任意高. FRWT 作为 WT 的广义形式, 结合了 WT 与 FRFT 许多优点, 如没有交叉项, 具有线性特性、多分辨分析和分数域表征功能等. 因此, FRWT 在信号处理领域具有潜在的应用, 将受到越来越多的关注.

FRWT 最早由 Mendlovic 等^[4] 在 1997 年提出, 其基本思想是首先对信号进行 FRFT 得到分数谱, 然后对信号的分数谱作传统 WT. 由于 FRFT 只能展示出信号含有哪些分数频率分量, 并不能给出在特定时间内存在哪些分数频率分量, 即由分数谱无法获知信号分数频率分量存在于哪一时刻, 因此该 FRWT^[4] 无法表征信号局部特征, 目前仅被应用于图像加密^[5,6]. 之后, Huang 和 Suter^[7] 在 1998 年提出了分数阶小波包变换 (fractional wave packet transform, FRWPT) 的概念, 但由于 FRWPT 缺

引用格式: 史军, 张乃通, 刘晓萍. 一种新型分数阶小波变换及其应用. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 127-137

乏有效的物理解释, 且具有较高的计算复杂度, 并未得到太多的关注. 此外, 有些文献把以分数样条函数作为小波基的传统 WT 也称为 FRWT^[11], 由于该变换本质相当于一组频域带通滤波器, 并不能提供信号的分数域表示, 所以其仍然属于传统 WT. 基于此, 为了弥补 WT 局限在时、频域分析的不足和克服 FRFT 无法表征信号局部特征的缺陷, 提出了一种新型分数阶小波变换 (novel fractional wavelet transform, NFRWT). 该变换具有明确的物理意义, 即不同尺度的 NFRWT 相当于一组分数域带通滤波器对信号进行处理, 可实现对信号时域 - 分数域的多分辨分析. 与现有 FRWT^[4,7] 相比, NFRWT 具有较低的计算复杂度, 更有利于满足实际应用需求.

本文组织如下: 接下来首先分析了 WT 与 FRFT 的变换机理, 并介绍了分数阶卷积定理; 第 3 节提出了一种新型分数阶小波变换, 导出了其基本性质、逆变换公式和容许性条件; 第 4 节阐述了新型分数阶小波变换的时间 - 分数频分析性能; 第 5 节讨论了新型分数阶小波变换的应用, 并进行了相应的数值验证. 最后, 总结了全文.

2 预备知识

2.1 小波变换

首先给出任意两时间函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的经典卷积, 即

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \langle f(\cdot), g^*(t-\cdot) \rangle, \quad (1)$$

其中 $*$ 和上标 $*$ 分别表示经典卷积算子和共轭运算, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表内积运算. 在传统 Fourier 变换 (Fourier transform, FT) 下, 经典卷积定理可表述为

$$f(t) * g(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega), \quad (2)$$

其中 $\mathfrak{F}$ 表示 FT 算子, $F(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 分别表示 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的 FT.

于是, 信号 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的 WT 以经典卷积运算定义为^[1]

$$W_x(a, b) = x(t) * \left(a^{-\frac{1}{2}} \psi^* \left(-t/a \right) \right) = \langle x(\cdot), \psi_{a,b}(\cdot) \rangle, \quad (3)$$

其中核函数 $\psi_{a,b}(t)$ 由母小波 $\psi(t)$ 经过仿射变换得到, 即

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right), \quad (4)$$

其中 $a \in \mathbb{R}^+$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 分别代表尺度和平移参数. 根据经典卷积定理和 FT 逆变换, 信号的 WT 也可表示为

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi a} X(\omega) \Psi^*(a\omega) e^{j\omega b} d\omega, \quad (5)$$

其中 $X(\omega)$ 与 $\Psi(\omega)$ 分别表示 $x(t)$ 与 $\psi(t)$ 的 FT. 由于 $\Psi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$, 所以 WT 本质相当于一组频域带通滤波器, 仅局限在时、频域内分析信号, 对于那些在频域能量非最佳聚集信号, 其分析结果将不会是最优的.

