

半线性热方程的整体解、渐近性与 Blow-up 问题*

王明新 丁夏娃

(中国科学院系统科学研究所, 北京 100080)

摘 要

本文讨论半线性热方程初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^\gamma - u \quad (1 < \gamma < \frac{n+2}{n-2}), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 整体解、渐近性与 Blow-up 问题. 证明了解的性质完全依赖于 $\varphi(x)$ 与相应的椭圆问题之正解的关系. 得到门槛结果.

关键词 半线性热方程、初值问题、整体解、渐近性、Blow-up

半线性热方程 $u_t - \Delta u = |u|^{r-1}u$ ($r > 1$), $u(x, 0) = \varphi(x)$ 的整体解、局部解以及 Blow-up 问题已有很完善的结果. Fujita^[1] 讨论了古典解. Weissler^[2-3] 讨论了 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 广义解, 证明了, 当 $p > n(\gamma-1)/2$ 或 $p = n(\gamma-1)/2 > 1$ 时, 只要 $\varphi(x) \in L^p$, 就有局部解; 当 $n(\gamma-1)/2\gamma < p < n(\gamma-1)/2$ 时, 如果 $\lim_{t \downarrow 0} \|t^b e^{\Delta} \varphi\|_{p,r}$ 适当小 ($b = \frac{1}{\gamma-1} - \frac{n}{2p\gamma}$), 局部解存在; 当 $p = \frac{n(\gamma-1)}{2} = 1$ 时, 如果 $\varphi(x) \not\equiv 0$, $\varphi(x) \in L^1$, 则 L^1 解一定在有限时刻 Blow-up. 当 $\varphi(x) \in L^p$ ($1 \leq p < +\infty$) 时, 如果 $(\gamma-1) \int_0^\infty \|e^{t\Delta} \varphi\|_{p,r}^{p-1} dt \leq 1$, 则存在 L^p 整体解. 同时证明了, 当 $p < \frac{n(\gamma-1)}{2}$ 时, 存在 $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) \in L^p$, 使得该问题在 L^p 中不存在局部解. 具体 L^p 解的定义请参看文献 [2]. 从某种意义上讲, 这些结果是较完善的.

对于初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{r-1}u - u \quad (r > 1), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

1991-01-28 收稿, 1991-09-07 收修改稿

* 中国科学院博士后基金资助项目

丁夏畦和赵会江^[1]证明了小初值情形下, 某种带有权的 L^p 广义解的整体存在性 (不包括 $p = \frac{n(\gamma-1)}{2} = 1$ 的情形). 本文讨论 $\varphi(x) \geq 0$, 即正解. 于是 $|u|^{\gamma-1}u = u^\gamma$. 对于(1)式, 文献[2]中的所有结论成立. 与文献[3]中相应的整体解存在的充分条件: $(\gamma-1) \int_0^\infty e^{-\gamma s} \|e^{s\Delta} \varphi\|_\infty^{\gamma-1} ds \leq 1$ 也成立.

一、主要结论

我们仅讨论 $1 < \gamma < \frac{n+2}{n-2}$ 的情形. 于是

$$\begin{cases} -\Delta u = u^\gamma - u, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u > 0, u \rightarrow 0 & (|x| \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (2)$$

存在唯一正解 $\bar{u}(x)$, 并具有如下性质:

- (1) $\bar{u}(x) = \bar{u}(r)$ ($r = |x|$), $\bar{u}'(0) = 0$, $\bar{u}(0) > 0$, $\bar{u}(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow +\infty$),
- (2) $\bar{u}(x) \sim M e^{-\alpha|x|^2}$ ($\alpha > 0$) 在无穷远处成立.

于是 $\bar{u}(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall 0 < p \leq +\infty$. $\bar{u}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

令 $e^t u = v$, 则

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = e^{-(\gamma-1)t} v^\gamma, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ v(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3)$$

将其写成积分方程的形式

$$v(t) = e^{t\Delta} \varphi + \int_0^t e^{-(\gamma-1)s} e^{(t-s)\Delta} v^\gamma(s) ds. \quad (4)$$

定义 $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 称为(1)式的 L^p 广义解 (简称 L^p 解), 如果 $v(\cdot, t) = e^t u(\cdot, t)$ 满足积分方程(4).

