

椭圆环壳在一般荷载下的轴对称问题*

陈 山 林

(重庆建筑工程学院土木系)

摘 要

本文给出了在任意分布荷载下轴对称椭圆环壳的简化复变量方程。该方程准确度在薄壳理论误差范围内,并消除了全部经线极值奇点。得到了问题的等价的积分方程组,用数值积分方法给出了数值解。计算了膨胀节、液压圆环壳和半椭圆形密封环的算例,与准确解和实验结果作了比较。

关键词: 椭圆环壳,轴对称

一、引 言

环壳是继球壳、锥壳和圆柱壳之后的又一种有重要应用价值的旋转壳体,特别在柔韧结构中有着广泛应用。正如 Axelrad^[1] 指出的,虽然柔韧壳在工业中已使用了几十年,但它们的理论尚未引起足够的注意,因为大多数壳体理论的文献和书籍几乎都把注意力放在了壳体的承重特性上。

造成上述情况的原因还在于,较之通常的旋转壳,环壳的数学方程比较复杂。因此,对于环壳理论的简化处理和求解方法的研究,就成为柔韧壳理论工作的重要内容之一。

对于最简单的环壳——圆环壳问题,中国学者钱伟长、张维等^[2-4]近年来已做了许多有价值的工作;更为广泛的参考文献可在文献[1]中找到。对于更普遍的一类环壳问题——椭圆环壳,早年 Clark 等^[5]给出了均匀压力下一组实变量形式的椭圆环壳方程,用于处理弯管和巴顿簧问题。对于一般荷载情形的椭圆环壳理论,尚有待研究。

本文推广文献[2]的统一复变量化方法,并利用文献[7]提出的推广的 Новожилов 变换,对椭圆环壳的一般轴对称问题,成功地进行了简化。得到了问题的复变量方程,该方程与准确方程差别在薄壳理论误差范围,并消除了非齐次项的全部经线极值奇点。给出了内力和位移的计算公式和问题的积分方程。用数值积分方法进行了求解,给出了几个实际问题的算例。

二、基本方程的简化

考虑在任意分布荷载 p_r , p_θ 作用下的薄弹性椭圆环壳,其坐标、位移和几何尺寸如图 1 所

本文 1988 年 1 月 18 日收到,1988 年 11 月 21 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

示。本文未加说明的符号同文献[10]。主曲率半径为

$$r_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}},$$

$$r_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} + \frac{R}{\sin \varphi}, \quad (2.1)$$

且有

$$r = r_2 \sin \varphi. \quad (2.2)$$

记 $k = b^2/a^2$, 并引入

$$g(\varphi) = (\sin^2 \varphi + k \cos^2 \varphi)^{1/2}, \quad \alpha = a/R, \quad (2.3)$$

则椭圆环壳一般轴对称问题的基本方程可以写作^[10,11]

$$\mathcal{L}(\chi) - \nu \chi = \frac{ak}{Dg^3} \Phi, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}(\Phi) + \nu \Phi + Eh \frac{ak}{g^3} \chi = f(\varphi).$$

图1 荷载、位移和尺寸

式中

$$\mathcal{L}(\cdot) = \frac{(g + \alpha \sin \varphi)}{k\alpha \sin \varphi} g^2(\cdot)^{\cdot\cdot} + \left\{ \frac{(g + \alpha \sin \varphi) g^2 \cos \varphi}{k\alpha \sin^2 \varphi} + \frac{1}{k\alpha} \left[\frac{g^2(g + \alpha \sin \varphi)}{\sin \varphi} \right]^{\cdot} \right\} (\cdot)^{\cdot} - \frac{k\alpha \cos^2 \varphi}{g^2(g + \alpha \sin \varphi) \sin \varphi} (\cdot),$$

$$\Phi = \frac{R(g + \alpha \sin \varphi)}{g \sin \varphi} Q_{\varphi}, \quad D = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)},$$

$$f(\varphi) = \left\{ \frac{g^4(g + \alpha \sin \varphi)^2 \cos \varphi - k^2 \alpha^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{k\alpha g^2(g + \alpha \sin \varphi) \sin^4 \varphi} - \frac{1}{k\alpha} \left[\frac{g^2(g + \alpha \sin \varphi)}{\sin \varphi} \right]^{\cdot} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right\} P$$

$$+ R^2 \left[\frac{(g + \alpha \sin \varphi)^2}{g^2 \sin^4 \varphi} p_r \right]^{\cdot} + \frac{R^2(g + \alpha \sin \varphi)}{g^2 \sin \varphi} \left(\frac{g + \alpha \sin \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\nu ak}{g^2} \right) p_{\varphi}, \quad (2.5)$$

$$P = P_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} Rak(p_r \cos \varphi - p_{\varphi} \sin \varphi) \frac{g + \alpha \sin \varphi}{g^4} d\varphi,$$

$$P_0 = \frac{R(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)}{g_0} (Q_{\varphi_0} \cos \varphi_0 + N_{\varphi_0} \sin \varphi_0).$$