2.2 分数 Fourier 变换与分数阶卷积定理

信号 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的分数 Fourier 变换 (FRFT) 定义为 [8]

$$X_\alpha(u) = \mathcal{F}^\alpha[x](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \mathcal{K}_\alpha(u, t) dt, \quad (6)$$

其中 $\mathcal{F}^\alpha$ 表示 FRFT 算子, 核函数 $\mathcal{K}_\alpha(u, t)$ 为

$$\mathcal{K}_\alpha(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \cot \theta}{2\pi}} e^{(j/2)(u^2+t^2) \cot \theta - jut \csc \theta}, & \alpha \neq k, \\ \delta(t-u), & \alpha = 2k, \\ \delta(t+u), & \alpha = 2k+1, \end{cases} \quad (7)$$

其中 α 表示 FRFT 阶数, $\theta = \alpha\pi/2$ 为旋转角度. u 轴代表分数域, 变量 u 称为分数频率. 阶数为 $-\alpha$ 的 FRFT 即为 FRFT 逆变换. 特别地, 当 $\alpha=1$ 时, FRFT 便退化为传统 FT.

FRFT 具有许多 FT 不具备的独特性质, 近年来在信号处理领域得到了广泛应用 [3,8,12~16]. 可以看出, FRFT 能够展示出信号中包含哪些分数频率分量, 但不能给出这些分数频率分量到底发生什么时间, 即 FRFT 是一种全局性变换, 无法表征信号局部特征 [9], 而这种局部特征在非平稳信号处理中显得尤其必要和重要.

任意两时间函数 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的分数阶卷积定义为 [12]

$$x(t) \Theta_\alpha h(t) = e^{-(j/2)t^2 \cot \theta} \cdot \left[\left(x(t) e^{(j/2)t^2 \cot \theta} \right) * h(t) \right] = e^{-(j/2)t^2 \cot \theta} \cdot \left\langle x(\cdot) e^{(j/2)(\cdot)^2 \cot \theta}, h^*(t-\cdot) \right\rangle, \quad (8)$$

其中 Θ_α 表示分数阶卷积算子. 设 $X_\alpha(u)$ 为 $x(t)$ 的 FRFT, $H(u \csc \theta)$ 为 $h(t)$ 的 FT (变换元作了尺度 $\csc \theta$ 伸缩), 在分数 Fourier 变换下, 分数阶卷积定理可表述为

$$x(t) \Theta_\alpha h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^\alpha} \sqrt{2\pi} X_\alpha(u) H(u \csc \theta). \quad (9)$$

(9) 式表明, 时域分数阶卷积在分数域体现为简单的乘积. 特别地, 当 $\alpha=1$ 时, (8) 式便退化为 (1) 式中的经典卷积.

3 新型分数阶小波变换

3.1 新型分数阶小波变换定义

根据 (3) 式中 WT 与经典卷积的内在关系, 一个自然的想法是: FRWT 与分数阶卷积也应存在着类似的联系. 于是, 信号 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的 α 阶新型分数阶小波变换 (NFRWT) 可定义为

$$\begin{aligned} W_x^\alpha(a, b) &= x(t) \Theta_\alpha \left(a^{-\frac{1}{2}} \psi^*(-t/a) \right) = e^{-(j/2)b^2 \cot \theta} \cdot \left\langle x(\cdot) e^{(j/2)(\cdot)^2 \cot \theta}, \psi_{a,b}(\cdot) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{\alpha,a,b}^*(t) dt, \end{aligned} \quad (10)$$

其中核函数 $\psi_{\alpha,a,b}(t)$ 满足

$$\psi_{\alpha,a,b}(t) = e^{-(j/2)(t^2-b^2) \cot \theta} \psi_{a,b}(t), \quad (11)$$

其中 $\psi_{a,b}(t)$ 的表达形式见 (4) 式. 特别地, 当 $\alpha=1$ 时, NFRWT 便退化为传统 WT.

根据 (9) 式可知, NFRWT 分数域形式为

$$W_x^\alpha(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi a} X_\alpha(u) \Psi^*(au \csc \theta) \mathcal{K}_{-\alpha}(u, b) du, \quad (12)$$

其中 $\Psi(u \csc \theta)$ 为 $\psi(t)$ 的 FT(变换元作了尺度 $\csc \theta$ 伸缩). (12) 式表明, 不同尺度的 NFRWT 相当于一组分数域带通滤波器对信号进行处理. 这意味着 NFRWT 突破了 WT 仅在时频域分析的局限, 同时又克服了 FRFT 的前述缺陷, 本文第 4 节将对此作详细阐述.