定理 1 如果 $\varphi(x) \leq \bar{u}(x)$, 则(1)式存在 L^p 整体解 ($1 \leq p \leq +\infty$).

定理 2 如果 $\varphi(x) \leq \bar{u}(x)$, $\varphi(x) \not\equiv \bar{u}(x)$, 则(1)式的解 $u(x, t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) 在 $\mathbb{R}^n$ 上点点成立.

定理 3 如果 $\varphi(x) \geq \bar{u}(x)$, $\varphi(x) \not\equiv \bar{u}(x)$, 则(1)式不存在 L^p 整体解 ($2 < p \leq +\infty$). 同时, 当这种解局部存在时, 它一定在有限时刻 Blow-up.

上述结论给出一个门槛结果, 也证明了 $\bar{u}(x)$ 是不稳定的. 从某种意义上讲, 这个结果是完善的.

二、定理的证明

定理 1 的证明 因为 $\bar{u}(x)$ 是(2)式的解, 所以对于 $\varphi(x) = \bar{u}(x)$, $\bar{u}(x)$ 是(1)式的古典解, 从而 $e^t \bar{u}(x)$ 满足

$$e^t \bar{u} = e^{t\Delta} \bar{u} + \int_0^t e^{-(\gamma-1)s} e^{(t-s)\Delta} (e^s \bar{u})^\gamma ds.$$

取空间 $X := \{u(t): [0, +\infty) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), 0 \leq u(t) \leq e^t \bar{u}\}$. 对于 $u \in X$, 定义

$$(Fu)(t) = e^{t\Delta} \varphi + \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} e^{(t-s)\Delta} u^\gamma(s) ds.$$

则 $(Fu)(t) \geq 0$ 显然. 由于 $u(t) \leq e^t \bar{u}$, 所以 $(Fu)(t) \in L^p(\mathbb{R}^n), \forall t \geq 0$ 成立.

$$\begin{aligned} (Fu)(t) &= e^{t\Delta} \varphi + \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} e^{(t-s)\Delta} u^\gamma(s) ds \\ &\leq e^{t\Delta} \bar{u} + \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} e^{(t-s)\Delta} (e^s \bar{u})^\gamma ds = e^t \bar{u}. \end{aligned}$$

于是 $F: X \rightarrow X$.

当 $u, v \in X, u \leq v$ 时, $(Fu)(t) \leq (Fv)(t)$ 显然成立(因为 $e^{(t-s)\Delta}$ 是保正算子).

定义序列

$$u_0(t) = e^{t\Delta} \varphi, u_m(t) = (Fu_{m-1})(t), m = 1, 2, \dots.$$

由于 $u_0(t) = e^{t\Delta} \varphi \in X$, 所以 $u_m(t) \in X$. 又因为 $u_1(t) = e^{t\Delta} \varphi + \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} e^{(t-s)\Delta} u_0^\gamma(s) ds \geq e^{t\Delta} \varphi = u_0(t)$, 所以 $u_2(t) = (Fu_1)(t) \geq (Fu_0)(t) = u_1(t)$, 于是 $u_m(t) \leq u_{m+1}(t), m = 1, 2, \dots$.

上面的事实说明 $\{u_m(t)\}$ 关于 m 单调递增, 且以 $e^t \bar{u}$ 为上界. 所以存在 $u(t) \in L^p$, 使 $u_m(t) \xrightarrow{L^p} u(t) (\forall t \geq 0)$.