上式中,下标“0”表示该量取边界 $\varphi = \varphi_0$ 处值,下同;上标“ $\cdot$ ”表示对 φ 求导。

沿用文献[2]的统一复变量化方法。设有复函数

$$S = A\Phi + B\chi. \quad (2.6)$$

式中 A, B 为待定复常数。则有

$$\mathcal{L}(S) = A\mathcal{L}(\Phi) + B\mathcal{L}(\chi)$$

$$= \left[-A\nu + B \frac{ak}{Dg^3} \right] \Phi + \left[\frac{-Ehak}{g^3} A + B\nu \right] \chi + Af(\varphi). \quad (2.7)$$

取

$$-A\nu + \frac{ak}{Dg^3} B = -2Ai\mu(\varphi),$$

$$-A \frac{Ehak}{g^3} + B\nu = -2Bi\mu(\varphi), \quad (2.8)$$

可以求得

$$\mu^2 = 3(1 - \nu^2) \frac{a^2 k^2}{h^2 g^4} \left[1 - \frac{\nu^2 h^2}{12(1 - \nu^2)} \frac{g^4}{a^2 k^2} \right]. \quad (2.9)$$

对于薄壳, 量

$$\frac{\nu^2}{12(1 - \nu^2)} \frac{h^2 g^4}{a^2 k^2} = \frac{\nu^2}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{r_1} \right)^2 \ll 1.$$

因此有

$$\mu \approx [3(1 - \nu^2)]^{1/2} \frac{ak}{hg^3}. \quad (2.10)$$

由 (2.8) 和 (2.10) 式得到

$$B = -[12(1 - \nu^2)]^{1/2} \frac{D}{h} Ai \left\{ 1 + \frac{\nu i}{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}} \frac{h}{r_1} \right\},$$

同样, 略去小量 $O(h/r_1)$ 得

$$B \approx -[12(1 - \nu^2)]^{1/2} \frac{D}{h} Ai. \quad (2.11)$$

B 的确可简化为常数。本文选取

$$A = \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} i. \quad (2.12)$$

这样, 由 (2.6—2.8), (2.11), (2.12) 诸式, 我们得到

$$\mathcal{L}(S) + 2\mu(\varphi)iS = \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} if(\varphi). \quad (2.13)$$

式中

$$S = \chi + \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} \frac{R(g + \alpha \sin \varphi)}{g \sin \varphi} iQ_{\varphi}. \quad (2.14)$$

上述复变量化方法是文献 [2] 对圆环壳问题提出的, 本文的改进在于 (2.8) 式引入的 μ 与 φ 有关, 不再是一常数。方程 (2.13) 的荷载项 $f(\varphi)$ 在经线的极值点 ($\varphi = 0, \pi$) 具有奇异性, 它给特解的寻求带来困难。为了消除这种奇异性, 引入文献 [7] 的推广的 НОВОЖИЛОВ 变换

$$V = S - \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} i \operatorname{ctg} \varphi P, \quad (2.15)$$

代入 (2.13) 式, 计算后得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V) + 2\mu(\varphi)iV = & \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} i \left\{ - \left[\frac{k\alpha \sin \varphi}{g^2(g + \alpha \sin \varphi)} + 2\mu i \right] \right. \\ & \cdot \operatorname{ctg} \varphi P + \frac{R^2}{\sin \varphi} \left[\frac{(g + \alpha \sin \varphi)^2}{g^2} (p_r \sin \varphi + p_{\varphi} \cos \varphi) \right] \\ & \left. + \frac{R\nu ak(g + \alpha \sin \varphi)}{g^4 \sin \varphi} p_{\varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

上式中, 项

$$\frac{k\alpha \sin \varphi}{g^2(g + \alpha \sin \varphi)} + 2\mu i = 2\mu i \left\{ 1 - \frac{i}{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}} \frac{h}{r_1} \right\}.$$

对于薄壳,应有 $|h/r_2| \ll 1$, 在 (2.16) 式中略去小量 $O(h/r_2)$, 最后得到

$$\begin{aligned} [g^2(g + \alpha \sin \varphi) \dot{V}]^* + \left[-\frac{\alpha^2 k^2 \cos^2 \varphi}{g^2(g + \alpha \sin \varphi)} + 2\mu_0 i \frac{k^2 \sin \varphi}{g^3} \right] V \\ - \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} \left\{ 2\mu_0 \frac{k^2}{g^3} \cos \varphi P + Rak i \left[\frac{(g + \alpha \sin \varphi)^2}{g^2} (p_r \sin \varphi + p_\varphi \cos \varphi) \right]^* \right. \\ \left. + \frac{\nu \alpha^2 k^2 (g + \alpha \sin \varphi)}{g^4} i p_\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中,

$$\mu_0 = [3(1 - \nu^2)]^{1/2} \frac{\alpha^2}{Rh}. \quad (2.18)$$

方程 (2.17) 中, 经线极值点的奇异性已经消除; 该方程与原方程 (2.4) 在薄壳理论误差范围内等价, 形式更为简便.