进一步地, (10) 式中 NFRWT 的定义可以改写为

$$W_x^\alpha(a, b) = e^{-(j/2)b^2 \cot \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) e^{(j/2)t^2 \cot \theta} \right) \psi_{a,b}^*(t) dt. \quad (13)$$

很明显, 可以将 NFRWT 分解为以下 3 个步骤进行运算:

- 1) 信号与一 chirp 信号相乘, 即 $x(t) \rightarrow \hat{x}(t) = x(t) e^{(j/2)t^2 \cot \theta}$;
- 2) 传统小波变换 (WT), 即 $\hat{x}(t) \rightarrow W_{\hat{x}}(a, b)$;
- 3) 再与一 chirp 信号相乘, 即 $W_{\hat{x}}(a, b) \rightarrow W_x^\alpha(a, b) = W_{\hat{x}}(a, b) e^{-(j/2)b^2 \cot \theta}$.

因此, NFRWT 的数值计算需要对上述每个分解步骤都进行离散化处理, 具体实现过程如下: 首先对信号 $x(t)$ 与 chirp 信号 $e^{(j/2)t^2 \cot \theta}$ 的乘积进行采样; 其次将尺度参数 a 和平移参数 b 离散化, 通常取 $a = 2^m$, $b = n2^m$, 且 $m \in \mathbb{Z}$, 然后对采样信号进行离散 WT; 最后将变换结果与 chirp 信号 $e^{-(j/2)b^2 \cot \theta}$ 相乘即可得到信号 $x(t)$ 的 NFRWT 数值结果. 可以看出, NFRWT 计算复杂度主要取决于离散 WT 运算, 其计算复杂度为 $O(N)$ (N 为数据长度). 文献 [4,7] 所提出的 FRWT 计算复杂度分别为 $O(N^3 \log_2 N)$ 和 $O(N + N \log_2 N)$, 因此 NFRWT 可以进一步降低运算量, 有利于实际应用的需求. 图 1 给出了 NFRWT 与文献 [4,7] 中 FRWT 计算复杂度的比较. 此外, 文献 [4,7] 中 FRWT 数值计算都需要 FRFT 离散算法, 但到目前为止, 还没有一套完善的 FRFT 离散算法 [13]. 而 NFRWT 数值计算并不需要 FRFT 离散算法, 可以利用 WT 快速离散算法实现.

3.2 新型分数阶小波变换基本性质

1) 线性特性.

若 $x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, 且 $x_1(t) \leftrightarrow W_{x_1}^\alpha(a, b)$, $x_2(t) \leftrightarrow W_{x_2}^\alpha(a, b)$, 则很容易得到

$$W_x^\alpha(a, b) = k_1 W_{x_1}^\alpha(a, b) + k_2 W_{x_2}^\alpha(a, b). \quad (14)$$

2) 尺度转换性质.

若 $x(t) \leftrightarrow W_x^\alpha(a, b)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(ct) \psi_{a,b}^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(ct) e^{(j/2)(t^2 - b^2) \cot \theta} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{(j/2)(t'^2 - (bc)^2) \cot \varphi} \frac{1}{\sqrt{ac}} \psi^*\left(\frac{t' - bc}{ac}\right) dt' = \frac{1}{\sqrt{c}} W_x^\beta(ac, bc), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $c \in \mathbb{R}^+$, $\varphi = \operatorname{arccot}(c^2 \cot \theta)$, $\beta = \varphi / (\pi/2)$.

图 1 NFRWT 与现有 FRWT 复杂度比较

Figure 1 Comparison of the computation complexity of the NFRWT and the existing FRWT

3) 内积定理.