对于任意固定的 $T > 0$, 当 $t \in [0, T]$ 时, $\|e^{-(T-t)\Delta} e^{(t-s)\Delta} u_m^\gamma(s)\|_p \leq \|e^{-(T-t)\Delta} e^{(t-s)\Delta} (e^s \bar{u})^\gamma\|_p = \|e^{t-s\Delta} \bar{u}^\gamma\|_p \leq e^T \|\bar{u}\|_{pT}^\gamma$. 由控制收敛定理知

$$\int_0^t e^{-(t-s)\Delta} e^{(t-s)\Delta} u_m^\gamma(s) ds \xrightarrow{L^p} \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} e^{(t-s)\Delta} u^\gamma(s) ds.$$

于是 $u(t)$ 满足

$$u(t) = e^{t\Delta} \varphi + \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} e^{(t-s)\Delta} u^\gamma(s) ds,$$

即 $u(t)$ 是(3)式的 L^p 解. 从而 $e^{-t} u(x, t)$ 是(1)式的 L^p 解. 定理 1 证毕.

注 当 $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ 时, 还可以证明(1)式有古典解.

定理 2 的证明 设 $u(x, t)$ 是(1)式的 L^p 解 ($1 \leq p \leq +\infty$). 由于 $\varphi(x) \leq \bar{u}(x)$, $\varphi(x) \not\equiv \bar{u}(x)$, 利用比较原理知, 当 $t > 0$ 时, $u(x, t) < \bar{u}(x)$. 取定 $t_0 > 0$, 以 $u(x, t_0)$ 为初值重新考虑(1)式. 于是可认为 $\varphi(x) < \bar{u}(x)$ 恒成立 ($x \in \mathbb{R}^n$).

先考虑

$$-\Delta u = u^\gamma - u, x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

由于 $\bar{u}(r) \rightarrow 0 (r \rightarrow +\infty)$ 时, 所以可取 R_1 充分大, 使得 $\bar{u}(R_1) < \frac{\gamma-1}{\gamma}$. 定义

$$v(x) = v(r) = \begin{cases} \bar{u}(r) - \varepsilon(\bar{u}(r) - \bar{u}(R_1)), & 0 \leq r \leq R_1, r = |x|, \\ \bar{u}(r), & r \geq R_1, \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ 待定. $v(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 除去 $|x| = R_1$ 外, $v(x)$ 光滑. 在 $|x| = R_1$ 处, $v'_+(R_1) = \bar{u}'(R_1) < (1 - \varepsilon)\bar{u}'(R_1) = v'_-(R_1)$ (因为 $\bar{u}'(r) < 0$).

在径向解的意义下(5)式可以写成 ($|x| = r$)

$$-u'' - \frac{n-1}{r} u' = u^r - u. \quad (6)$$

当 $0 \leq r \leq R_1$ 时, $v'(r) = (1-\varepsilon)\bar{u}'(r)$, $v''(r) = (1-\varepsilon)\bar{u}''(r)$. 于是

$$\begin{aligned} -v''(r) - \frac{n-1}{r} v'(r) - [v^r - v] &= (1-\varepsilon) \left(-\bar{u}'' - \frac{n-1}{r} \bar{u}' \right) - [v^r - v] \\ &= (1-\varepsilon) (\bar{u}^r - \bar{u}) - [\bar{u} - \varepsilon(\bar{u} - \bar{u}(R_1))]^r + \bar{u} - \varepsilon(\bar{u} - \bar{u}(R_1)) \\ &= (1-\varepsilon)\bar{u}^r - [(1-\varepsilon)\bar{u} + \varepsilon\bar{u}(R_1)]^r + \varepsilon\bar{u}(R_1) \triangleq g(\varepsilon). \end{aligned}$$

首先, 作为 x 的函数, $g(\varepsilon)$, $g'(\varepsilon)$ 关于 x 的导数是一致有界的 (因为 $\bar{u}'(r)$ 有界).

$$\begin{aligned} g(0) &= \bar{u}^r - \bar{u}^r = 0, \\ g'(\varepsilon) &= -\bar{u}^r - \gamma[(1-\varepsilon)\bar{u} + \varepsilon\bar{u}(R_1)]^{r-1}(\bar{u}(R_1) - \bar{u}) + \bar{u}(R_1), \\ g'(0) &= -\bar{u}^r - \gamma\bar{u}^{r-1}(\bar{u}(R_1) - \bar{u}) + \bar{u}(R_1) \\ &= (\gamma-1)\bar{u}^r - \gamma\bar{u}^{r-1}\bar{u}(R_1) + \bar{u}(R_1) \\ &= \bar{u}^{r-1}[(\gamma-1)\bar{u} - \gamma\bar{u}(R_1)] + \bar{u}(R_1). \end{aligned}$$