三、内力和位移

由 (2.14) 和 (2.15) 式可以得到

$$V = \chi + \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} i \left[\frac{R(g + \alpha \sin \varphi)}{g \sin \varphi} Q_\varphi - \operatorname{ctg} \varphi P \right]. \quad (3.1)$$

于是

$$\chi = \operatorname{Re} V,$$

$$Q_\varphi^* = \frac{\alpha g}{g + \alpha \sin \varphi} (\sin \varphi \operatorname{Im} V + \cos \varphi P^*). \quad (3.2)$$

式中

$$Q_\varphi^* = \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} \alpha Q_\varphi, \quad P^* = \frac{[12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} P. \quad (3.3)$$

文献 [10] 已给出

$$\begin{aligned} M_\varphi &= D \left(\frac{\dot{\chi}}{r_1} + \nu \frac{\chi}{r} \cos \varphi \right), \\ M_\theta &= D \left(\nu \frac{\dot{\chi}}{r_1} + \frac{\chi}{r} \cos \varphi \right), \\ N_\varphi &= -Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{r \sin \varphi} P, \\ N_\theta &= -\frac{(r_1 Q_\varphi)^*}{r_1} - \frac{1}{r_1 \sin^2 \varphi} P + \frac{r}{\sin \varphi} p_r. \end{aligned} \quad (3.4)$$

将 (3.2) 式代入上式, 并利用 (2.1) 和 (2.2) 式, 可得

$$\begin{aligned} M_\varphi^* &= \frac{g^3}{k} \operatorname{Re} \dot{V} + \frac{\alpha \nu g \cos \varphi}{g + \alpha \sin \varphi} \operatorname{Re} V, \\ M_\theta^* &= \frac{\nu g^3}{k} \operatorname{Re} \dot{V} + \frac{\alpha g \cos \varphi}{g + \alpha \sin \varphi} \operatorname{Re} V, \\ N_\varphi^* &= \frac{\alpha g}{g + \alpha \sin \varphi} (-\cos \varphi \operatorname{Im} V + \sin \varphi P^*), \\ N_\theta^* &= -\frac{g}{k} \operatorname{Im} \dot{V} + \frac{g + \alpha \sin \varphi}{g} (p_r^* \sin \varphi + p_\varphi^* \cos \varphi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中

$$\begin{aligned} M_{\varphi}^* &= \frac{a}{D} M_{\varphi}, \quad M_{\theta}^* = \frac{a}{D} M_{\theta}, \\ N_{\varphi}^* &= \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} a N_{\varphi}, \quad N_{\theta}^* = \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} a N_{\theta}, \\ p_r^* &= \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} R a p_r, \quad p_{\varphi}^* = \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^2} R a p_{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

做与文献[7]相似的推导,可以得到位移的计算公式

$$\begin{aligned} y^* &= -\frac{g^2(g + \alpha \sin \varphi)}{k} \operatorname{Im} V + \alpha \nu \cos \varphi \operatorname{Im} V - \alpha \nu \sin \varphi P^* \\ &\quad + \frac{(g + \alpha \sin \varphi)^2}{g^2} (p_r^* \sin \varphi + p_{\varphi}^* \cos \varphi), \\ z^* &= \frac{z_0}{a} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{k}{g^3} \left[-\cos \varphi \operatorname{Re} V + \frac{\alpha}{2\mu_0} (N_{\varphi}^* - \nu N_{\theta}^*) \sin \varphi \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

式中

$$y^* = [12(1-\nu^2)]^{1/2} \frac{\alpha}{h} y, \quad z^* = \frac{z}{a}. \quad (3.8)$$

(3.7) 式 z^* 积分中的因子 $\alpha/(2\mu_0)$ 是 $O(h/a)$ 量级的小量,因此, z^* 可以用下式近似计算:

$$z^* = z_0^* - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{k \cos \varphi}{g^3} \operatorname{Re} V d\varphi. \quad (3.9)$$

在以上诸式中,带“*”量均为无量纲量。引入无量纲水平内力分量

$$H^* = \frac{g + \alpha \sin \varphi}{\alpha g} (N_{\varphi}^* \cos \varphi - Q_{\varphi}^* \sin \varphi). \quad (3.10)$$

由 (3.2) 和 (3.5) 式可得

$$H^* = -\operatorname{Im} V. \quad (3.11)$$

于是,由 (3.2) 和 (3.11) 式得

$$V = \chi - iH^*. \quad (3.12)$$

(3.12) 式揭示了变换 (2.15) 式的物理意义。即本文选取的复函数 V , 其实部为经线切线转角,虚部为内力水平分量。

四、边界条件

考虑由 $\varphi = \varphi_0, \varphi_1$ 所界部分环壳。边界条件可提为

$$\begin{aligned} H^*(\varphi_0) &= \bar{H}_0^* \text{ 或 } y^*(\varphi_0) = \bar{y}_0^*, \\ M^*(\varphi_0) &= \bar{M}_0^* \text{ 或 } \chi(\varphi_0) = \bar{\chi}_0, \\ H^*(\varphi_1) &= \bar{H}_1^* \text{ 或 } y^*(\varphi_1) = \bar{y}_1^*, \\ M^*(\varphi_1) &= \bar{M}_1^* \text{ 或 } \chi(\varphi_1) = \bar{\chi}_1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