定理 1 假设 $x(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的 α 阶 NFRWT 分别记为 $W_x^\alpha(a, b)$ 和 $W_g^\alpha(a, b)$, 令 $\Psi(\Omega)$ 为 $\psi(t)$ 的 FT, 若

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega} d\Omega < \infty, \quad (16)$$

则有

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} W_x^\alpha(a, b) [W_g^\alpha(a, b)]^* \frac{da}{a^2} db = 2\pi C_\psi \langle x(\cdot), g(\cdot) \rangle. \quad (17)$$

证明 根据 (12) 式, 可得

$$W_x^\alpha(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi a} X_\alpha(u) \Psi^*(au \csc \theta) \mathcal{K}_{-\alpha}(u, b) du, \quad (18)$$

$$W_g^\alpha(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi a} G_\alpha(u') \Psi^*(au' \csc \theta) \mathcal{K}_{-\alpha}(u', b) du'. \quad (19)$$

将 (18) 式和 (19) 式代入 (17) 式, 并整理可得

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} W_x^\alpha(a, b) [W_g^\alpha(a, b)]^* \frac{da}{a^2} db = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(au \csc \theta)|^2}{a} da \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(u) G_\alpha^*(u) du. \quad (20)$$

再根据 FRFT 内积定理 [8], 由 (20) 式即可得 (17) 式. 至此, 定理 1 证毕.

4) Parseval 定理.

定理 2 对于任意函数 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 设其 NFRWT 记为 $W_x^\alpha(a, b)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi C_\psi} \iint_{-\infty}^{+\infty} |W_x^\alpha(a, b)|^2 \frac{da}{a^2} db, \quad (21)$$

其中 $|W_x^\alpha(a, b)|^2$ 称为 α 阶尺度图. 在定理 1 中令 $g(t)=x(t)$ 即可得到定理 2, 在此不作赘述.

定理 2 表明, α 阶尺度图表示的是信号能量在 α 阶时间 - 尺度平面上的分布, 可以看成是 WT 尺度图由传统时间 - 尺度平面到 α 阶时间 - 尺度平面的扩展.

3.3 新型分数阶小波变换逆变换及容许性条件

定理 3 令 $\psi(t)$ 的 FT 为 $\Psi(\Omega)$, 若 $x(t), \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 且 $\Psi(\Omega)$ 满足 (16) 式, 则

$$x(t) = \frac{1}{2\pi C_\psi} \iint_{-\infty}^{+\infty} W_x^\alpha(a, b) \psi_{\alpha, a, b}(t) \frac{da}{a^2} db. \quad (22)$$

在定理 1 中令 $g(t) = \delta(t)$ 即可得到定理 3, 具体证明不作赘述. 在定理 3 和定理 2 中, 结论成立的前提是 $C_\psi < \infty$, 此即 NFRWT 的容许性条件. 由容许性条件可知, $\Psi(0)=0$, 因此不同尺度的 NFRWT 相当于一组分数域多尺度带通滤波器.

4 新型分数阶小波变换的时间 - 分数频分析

4.1 恒 Q 特性

(10) 式和 (12) 式表明, 若 NFRWT 的核函数 $\psi_{\alpha,a,b}(t)$ 在时域是有限支撑的, 那么它与信号 $x(t)$ 作内积后将保证 $W_x^\alpha(a,b)$ 也是时域有限支撑的, 因此 $W_x^\alpha(a,b)$ 反映的是 $x(t)$ 在 b 附近的信息. 同样, 若 $\Psi^*(au \csc \theta)$ 具有分数域带通特性, 即 $\Psi(\Omega)$ 满足容许性条件, 那么 $\Psi^*(au \csc \theta)$ 和 $X_\alpha(u)$ 作乘积后将反映 $x(t)$ 分数域局部特征. 所以, NFRWT 能够同时展示出信号时域和分数域信息, 提供信号的时间 - 分数频表示. 若 $\psi(t)$ 和 $\Psi(au \csc \theta)$ 都满足窗函数的要求, 令 $\psi(t)$ 的中心、窗宽分别记为 E_ψ, Δ_ψ , 并将 $\Psi(au \csc \theta)$ 的中心、窗宽分别记为 E_Ψ, Δ_Ψ . 那么, 核函数 $\psi_{\alpha,a,b}(t)$ 可以视为 NFRWT 的时域窗函数, 其时间中心和宽度分别为