所以当 $\bar{u}(r) \geq \frac{\gamma}{\gamma-1} \bar{u}(R_1)$ 时 $g'(0) \geq \bar{u}(R_1) > 0$. 将 $g'(0)$ 写成

$$\begin{aligned} g'(0) &= (\gamma-1)\bar{u}^r - (\gamma-1)\bar{u}^{r-1}\bar{u}(R_1) - \bar{u}^{r-1}\bar{u}(R_1) + \bar{u}(R_1) \\ &= (\gamma-1)\bar{u}^{r-1}(\bar{u} - \bar{u}(R_1)) + \bar{u}(R_1) [1 - \bar{u}^{r-1}]. \end{aligned}$$

于是当 $\bar{u}(r) < \frac{\gamma}{\gamma-1} \bar{u}(R_1)$ 时, $g'(0) \geq \bar{u}(R_1) \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \bar{u}(R_1) \right)^{r-1} \right] \geq \delta > 0$.

总之, $g'(0) \geq \delta > 0$ 在 $r \in [0, R_1]$ 上恒成立. 于是存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得当 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时 $g'(\varepsilon) > 0$. 由于 $g(0) = 0$, 所以 $g(\varepsilon) > 0$. 即

$$-v'' - \frac{n-1}{r} v' \geq v^r - v, \quad (7)$$

在 $r \in [0, R_1]$ 上成立.

当 $r \geq R_1$ 时, $v(r) = \bar{u}(r)$, (7) 式当然成立. 上面的事实说明 $v(x) = v(r)$ 是 (5) 式的弱上解.

由于 $\varphi(x) < \bar{u}(x)$, R_1 固定, 所以当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时 $\varphi(x) \leq v(x)$, $\varphi(x) \approx v(x)$. 记这样得到的 $v(x)$ 为 $v_0(x)$.

设 $v(x, t)$ 是

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = v^r - v, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

的解. 则 $v(x, t)$ 是古典解^[4,5].

由比较原理知 $u(x, t) \leq v(x, t)$. 由 $v_0(x) \leq \bar{u}(x)$ 知 $v(x, t) \leq \bar{u}(x)$. $v(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = v^r - v, & (x, t) \in \{|x| \leq R_1\} \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = v_0(x), & |x| \leq R_1, \\ v(x, t)|_{|x|=R_1} \leq \bar{u}(x) = v_0(x), & t \geq 0. \end{cases}$$

由于在 $|x| \leq R_1$ 内 $v_0(x)$ 光滑且满足 $-\Delta v_0 \geq v_0^r - v_0$. 利用比较原理知 $v(x, t) \leq v_0(x)$

在 $\{|x| \leq R_1\} \times [0, +\infty)$ 上成立. 当 $|x| \geq R_1$ 时, $v(x, t) \leq \bar{u}(x) - v_0(x)$. 于是在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ 上, $v(x, t) \leq v_0(x)$ 恒成立.

$\forall \tau > 0$, $v(x, t)$, $w(x, t) = v(x, t + \tau)$ 分别满足

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= v^\tau - v, \quad v(x, 0) = v_0(x), \\ w_t - \Delta w &= w^\tau - w, \quad w(x, 0) = v(x, \tau) \leq v_0(x). \end{aligned}$$

于是 $v(x, t) \geq w(x, t) = v(x, t + \tau)$, 即 $v(x, t)$ 关于 t 单调减少, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \bar{v}(x)$ 存在. 显然, $\bar{v}(x) \geq 0$, $\bar{v}(x) \leq \bar{u}(x)$, $\bar{v}(x) \approx \bar{u}(x)$. 下面证明 $\bar{v}(x)$ 满足

$$-\Delta \bar{v} = \bar{v}^\tau - \bar{v}. \quad (8)$$

事实上, 取 $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 用 $\phi(x)$ 乘 $v(x, t)$ 的方程两边并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_t \phi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta v \phi dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(v) \phi dx \quad (f(v) = v^\tau - v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v \Delta \phi dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(v) \phi dx. \end{aligned}$$