或其它混合形式。式中右端各量为已知边界值。两个边界四个条件,可以确定 (2.17) 式解答的两个复常数。

根据上节的 (3.2), (3.5), (3.7) 和 (3.10) 诸式,不难直接验证,通常的边界条件 (4.1) 可

以统一表示为

$$\begin{aligned} C_0 \operatorname{Re} \dot{V} + i C'_0 \operatorname{Im} \dot{V} + B_0 \operatorname{Re} V + i B'_0 \operatorname{Im} V \Big|_{\varphi=\varphi_0} &= \lambda_0, \\ C_1 \operatorname{Re} \dot{V} + i C'_1 \operatorname{Im} \dot{V} + B_1 \operatorname{Re} V + i B'_1 \operatorname{Im} V \Big|_{\varphi=\varphi_1} &= \lambda_1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

式中

$$\begin{aligned} B_0 &= B'_0 = \frac{\alpha \nu k \cos \varphi_0}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)}, \quad \text{当 } \varphi_0 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}, \\ B_0 &= 1 - C_0, \quad B'_0 = 1 + C'_0, \quad \text{当 } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}, \\ B_1 &= B'_1 = \frac{\alpha \nu k \cos \varphi_1}{g_1^2(g_1 + \alpha \sin \varphi_1)}, \quad \text{当 } \varphi_1 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}, \\ B_1 &= 1 - C_1, \quad B'_1 = 1 + C'_1, \quad \text{当 } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

参数 $C_n, C'_n, \lambda_n (n=0, 1)$ 与边界条件有关, 以 $\varphi = \varphi_0$ 边界为例 ($\varphi = \varphi_1$ 同), 取值如下:

(1) 固支边

$$\begin{aligned} C_0 &= 0, \quad C'_0 = -1, \\ \lambda_0 &= \frac{\alpha \nu k \cos \varphi_0}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)} \bar{\chi}_0 + i \left[\frac{k \bar{y}_0^*}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)} + \frac{k \alpha \nu \sin \varphi_0 P_0^*}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)}{g_0^4} (p_{r_0}^* \sin \varphi_0 + p_{\varphi_0}^* \cos \varphi_0) \right] \quad \left(\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

或

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \bar{\chi}_0 + i \left[\frac{k \bar{y}_0^*}{1 + \alpha \sin \varphi_0} + \frac{k \alpha \nu \sin \varphi_0}{1 + \alpha \sin \varphi_0} P_0^* \right. \\ &\quad \left. - k(1 + \alpha \sin \varphi_0) p_{r_0}^* \sin \varphi_0 \right] \quad \left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

(2) 铰支边

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \quad C'_0 = -1, \\ \lambda_0 &= \frac{k}{g_0^3} \bar{M}_{\varphi_0}^* + i \left[\frac{k \bar{y}_0^*}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)} + \frac{k \alpha \nu \sin \varphi_0 P_0^*}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)}{g_0^4} (p_{r_0}^* \sin \varphi_0 + p_{\varphi_0}^* \cos \varphi_0) \right] \quad \left(\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

或

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= k \bar{M}_{\varphi_0}^* + i \left[\frac{k \bar{y}_0^*}{1 + \alpha \sin \varphi_0} + \frac{k \alpha \nu \sin \varphi_0}{1 + \alpha \sin \varphi_0} P_0^* \right. \\ &\quad \left. - k(1 + \alpha \sin \varphi_0) p_{r_0}^* \sin \varphi_0 \right] \quad \left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

(3) 自由边

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \quad C'_0 = 0, \\ \lambda_0 &= \frac{k}{g_0^3} \bar{M}_{\varphi_0}^* - i \frac{\alpha \nu k \cos \varphi_0}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)} \bar{H}_0^* \quad \left(\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

或

$$\lambda_0 = k\bar{M}_{\varphi_0}^* - i\bar{H}_0^* \left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right). \quad (4.9)$$

(4) 简支边

$$C_0 = 1, C'_0 = 0,$$

$$\lambda_0 = \frac{k}{g_0^3} \bar{M}_{\varphi_0}^* - i \frac{\alpha \nu k \cos \varphi_0}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)} \bar{H}_0^* \left(\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right) \quad (4.10)$$

或

$$\lambda_0 = k\bar{M}_{\varphi_0}^* - i\bar{H}_0^* \left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right). \quad (4.11)$$

简支边与自由边各参数有相同取值, 它们的差别在于 P_0^* . 当边界之一为自由边界时, 方程 (2.17) 式中 P 的积分常数 P_0 (见 (2.5) 式), 因而 P_0^* 可预先确定. 对简支边界, 则不一定. 一般来说, 当边界 $\varphi = \varphi_0, \varphi_1$ 均对竖向位移 z^* 有约束时, P_0^* 待定.