$$E[\psi_{\alpha,a,b}(t)] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi_{\alpha,a,b}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\alpha,a,b}(t)|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi_{a,b}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt} = E[\psi_{a,b}(t)] = b + aE_\psi, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta[\psi_{\alpha,a,b}(t)] &= \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - b - aE_\psi)^2 |\psi_{\alpha,a,b}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\alpha,a,b}(t)|^2 dt} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - b - aE_\psi)^2 |\psi_{a,b}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Delta[\psi_{a,b}(t)] = a\Delta_\psi, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $E[\cdot]$ 表示期望运算, $\Delta[\cdot]$ 代表方差运算. 同样, 很容易得到 WT 频域窗函数 $\Psi(a\omega)$ 的频域中心和宽度分别为

$$E[\Psi(a\omega)] = \frac{E_\Psi}{a}, \quad \Delta[\Psi(a\omega)] = \frac{\Delta_\Psi}{a}. \quad (25)$$

根据 (12) 式, 将 $\omega = u \csc \theta$ 代入 (25) 式可得, NFRWT 分数域窗函数 $\Psi(au \csc \theta)$ 的分数域中心和宽度分别为

$$E[\Psi(au \csc \theta)] = \frac{E_\Psi}{a} \sin \theta, \quad \Delta[\Psi(au \csc \theta)] = \frac{\Delta_\Psi}{a} \sin \theta. \quad (26)$$

于是, NFRWT 分数域窗函数的品质因数 (即窗宽与窗中心的比) 为

$$Q = \frac{\Delta[\Psi(au \csc \theta)]}{E[\Psi(au \csc \theta)]} = \frac{(\Delta_\Psi/a) \sin \theta}{(E_\Psi/a) \sin \theta} = \frac{\Delta_\Psi}{E_\Psi}. \quad (27)$$

可见, 不论阶数 $\alpha(\theta = \alpha\pi/2)$ 和尺度因子 a 为何值, 分数域窗函数 $\Psi(au \csc \theta)$ 始终具有相同的品质因数, 此即 NFRWT 的恒 Q 特性.

4.2 时间 — 分数频分辨率

根据 (23) 式、(24) 式和 (10) 式, 可知一个信号 $x(t)$ 的 NFRWT $W_x^\alpha(a, b)$ 把信号限制在时间窗的范围内, 即

$$[b + aE_\psi - a\Delta_\psi, b + aE_\psi + a\Delta_\psi]. \quad (28)$$

在信号分析中, 这称为时间局部化. 此外, 根据 (12) 式和 (26) 式可知, $W_x^\alpha(a, b)$ 还给出了一个分数频率窗

$$\left[\frac{E_\psi}{a} - \frac{\Delta_\psi}{a}, \frac{E_\psi}{a} + \frac{\Delta_\psi}{a} \right] \cdot \sin \theta. \quad (29)$$

内信号 $x(t)$ 分数谱的局部信息. 这称为分数频率局部化. 因此, 由 (10) 式和 (12) 式计算得到的 $W_x^\alpha(a, b)$ 提供了信号的时间 - 分数频分析, 并在 $t - u$ 平面上确定一个可变的时间 - 分数频窗

$$[b + aE_\psi - a\Delta_\psi, b + aE_\psi + a\Delta_\psi] \times \left[\frac{E_\psi}{a} - \frac{\Delta_\psi}{a}, \frac{E_\psi}{a} + \frac{\Delta_\psi}{a} \right] \cdot \sin \theta, \quad (30)$$

且面积为 $2a\Delta_\psi \times 2\frac{\Delta_\psi}{a} \sin \theta = 4\Delta_\psi \Delta_\psi \sin \theta$. 可以发现, 时间 - 分数频窗面积只与母小波函数 $\psi(t)$ 和阶数 α (因为 $\theta = \alpha\pi/2$) 有关, 而与参数 a 和 b 无关. 但若阶数 α 固定时, 时间 - 分数频窗的形状随尺度参数 a 而变化. 具体地说, 窗对于小的 a 值变窄, 对于大的 a 值变宽. 因此, NFRWT 提供了一个可调的时间 - 分数频窗, 当观察高分数频现象 (对应于小的 a 值) 时它自动变窄, 而当研究低分数频成分 (对应于大的 a 值) 时它自动变宽. 由 (30) 式可知, NFRWT 的时间 - 分数频分辨率取决于 $t - u$ 平面上时间 - 分数频窗的宽度和高度. 图 2 展示了 NFRWT 的时间 - 分数频窗和 WT 的时间 - 频率窗之间的不同.