从 0 到 T 关于 t 积分并除以 T 知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(x, T) - v_0(x)}{T} \phi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \phi \left(\frac{1}{T} \int_0^T v dt \right) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \phi \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(v) dt \right) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(x, t) dt = \bar{v}(x)$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(v) dt = f(\bar{v})$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v(x, T) - v_0(x)}{T} = 0$. 利用 $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $v_0(x) \leq \bar{u}(x)$, $v(x, t) \leq \bar{u}(x)$, 在(9)式中令 $T \rightarrow \infty$, 由控制收敛定理知

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}(x) \Delta \phi dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{v}) \phi dx. \quad (10)$$

考虑算子 $A: D(A) = \{u \in C^2(\mathbb{R}^n), \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0\}$, $Au = \Delta u$, 则 A 是可逆的且是自共轭的.

由于 $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 所以(10)式可以写成

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \phi \cdot \bar{v}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{v}) (A^{-1} A \phi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (A^{-1} f(\bar{v})) A \phi dx, \end{aligned}$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n} (A^{-1} f(\bar{v}) + \bar{v}) A \phi dx = 0.$$

由 ϕ 的任意性知

$$A^{-1} f(\bar{v}) + \bar{v} = 0. \quad (11)$$

由于 $f(\bar{v}) \in L^p$, 所以 $A^{-1} f(\bar{v}) \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, 从而 $\bar{v} \in W^{2,p}$. 用 A 作用于(11)式知

$$-\Delta \bar{v} = f(\bar{v}) = \bar{v}^\tau - \bar{v},$$

即(8)式. 由于(2)式的正解唯一, 所以 $\bar{v}(x) \equiv 0$. 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$. 由 $0 \leq u(x, t) \leq v(x, t)$ 知 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上点点成立. 定理 2 证毕.

定理 3 的证明 由于 $\varphi(x) \geq \bar{u}(x)$, $\varphi(x) \neq \bar{u}(x)$, 如果(1)式在 L^p ($2 < p \leq +\infty$) 中有局部解 $u(x, t)$, 最大存在时间是 $T_1 > 0$ ($T_1 \leq +\infty$). 由比较原理知当 $t > 0$ 时 $u(x, t) > \bar{u}(x)$ 成立. 同于定理 2 的证明, 我们可认为 $\varphi(x) > \bar{u}(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立.

同于定理 2 的证明, 当 $R_1 \gg 1$, $0 < \varepsilon \ll 1$ 时,

$$v^*(x) = v^*(r) = \begin{cases} \bar{u}(r) + \varepsilon(\bar{u}(r) - \bar{u}(R_1)), & 0 \leq r \leq R_1, \quad r = |x|, \\ \bar{u}(r), & r \geq R_1 \end{cases}$$

是(5)式的弱下解. 记 $v(x, t)$ 是(1)式的以 $v^*(x)$ 为初值的局部解, 最大存在时间是 $T_2 > 0$. 由于 $v^*(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 所以 $v(x, t)$ 是古典解, 同时 $D_x^2 D_t v(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, T_2)$ 内局部 Hölder 连续^[4,5]. 利用文献 [2] 中的方法还可以证明 $v(x, t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) $\forall t \in [0, T_2]$.

因为 $\varphi(x) > \bar{u}(x)$, R_1 固定, 所以当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时 $v^*(x) \leq \varphi(x)$ 成立. 同于定理 2 的证明可知下面的结论成立:

$$(1) \quad \bar{u}(x) \leq v(x, t) \leq u(x, t),$$

(2) $v(x, t) \geq v^*(x)$, $v(x, t)$ 关于 t 单调递增, 从而 $v_t \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, T_2)$ 上成立. 所以 $T_2 \geq T_1$ 成立.