设当 $\varphi = \varphi_0, \varphi_1$ 时, 有 $z_1^* - z_0^* = \Delta \bar{z}^*$ 给定, 则确定 P_0^* 的补充条件可由 (3.9) 式得到, 即

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{k \cos \varphi}{g^3} \operatorname{Re} V d\varphi = -\Delta \bar{z}^*. \quad (4.12)$$

在简支边情形, 如果给定 $\bar{\theta}_{\varphi_0}^*$, 则由 (3.1) 和 (3.12) 式, 可知

$$-H_0^* = \frac{g_0 + \alpha \sin \varphi_0}{\alpha g_0 \sin \varphi_0} \bar{\theta}_{\varphi_0}^* - \operatorname{ctg} \varphi_0 P_0^*. \quad (4.13)$$

(4.10) 和 (4.11) 式的 λ_0 可改写为

$$\lambda_0 = \frac{k}{g_0^3} \bar{M}_{\varphi_0}^* + i \left[\frac{\nu k \cos \varphi_0}{g_0^3 \sin \varphi_0} \bar{\theta}_{\varphi_0}^* - \frac{\alpha \nu k \cos^2 \varphi_0 P_0^*}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0) \sin \varphi_0} \right] \left(\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right) \quad (4.14)$$

或

$$\lambda_0 = k\bar{M}_{\varphi_0}^* + i \left[\frac{1 + \alpha \sin \varphi_0}{\alpha \sin \varphi_0} \bar{\theta}_{\varphi_0}^* \right] \left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2} \right). \quad (4.15)$$

对其它边界情形, 可根据 (4.2) 式适当确定参数 C_0, C'_0 和 λ_0 的值.

五、积分方程

这样, 由 (2.17) 和 (4.2) 式, 轴对称椭圆环壳边值问题的提法是

$$[g^2(g + \alpha \sin \varphi) \dot{V}]' + \left[-\frac{\alpha^2 k^2 \cos^2 \varphi}{g^2(g + \alpha \sin \varphi)} + 2\mu_0 i \frac{k^2 \sin \varphi}{g^3} \right] V = F(\varphi). \quad (5.1)$$

$$C_0 \operatorname{Re} \dot{V} + i C'_0 \operatorname{Im} \dot{V} + B_0 \operatorname{Re} V + i B'_0 \operatorname{Im} V|_{\varphi=\varphi_0} = \lambda_0,$$

$$C_1 \operatorname{Re} \dot{V} + i C'_1 \operatorname{Im} \dot{V} + B_1 \operatorname{Re} V + i B'_1 \operatorname{Im} V|_{\varphi=\varphi_1} = \lambda_1.$$

式中

$$\begin{aligned} F(\varphi) = & 2\mu_0 \frac{k^2 \cos \varphi}{g^3} P^* + k i \left[\frac{(g + \alpha \sin \varphi)^2}{g^2} (p_r^* \sin \varphi + p_\varphi^* \cos \varphi) \right] \\ & + \frac{\alpha \nu k^2 (g + \alpha \sin \varphi)}{g^4} i p_\varphi^*. \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$P^* = P_0^* + \int_{\varphi_0}^{\varphi} k (p_r^* \cos \varphi - p_\varphi^* \sin \varphi) \frac{g + \alpha \sin \varphi}{g^4} d\varphi.$$

当 P_0^* 不能预先确定时, 还应有补充条件 (4.12).

在方程 (5.1) 中, 假定当 $R \neq 0$ 时, 系数 $g^2(g + \alpha \sin \varphi) \neq 0$, 即

$$g + \alpha \sin \varphi \neq 0 \quad (\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1], R \neq 0). \quad (5.3)$$

条件 (5.3) 相当于 $r \neq 0$. 如果 $r = 0$, 则由 (2.1) 和 (2.2) 式, 可推知 $r_2 = 0$, 薄壳假设之一 $|h/r_2| \ll 1$ 将失效. 当 $R = 0$ 时, 可以不作 (5.3) 式的限定, 这就是椭球壳情形.

我们将在 (5.3) 式下考虑混合边值问题 (5.1) 式的积分方程解法: 当 P_0^* 待定时, 还有积分约束条件 (4.12). 可以用各种方法建立与 (5.1) 式等价的积分方程问题, 不同的方法得到的积分方程形式可能不同, 本文给出其中一种形式简便如下:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V &= \operatorname{Re} f^* - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K_1(\varphi, t) \operatorname{Re} F(t) dt \\ &\quad + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K_1(\varphi, t) \left[-\frac{\alpha^2 k^2 \cos^2 t}{g^2(g + \alpha \sin t)} \operatorname{Re} V - 2\mu_0 \frac{k^2 \sin t}{g^3} \operatorname{Im} V \right] dt, \\ \operatorname{Im} V &= \operatorname{Im} f^* - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K_2(\varphi, t) \operatorname{Im} F(t) dt \\ &\quad + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K_2(\varphi, t) \left[-\frac{\alpha^2 k^2 \cos^2 t}{g^2(g + \alpha \sin t)} \operatorname{Im} V + 2\mu_0 \frac{k^2 \sin t}{g^3} \operatorname{Re} V \right] dt. \end{aligned} \quad (5.4)$$