5 新型分数阶小波变换的应用

5.1 信号去噪

由于 WT 本质相当于一组频域带通滤波器, 因此传统 WT 去噪方法一般假设信号能量在频域相对聚集. 于是, 变换后信号能量集中在某些频带的少数小波系数上, 通过将其他频带上的小波系数置零或者给予较小权重, 便可达到有效抑制噪声的目的. 但对于频域能量非最佳聚集信号, WT 处理结果将不会是最优的. FRFT 采样理论^[3]表明, 频域能量非最佳聚集信号在某一分数域上其能量将会是最佳聚集的, 譬如 chirp 类信号. 由于 NFRWT 本质相当于一组分数域多尺度带通滤波器, 所以它非常适合处理这类信号. 具体地说, NFRWT 能够将信号分数谱分解到不同的分数域谱段上, 得到一系列分数域子带信号, 使得信号能量集中在某些分数域子带的变换系数上, 通过将其其他分数域子带的变换系数置零或给予较小权重便可实现对上述信号的去噪处理.

假设含噪信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$, 其中期望 $s(t)$ 是调频率为 -1 的 chirp 信号, $n(t)$ 为高斯白噪声, 且信噪比为 3 dB. 仿真中选取 db8 小波作为母小波, 并采用硬阈值化准则. 为了衡量各阶数下 NFRWT 去噪性能, 设信号 $s(t)$ 及其恢复信号 $\hat{s}(t)$ 的均方误差 (mean square error, MSE) 为

$$\sigma_e^2 = E[|s(t) - \hat{s}(t)|^2]. \quad (31)$$

图 3 给出了 NFRWT 去噪的 MSE 随阶数 α 的变化情况.

图 2 NFRWT 的时间 — 分数频窗和 WT 的时间 — 频率窗

Figure 2 Time-fractional-frequency windows of the NFRWT and time-frequency windows of the WT. (a) WT; (b) NFRWT

图 3 不同阶数下 NFRWT 去噪的均方误差

Figure 3 The MSE of signal denoising using the NFRWT with different orders

图 3 表明, $\alpha=0.5$ 阶 NFRWT 去噪效果最好, MSE 为 9.508×10^{-3} , 而在其他 $\alpha \neq 0.5$ 阶数上, NFRWT 去噪效果均较差, MSE 约为 0.25 左右. 特别地, $\alpha=1$ 阶 NFRWT (即 WT) 去噪的 MSE 为 0.26. 这是因为根据 FRFT 与时频分布关系^[8] 可知, 期望信号 $s(t)$ 仅在 $\alpha=0.5$ 阶分数域上能量呈最佳聚集特性. 图 4 给出了 0.5 阶 NFRWT 对含噪 chirp 信号 $x(t)$ 的三层分解结果, 图中横轴表示时间采样点, 纵轴表示幅度.

在图 4 中, s 和 x 分别为期望信号及其含噪信号的时域波形, a_1 , a_2 和 a_3 分别表示 0.5 阶 NFRWT 在 1~3 层上分解得到的信号概貌部分, 相应的细节信息分别为 d_1 , d_2 和 d_3 . 可以看出, 反映噪声的细节部分幅度较小, 可以利用前述基于 NFRWT 方法将其剔除, 即可达到有效抑制噪声的目的.

5.2 多径 chirp 信号分离

由于 chirp 信号在分数域呈现能量最佳聚集特性, 且时延在分数域反映为信号分数频率的搬移, 因此 FRFT 是一种用于多径 chirp 信号分离的有效处理工具^[14~16]. 但由于 FRFT 缺乏局部化表征功能, 基于 FRFT 的分离方法通常需要迭代搜索^[16], 计算量很大, 往往无法满足实际应用需求. 而 NFRWT 具有刻画信号分数域局部特征的功能, 能够有效地克服基于 FRFT 分离方法的缺陷. 下面以

图 4 0.5 阶 NFRWT 对含噪 chirp 信号 $x(t)$ 的三层分解结果

Figure 4 Three levels of the 0.5 th NFRWT decomposition for the interfered signal

图 5 多径 chirp 信号 $x(t)$ 及其各径分量信号的频谱

Figure 5 Frequency spectrums of the multipath chirp signal and three path signals