由于 $v^*(x) \leq (1 + \varepsilon)\bar{u}(x) \leq Me^{-\alpha_1|x|^2}$ 在 $x \in \mathbb{R}^n$ 上成立. 我们将证明 $\forall T < T_2$, 存在 $M_0, \alpha_0 > 0$ 可与 T 有关, 使得 $v(x, t) \leq M_0 e^{-\alpha_0|x|^2}$ 在 $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ 上成立.

事实上, $w(x, t) = e^t v(x, t)$ 满足

$$w(t) = e^t v^* + \int_0^t e^{-(t-s)} e^{(t-s)\Delta} w^*(s) ds. \quad (12)$$

先考察

$$\begin{aligned} e^t v^* &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} v^*(x+y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{|y| > \frac{1}{2}|x|} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

对于 I_1 , $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$, 所以 $|x+y| \geq \frac{1}{2}|x|$. 于是 $I_1 \leq Me^{-\alpha \frac{|x|^2}{4}}$.

$$\begin{aligned} I_2 &\leq M \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{|s| > \frac{|x|}{\sqrt{t}}} e^{-|s|^2} (2\sqrt{t})^n ds = M_1 \int_{|s| > \frac{|x|}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{|s|^2}{2}} e^{-\frac{|s|^2}{2}} ds \\ &\leq M_2 e^{-\frac{|x|^2}{32t}} \int_{|s| > \frac{|x|}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{|s|^2}{2}} ds \leq M_3 e^{-\frac{|x|^2}{32T}}. \end{aligned}$$

于是 $e^t v^* \leq M_4 e^{-\alpha_1|x|^2}$, $M_4, \alpha_1 > 0$ 仅与 T 有关. 又因为 $\|e^t v^*\|_\infty \leq \|v^*\|_\infty = (1 + \varepsilon)\bar{u}(0) - \varepsilon\bar{u}(R_1)$, 所以 $\int_0^T \|e^{t-s} v^*\|_\infty^{p-1} dt < +\infty$. 同于文献 [2] 中的定理 4, 可证明(12)式有局部解 $w(x, t)$ 满足

$$(1) \quad w: [0, T_3] \rightarrow L^p, \quad 1 \leq p \leq +\infty,$$

$$(2) \quad w(t) \leq B e^t v^*, \quad B > 1.$$

于是 $w(x, t) \leq B M_4 e^{-\alpha_1|x|^2}$. 将 $w(t)$ 按此方法延拓到最大存在时间 T_2 . 由于 $T < T_2$, 所以 $\forall t \in [0, T]$, $w(t)$ 都是经有限次延拓而得到, 从而存在 $M_5, \alpha_2 > 0$ 与 T 有关, 使 $w(x,$

$t) \leq M_0 e^{-\alpha_0 |x|^{1/2}}$ 成立. 从而存在 $M_0, \alpha_0 > 0$ 与 T 有关, 使 $v(x, t) \leq M_0 e^{-\alpha_0 |x|^{1/2}}$ 成立.

对于 $v(x, t)$ 的方程关于 t 求导, 同理可证存在 M^*, α^* (仍记为 M_0, α_0) 与 T 有关, 使 $v_t \leq M_0 e^{-\alpha_0 |x|^{1/2}}$ 在 $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ 上成立. 还可以证明 $|\nabla v|, |\nabla v_t|$ 在 $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ 上有界. 由此可知下面的分部积分是合理的:

如果 $T_2 = +\infty$, 用凸性方法先证明存在 $T_0 < +\infty$, 使得 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$ ($2 <$

$p \leq \gamma + 1$).

取 $2 < p \leq \gamma + 1$, $h(v) = v^p$. 令 $I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(v(x, t)) dx$, 则 $h'(v) = pv^{p-1}$, $h''(v) = p(p-1)v^{p-2}$, $h'''(v) = p(p-1)(p-2)v^{p-3}$. 于是 $h > 0$, $h' > 0$, $h'' > 0$, $h''' > 0$ (当 $v > 0$ 时), $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$.

$$I'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} h'(v) v_t dx \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} h'(v) (\Delta v + f(v)) dx \quad (f(v) = v^\gamma - v) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} h'(v) f(v) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