式中

$$\begin{aligned} K_1(\varphi, t) &= \begin{cases} \left[J(\varphi) - \frac{C_0 A_0}{B_0} \right] \left[1 + \frac{J(t) - \frac{C_0 A_0}{B_0}}{\frac{C_0 A_0}{B_0} - \frac{C_1 A_1}{B_1} - J(\varphi_1)} \right] & (\varphi \leq t \leq \varphi_1), \\ \left[J(t) - \frac{C_0 A_0}{B_0} \right] \left[1 + \frac{J(\varphi) - \frac{C_0 A_0}{B_0}}{\frac{C_0 A_0}{B_0} - \frac{C_1 A_1}{B_1} - J(\varphi_1)} \right] & (\varphi_0 \leq t \leq \varphi). \end{cases} \\ K_2(\varphi, t) &= \begin{cases} \left[J(\varphi) - \frac{C'_0 A_0}{B'_0} \right] \left[1 + \frac{J(t) - \frac{C'_0 A_0}{B'_0}}{\frac{C'_0 A_0}{B'_0} - \frac{C'_1 A_1}{B'_1} - J(\varphi_1)} \right] & (\varphi \leq t \leq \varphi_1), \\ \left[J(t) - \frac{C'_0 A_0}{B'_0} \right] \left[1 + \frac{J(\varphi) - \frac{C'_0 A_0}{B'_0}}{\frac{C'_0 A_0}{B'_0} - \frac{C'_1 A_1}{B'_1} - J(\varphi_1)} \right] & (\varphi_0 \leq t \leq \varphi). \end{cases} \\ \operatorname{Re} f^* &= \frac{\operatorname{Re} \lambda_0}{B_0} + \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_0}{B_0} - \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{B_1} \right) \frac{J(\varphi) - \frac{C_0 A_0}{B_0}}{\frac{C_0 A_0}{B_0} - \frac{C_1 A_1}{B_1} - J(\varphi_1)}, \\ \operatorname{Im} f^* &= \frac{\operatorname{Im} \lambda_0}{B'_0} + \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda_0}{B'_0} - \frac{\operatorname{Im} \lambda_1}{B'_1} \right) \frac{J(\varphi) - \frac{C'_0 A_0}{B'_0}}{\frac{C'_0 A_0}{B'_0} - \frac{C'_1 A_1}{B'_1} - J(\varphi_1)}, \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{1}{g_0^2(g_0 + \alpha \sin \varphi_0)}, \quad A_1 = \frac{1}{g_1^2(g_1 + \alpha \sin \varphi_1)},$$

$$J(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{g^2(g + \alpha \sin \varphi)}. \quad (5.5)$$

参数 $B_n, B'_n, C_n, C'_n, \lambda_n, \lambda'_n$ ($n = 0, 1$) 已在 (4.13)–(4.15) 式给出。为了便于数值计算, 积分方程 (5.4) 式已写做实变量形式。

方程 (5.4) 为 Fredholm 第二类积分方程组。若记

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= B_1 C_0 A_0 - B_0 C_1 A_1 - B_0 B_1 J(\varphi_1), \\ \Delta_2 &= B'_1 C'_0 A_0 - B'_0 C'_1 A_1 - B'_0 B'_1 J(\varphi_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

容易验证, 在条件 (5.3) 和条件

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0 \quad (5.7)$$

情况下, (5.4) 式的积分核是连续有界的。可以通过微分计算核实, (5.4) 式与原边值问题在 (5.3) 和 (5.7) 式的条件下等价。

六、积分方程的数值解

作为本文结果的应用, 我们用数值积分方法得到了方程 (5.4) 的数值解, 计算了 3 个有实际意义的算例。

假设将区间分为 N 等分, 并假设在每一分段内, 未知函数 V_i 可以近似地看作常数, 于是 (5.4) 式可离散为下述代数方程组:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V_i &= \operatorname{Re} f_i + \sum_{j=1}^N (a_{ij} \operatorname{Re} V_j + b_{ij} \operatorname{Im} V_j), \\ \operatorname{Im} V_i &= \operatorname{Im} f_i + \sum_{j=1}^N (a'_{ij} \operatorname{Re} V_j + b'_{ij} \operatorname{Im} V_j), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (6.1)$$

式中

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_i &= \operatorname{Re} f_i^* - \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} K_1(\varphi_i, t) \operatorname{Re} F(t) dt, \\ \operatorname{Im} f_i &= \operatorname{Im} f_i^* - \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} K_2(\varphi_i, t) \operatorname{Im} F(t) dt, \\ a_{ij} &= \int_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} K_1(\varphi_i, t) G_1(t) dt, \\ b_{ij} &= - \int_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} K_1(\varphi_i, t) G_2(t) dt, \\ a'_{ij} &= \int_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} K_2(\varphi_i, t) G_1(t) dt, \\ b'_{ij} &= \int_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} K_2(\varphi_i, t) G_2(t) dt, \\ G_1(t) &= - \frac{\alpha^2 k^2 \cos^2 t}{g^2(g + \alpha \sin t)}, \quad G_2(t) = \frac{2\mu_0 k^3 \sin t}{g^3}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

上式中, 已将边界值 φ_1 改记为 φ_N ; 式中的积分均采用 Gauss 积分计算。

当 P_0^* 待定时, 还应有补充条件

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{Re} V_j \int_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} \frac{k \cos \varphi}{g^3} d\varphi = -\Delta \bar{z}^*. \quad (6.3)$$

(6.1) 和 (6.3) 式组成确定 $(2N+1)$ 个未知量 $\operatorname{Re} V_i$, $\operatorname{Im} V_i$ 和 P_0^* 的代数方程组。