数值分析作进一步阐述, 将多径 chirp 信号 $x(t)$ 建模为

$$x(t) = \sum_{n=1}^3 \rho_n e^{-(j/2)(t-\tau_n)^2 + j9.89t}, \quad (32)$$

其中 ρ_n 和 τ_n 分别表示多径信道增益和传输时延. 假设三径时延分别为 $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 7.07$, $\tau_3 = 23.34$, 对应的信道增益分别 $\rho_1=1$, $\rho_2=0.5$, $\rho_3=0.25$. 图 5 给出了多径 chirp 信号 $x(t)$ 及其各径分量的频谱.

由图 5 可看出, 多径 chirp 信号 $x(t)$ 各径分量信号的频谱相互叠加, 且能量分布在较大的频带范围内, 在频域无法直接进行有效分离. 根据 FRFT 与时频分布关系^[8]可知, $x(t)$ 在 $\alpha=0.5$ 阶分数域上能量是最佳聚集的. 此外, 由于时延在分数域会导致分数频率的搬移, 因此利用 0.5 阶 NFRWT 能够对 $x(t)$ 各径分量信号进行有效分离, 具体的分离结果如图 6 所示.

图 6(a)(b) 分别给出了多径 chirp 信号 $x(t)$ 时域波形及其幅度归一化后的 0.5 阶分数谱 $X_\alpha(u)$. 可以看出, $X_\alpha(u)$ 中含有 7, 12, 23.5 三个分数频率分量, 分别对应于第 1~3 径分量信号. 图 6(c)(e)(g) 则分别展示了利用 0.5 阶 NFRWT 进行分离后恢复出的第 1~3 径分量信号时域波形. 相应地, 图 6(d)(f)(h) 分别给出了恢复出的第 1~3 径分量信号的 0.5 阶分数谱. 经过计算, 第 1~3 径分量信号分离的 MSE 依次为 4.338×10^{-3} , 5.247×10^{-3} , 5.103×10^{-3} . 因此, NFRWT 实现了对多径 chirp 信号 $x(t)$ 各径分量信号的有效分离.

图 6 0.5 阶 NFRWT 对多径 chirp 信号各径分量信号的分离结果

Figure 6 Separating the multipath chirp signal $x(t)$ with 0.5th NFRWT. (a) Multipath chirp signal $x(t)$; (b) FRFT of $x(t)$; (c) the separated 1th path signal; (d) FRFT of the separated 1th path signal; (e) the separated 2th path signal; (f) FRFT of the separated 2th path signal; (g) the separated 3th path signal; (h) FRFT of the separated 3th signal

6 结论

本文提出了一种具有明确物理意义的新型分数阶小波变换, 即该变换本质相当于一组分数域多尺度带通滤波器对信号进行处理, 并建立了新型分数阶小波变换的基本理论, 包括基本性质、定理、逆变换公式和容许性条件. 此外, 从恒 Q 特性和时间 - 分数频分辨率两方面阐述了新型分数阶小波变换的时间 - 分数频分析性能. 理论研究表明, 新型分数阶小波变换能够同时提供信号的时域和分数域信息, 给出信号在时域 - 分数域平面上的表示. 它不但弥补了小波变换的不足, 而且克服了分数 Fourier 变换的缺陷. 与现有分数阶小波变换^[4,7]相比, 新型分数阶小波变换具有较低的计算复杂度, 更有利于实际应用的需求. 最后, 通过数值分析验证了所提理论的有效性.