于是, 由(14)式知

$$\begin{aligned} I''(t) &= - \int_{\mathbb{R}^n} h'''(v) |\nabla v|^2 v dx - \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) \frac{d}{dt} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (h''(v) f(v) + h'(v) f'(v)) v dx. \end{aligned} \quad (15)$$

由(13)式知

$$\begin{aligned} I''(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} h'(v) v_{tt} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} h'(v) [\Delta v + f(v)]_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} h'' \nabla v \cdot \nabla v_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} h'(v) f'(v) v_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) \frac{d}{dt} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} h'(v) f'(v) v_t dx. \end{aligned} \quad (16)$$

由(16)式 $\times 2 -$ (15)式得

$$\begin{aligned} I''(t) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} h'''(v) |\nabla v|^2 v dx + \int_{\mathbb{R}^n} [h'(v) f'(v) \\ &\quad - h''(v) f(v)] v_t dx, \\ h'(v) f'(v) - h''(v) f(v) &= pv^{p-1}(\gamma v^{\gamma-1} - 1) - p(p-1)v^{p-2}(v^\gamma - v) \\ &= pv^{p-1}[\gamma v^{\gamma-1} - 1 - (p-1)v^{\gamma-1} + p-1] \\ &= pv^{p-1}[v^{\gamma-1}(\gamma+1-p) + p-2] \geq 0. \end{aligned}$$

$h'''(v) |\nabla v|^2 v_t \geq 0$. 于是

$$I''(t) \geq 2 \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t^2 dx.$$

$$\begin{aligned} h''h - \frac{1+\alpha}{2} h'^2 &= p(p-1)v^{p-2} \cdot v^p - \frac{1+\alpha}{2} p^2 v^{2p-2} \\ &= pv^{2p-2} \left[p-1 - \frac{1+\alpha}{2} p \right] = pv^{2p-2} \left[\frac{1-\alpha}{2} p - 1 \right]. \end{aligned}$$

由于 $p > 2$, 所以当 $\alpha < 0$ 适当小时, $h''h - \frac{1+\alpha}{2} h'^2 > 0$.

取 $J(t) = I^{-\alpha}(t)$, α 由上面确定. 则

$$\begin{aligned} J(0) &= I^{-\alpha}(0) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} v^*(x) dx \right)^{-\alpha} > 0, \\ J'(t) &= -\alpha I^{-\alpha-1} I'(t). \end{aligned}$$

由于 $v^*(x)$ 不满足(1)式的方程, 所以 $\forall \sigma > 0$, 在 $\mathbb{R}^n \times (0, \sigma)$ 内 $v_t(x, t) \not\equiv 0$. 又因为 $v_t(x, t) \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, T_1)$ 内成立, 所以可取到 $0 < t_0 \ll 1$, 使 $J(t_0) > 0$, $v_t(x, t_0) \geq 0$, $\not\equiv 0$. 于是 $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, 使 $v_t(x_0, t_0) > 0$. 由连续性知

$$I'(t_0) = \int_{\mathbb{R}^n} p v^{p-1} v_t(x, t_0) dx > 0.$$

从而 $J'(t_0) < 0$.

$$\begin{aligned} J''(t) &= \alpha I^{-\alpha-2} ((\alpha+1)I''(t) - I(t)I'''(t)), \\ I(t)I''(t) &\geq 2 \int_{\mathbb{R}^n} h(v) dx \int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{2hh''} v_t dx \right)^2 \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{(\alpha+1)h''} v_t dx \right)^2 = (\alpha+1) \left(\int_{\mathbb{R}^n} h''(v) v_t dx \right)^2 \\ &= (\alpha+1)I'^2(t), \end{aligned}$$

即 $(\alpha+1)I'^2(t) \leq I(t)I''(t)$. 于是

$$J''(t) \leq 0.$$

凸性引理^[6] 设 $J(t) \in C^2[t_0, +\infty)$, $J'(t_0) < 0$, $J(t_0) > 0$, $J''(t) \leq 0$. 则存在 T_0 : $t_0 < T_0 < t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}$, 使 $J(T_0) = 0$.