在计算内力和位移诸量时,要用到 $\operatorname{Re} \dot{V}$ 和 $\operatorname{Im} \dot{V}$ 的值,它们的计算公式可由方程 (5.4) 直接微分得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot{V} &= \operatorname{Re} \dot{f}^* - \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} K_3(\varphi, t) \operatorname{Re} F(t) dt \\ &\quad + \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} K_2(\varphi, t) [G_1(t) \operatorname{Re} V - G_2(t) \operatorname{Im} V] dt, \\ \operatorname{Im} \dot{V} &= \operatorname{Im} \dot{f}^* - \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} K_4(\varphi, t) \operatorname{Im} F(t) dt \\ &\quad + \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} K_4(\varphi, t) [G_1(t) \operatorname{Im} V + G_2(t) \operatorname{Re} V] dt. \end{aligned} \quad (6.4)$$

式中

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot{f}^* &= \frac{d}{d\varphi} \operatorname{Re} f^*, \quad \operatorname{Im} \dot{f}^* = \frac{d}{d\varphi} \operatorname{Im} f^*, \\ K_3(\varphi, t) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} K_1(\varphi, t), \\ K_4(\varphi, t) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} K_2(\varphi, t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

算例 1 环管形热膨胀节,如图 2 所示。本算例取自文献 [12]。各参数值为:

$$\alpha = 0.2544, \mu_0 = 13.755, k = 1, \nu = 0.3.$$

由于对称性,仅考虑上半圆弧部分,取 $\varphi_0 = -90^\circ$, $\varphi_N = 90^\circ$ 。假定边界 φ_0 处由于管道约束而不能转动,边界 φ_N 处满足对称性条件,因此有: $C_0 = C'_0 = C_1 = C'_1 = 0$, 以及 (4.1) 式边界值 $X_0 = \bar{H}_0^* = X_1 = \bar{H}_1^* = 0$ 。计算时,取荷载参数 $P_0^* = 1$ 。在图 2 和图 3 中分别绘出了弯矩 M_θ^* , M_ϕ^* 和薄膜力 N_θ^* , N_ϕ^* 的变化曲线。 M_θ^* , M_ϕ^* 与 Dahl^[12] 的实验值符合良好; N_θ^* 的最大值较实验结果偏高,但 N_ϕ^* , N_θ^* 与其余实验值仍是基本符合的。

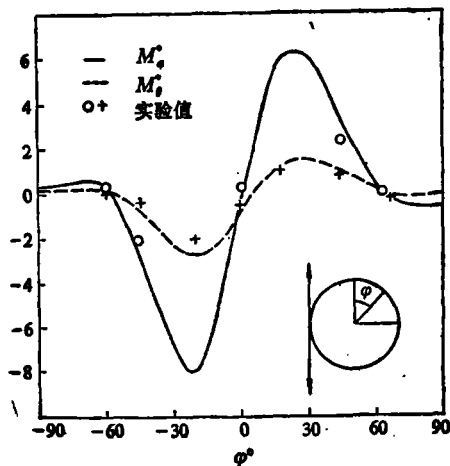


图 2 膨胀节的弯矩

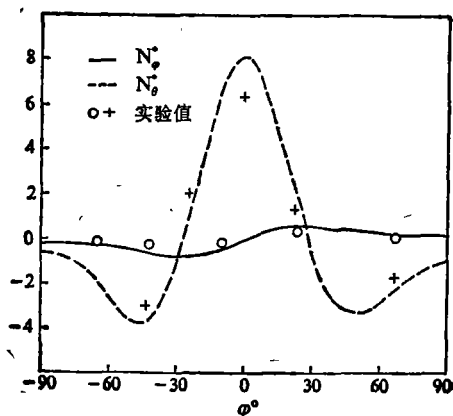


图 3 膨胀节的薄膜力

算例 2 流体静压下的半圆环壳, 如图 4。各参数值为: $\alpha = 0.2$, $\mu_0 = 13.218$, $K = 1$, $\nu = 0.3$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = 180^\circ$; 假定上边界自由, 下边界固定, 因此有 $C_0 = 1$, $C'_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C'_1 = -1$, $X_0 = \bar{H}_0^* = X_1 = \bar{H}_1^* = 0$ 。计算时, 表面荷载分量取为

$$p_\varphi^* = 1 - \cos \varphi, \quad p_\theta^* = 0. \quad (6.6)$$

我们已假定液面位于上边界。在图 4 中, 绘出了外表面无量纲应力 σ_φ^* 和 σ_θ^* 的计算结果, 且

$$\sigma_\varphi^* = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh} a \sigma_\varphi, \quad \sigma_\theta^* = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh} a \sigma_\theta \quad (6.7)$$

与文献 [13] 准确解比较表明, 本文计算结果具有良好准确度, 最大误差不到 3%。

算例 3 半椭圆形密封环, 如图 6。各参数值为 $\alpha = 0.3$, $\mu_0 = 16$, $\nu = 0.3$; 由于对称性, 仅考虑上半椭圆部分, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = 90^\circ$; 密封