参考文献

- Gargour C, Gabrea M, Ramachandran V, et al. A short introduction to wavelets and their applications. IEEE Circ Syst Mag, 2009, 2: 57-68
- Flandrin P. Time-frequency and chirps. P SPIE, 2001, 4391: 161-175
- Xia X G. On bandlimited signals with fractional Fourier transform. IEEE Signal Proc Let, 1996, 3: 72-74
- Mendlovic D, Zalevsky Z, Mas D, et al. Fractional wavelet transform. Appl Optics, 1997, 36: 4801-4806
- Bhatnagar G, Raman B. Encryption based robust watermarking in fractional wavelet domain. Rec Advan Mult Sig Proc Commun, 2009, 231: 375-416
- Chen L, Zhao D. Optical image encryption based on fractional wavelet transform. Opt Commun, 2005, 254: 361-367
- Huang Y, Suter B. The fractional wave packet transform. Multidim Syst Signal Process, 1998, 9: 399-402
- Tao R, Deng B, Wang Y. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing. Sci China Ser F-Inf Sci, 2006, 49: 1-25
- Tao R, Li Y L, Wang Y. Short-time fractional Fourier transform and its applications. IEEE Trans Signal Proces, 2010, 58: 2568-2580
- Wood J C, Barry D T. Linear signal synthesis using the Radon-Wigner transform. IEEE Trans Signal Proces, 1994, 42: 2105-2111
- Dinç E, Baleanu D. New approaches for simultaneous spectral analysis of a complex mixture using the fractional wavelet transform. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2010, 15: 812-818
- Shi J, Chi Y G, Zhang N T. Multichannel sampling and reconstruction of bandlimited signals in fractional domain. IEEE Signal Proc Let, 2010, 17: 909-912

- 13 Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform. *IEEE Trans Signal Proces*, 2000, 48: 1329–1337
- 14 Tao R, Li X, Li Y, et al. Time-delay estimation of chirp signals in the fractional Fourier transform. *IEEE Trans Signal Proces*, 2009, 57: 2852–2855
- 15 Akay O, Erözden E. Employing fractional autocorrelation for fast detection and sweep rate estimation of pulse compression radar waveforms. *Signal Process*, 2009, 89: 2479–2489
- 16 Cowell D M J, Freear S. Separation of overlapping linear frequency modulated (LFM) signals using the fractional Fourier transform. *IEEE Trans Ultrason Ferr*, 2010, 57: 2324–2333

A novel fractional wavelet transform and its applications

SHI Jun*, ZHANG NaiTong & LIU XiaoPing

Communication Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

*E-mail: j.shi@yahoo.cn

Abstract The wavelet transform (WT) and the fractional Fourier transform (FRFT) are powerful tools for many applications in the field of signal processing. However, the signal analysis capability of the former is limited in the time-frequency plane. Although the latter has overcome such limitation and can provide signal representations in the fractional domain, it fails in obtaining local structures of the signal. In this paper, a novel fractional wavelet transform (FRWT) is proposed in order to rectify the limitations of the WT and the FRFT. The proposed transform not only inherits the advantages of multiresolution analysis of the WT, but also has the capability of signal representations in the fractional domain which is similar to the FRFT. Compared with the existing FRWT, the novel FRWT can offer signal representations in the time-fractional-frequency plane. Besides, it has explicit physical interpretation, low computational complexity and usefulness for practical applications. The validity of the theoretical derivations is demonstrated via simulations.

Keywords time-frequency analysis, wavelet transform, multiresolution analysis, fractional Fourier transform, time-fractional-frequency analysis

SHI Jun was born in Suqian City, Jiangsu Province, China in 1983. He received the M.E. degree in information and communication engineering from Harbin Institute of Technology (HIT), Harbin in 2008. He is now working towards the Ph.D. degree in information and communication engineering at HIT. Currently, he is also a Visiting Scholar at the Department of Electrical and Computer Engineering, University of Delaware, USA. His research interests include time-frequency analysis, fractional Fourier transform, linear canonical transform, wavelet transform, sampling and reconstruction theory, filter design, etc.

ZHANG NaiTong was born in Yangzhou City, Jiangsu Province, China in 1934. He received the B.S. degree from the Radio Department of the former Nanjing Engineering Institute, Nanjing in 1956. He made an advanced study and worked as an Assistant in Tsinghua University, Beijing from 1956 to 1958. Currently, he is a Professor of the Harbin Institute of Technology, Harbin. His research interests include deep space communications network, UWB wireless communications systems, cognitive radio and wireless communication, and transform domain communication system. Professor Zhang is a Fellow of the Chinese Academy of Engineering.

LIU XiaoPing was born in Songyuan City, Jilin Province, China in 1983. She received the M.E. degree in control science and engineering from Harbin Institute of Technology (HIT), Harbin in 2009. Currently, she is working towards the Ph.D. degree in information and communication engineering at HIT. Her research interests include sampling theory, digital signal processing, and time-frequency analysis.