从而 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} I(t) = +\infty$, 即 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$ ($2 < p \leq r+1$), 矛盾. 所以 $T_1 < +\infty$. 又因为 $v_t \geq 0$, 所以存在 $T_0 < +\infty$ (可能与上面的 T_0 不同), $T_0 > 0$, 使 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$ ($2 < p \leq r+1$).

先取定 $2 < p \leq r+1$. 将证明 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_{p,r} = +\infty$. 如若不然, 由 $v_t \geq 0$ 知存在 $B > 0$, 使 $\|v(t)\|_{p,r} \leq B$ 在 $(0, T_0)$ 内成立.

$e^t v(x, t)$ 满足

$$\begin{aligned} e^t v(t) &= e^{t\Delta} v^* + \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} (e^s v(s))^r ds \\ &= e^{t\Delta} v^* + \int_0^t e^s e^{(t-s)\Delta} v^r(s) ds. \\ \|e^t v(t)\|_p &\leq \|v^*\|_p + \int_0^t e^s \|v\|_{p,r}^r ds \leq \|v^*\|_p + B^r T_0 e^{T_0} \leq C. \end{aligned}$$

此与 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$ 矛盾.

同理可证 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_{p\gamma^k} = +\infty, k = 2, 3, \dots$.

于是当 $p \in (2\gamma^k, \gamma^k(\gamma+1)]$ 时, $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty, k = 1, 2, \dots$.

再证明 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_\infty = +\infty$. 如若不然, 则存在 $B > 0$ 使得 $\|v(t)\|_\infty \leq B$ 在 $(0, T_0)$ 内成立. 于是

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = v^\gamma - v \leq (B^{\gamma-1} - 1)v, \\ v(x, 0) = v^*(x). \end{cases}$$

所以 $v(x, t) \leq e^{(B^{\gamma-1}-1)t} e^{t\Delta} v^*(x)$. $\|v(t)\|_p \leq A \|v^*\|_p$. 此与 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$ 矛盾 ($p \in (2\gamma^k, \gamma^k(\gamma+1)]$).

任意取定 $p \in (\gamma^k(\gamma+1), 2\gamma^{k+1}]$, 我们要证明 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$. 如若不然, 则存在 $A > 0$, 使 $\|v(t)\|_p \leq A$ 在 $(0, T_0)$ 内成立. 取 $r = \gamma^k(\gamma+1), q \in [1, 2]$. 再取 $\theta \in (0, 1)$ 使 $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. 由 Hölder 不等式知

$$\|v(t)\|_r \leq \|v(t)\|_p^\theta \|v(t)\|_q^{1-\theta} \leq A^\theta \|v(t)\|_q^{1-\theta}.$$

于是 $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_q = +\infty$. 同上可证当 $p \in [\gamma^k, 2\gamma^k]$ 时, $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$. 因为 $[\gamma^k(\gamma+1), 2\gamma^{k+1}] \subset [\gamma^{k+1}, 2\gamma^{k+1}]$. 矛盾.

至此证明了对任意 $2 < p \leq +\infty, \lim_{t \rightarrow T_0^-} \|v(t)\|_p = +\infty$. 因为 $u(x, t) \geq v(x, t)$, 所以存在 $0 < T^* \leq T_0 < +\infty$, 使 $\lim_{t \rightarrow T^{*-}} \|u(t)\|_p = +\infty$.

定理 3 得证.

注 这里 $u(t)$ 代表 $u(x, t)$, 指 L^p 中的元素.

参 考 文 献

- [1] Fujita, H., *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 18, Part I, Amer. Math. Soc., 1968, 138—161.
- [2] Weissler, F. B., *Indiana Univ. Math. J.*, 29(1980), 79—102.
- [3] Weissler, F. B., *Israel J. of Math.*, 38(1981), 1—2: 29—40.
- [4] Kobayashi, K., Sirao, T. & Tanaka, H., *J. Math. Soc. Japan*, 29(1977), 3: 407—424.
- [5] Friedman, A. (夏宗伟译), 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984.
- [6] 晋志成, 数学年刊 A 辑, 5 (1984), 2: 177—180.