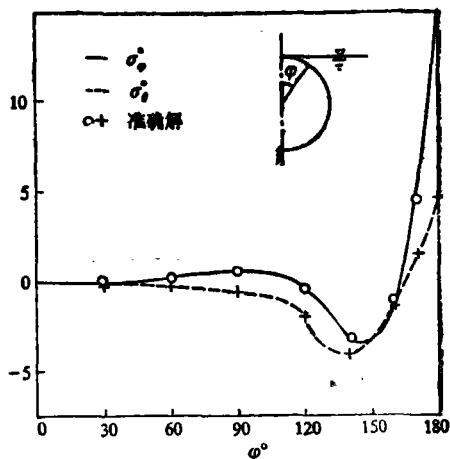


图 4 液压下的半圆环壳的应力

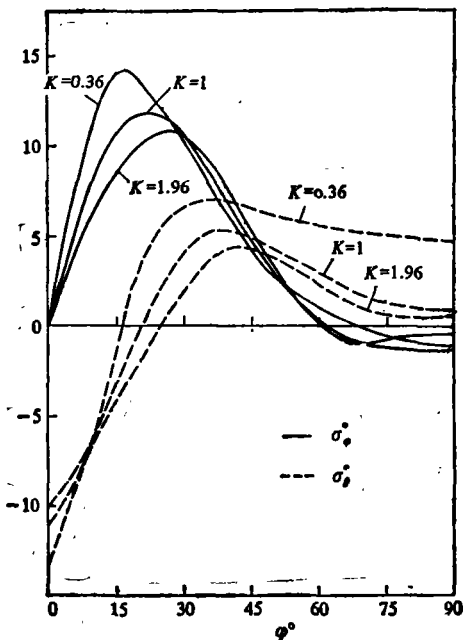


图 5 密封环的外表面应力

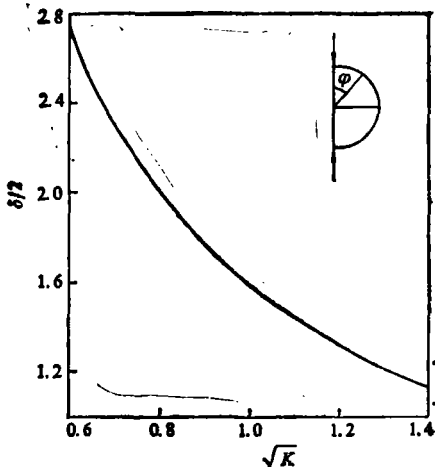


图 6 密封环的竖向位移

环仅在边界 φ_0 处受有竖直压力, 可取 $C_0 = 1$, $C'_0 = C_1 = C'_1 = 0$; 计算时, 取荷载参数 $P_0^* = -1$ 。在图 5 中, 绘出了外表面应力 σ_φ^* 和 σ_θ^* 的计算结果, 分别对应于 $K = 0.36, 1, 1.96$ 的情形。我们看到, σ_φ^* 和 σ_θ^* 的最大值随 K 值的增加而降低。在图 6 中, 绘出了密封环边缘相对竖向位移 δ 随 K 值的变化, $K = 0.36-1.96$, $\delta = 2|z_0^*|$, 取 $z_N^* = 0$ 。我们看到, δ 随 K 值的增加而降低。

从上述情况可以看出, 对于给定的 δ , 较大的 K 值可以获得较大的密封压力; 而 K 值增加

产生的强度富余,允许了这种可能。这对密封环的设计,是有益的。

七、结 束 语

本文给出了椭圆截面环壳一般轴对称问题的一种简化复变量方程;建立了等价的积分方程组,从而提供了椭圆环壳问题的一种较为简便的数值算法。与实验结果和准确解的比较表明,本文的理论及数值计算是可靠的。本文计算是在 SIEMENS 7570C 计算机上完成的。

参 考 文 献

- [1] Axelrad, E. L., *Proc. 15th ICTAM*, Toronto, Canada, 1980, 45—56.
- [2] 钱伟长、郑恩霖,清华大学学报, 19(1979), 1:27—47.
- [3] 钱伟长、郑恩霖,应用数学和力学, 1(1980), 3:287—299.
- [4] Xia Zihui (夏子辉)、Zhang wei (张维), *Int. J. Pressure Vessels Pinping*, 26(1986), 2:129—144.
- [5] 沈祖培、吴振辉、赵鸿宾,清华大学学报, 21(1981), 3:93—110.
- [6] 黄 黔,应用数学和力学, 3(1982), 1:101—112.
- [7] 陈山林,应用数学和力学, 7(1986), 5:425—434.
- [8] Chen Shanlin (陈山林), *Progress in Applied Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, Printed in The Netherlands, 1987, 181—192.
- [9] Clark, R. A., Gilroy, T. I. and Reissner, E., *J. Appl. Mechanics*, 19(1952), 37—48.
- [10] Flügge, W., *Stresses in Shells*, 2nd., New York, 1973.
- [11] 杨耀乾,薄壳理论,中国铁道出版社, 1984.
- [12] 钱伟长,应用数学与力学论文集,江苏科学技术出版社, 1980.
- [13] 伍生龙、徐磊、陈山林,重庆建筑工程学院学报, 1(1989).