



# 弦/M-理论中黑膜热力学及相变

卢建新\*

中国科学技术大学交叉学科理论研究中心, 合肥 230026

\* 联系人, E-mail: jxlu@ustc.edu.cn

收稿日期: 2012-07-05; 接受日期: 2012-08-31; 网络出版日期: 2012-10-26

国家自然科学基金(批准号: 10975129)资助项目

**摘要** 宏观引力系统, 比如黑洞, 与非引力系统在热力学方面很不一样, 其态函数熵与温度本质上是量子的, 没有经典对应, 因此对应的热力学在一定意义上来说本质上也是量子的, 这为探讨量子引力提供了一个重要窗口. 本文综述讨论作者及其合作者近期一系列有关黑洞的高维推广黑膜(超弦/M-理论中的基本动力学客体)的热力学相、相变及相关的临界现象的工作, 希望为建立 M-理论的完整理论框架提供重要的非微扰信息.

**关键词** 关键词, 量子引力, 超弦/M-理论, 热力学相, 相变

**PACS:** 11.25.-w, 11.27.+d, 04.50.Gh

**doi:** 10.1360/132012-610

## 1 引言

无论是认识和理解黑洞奇点、宇宙学奇点, 为宇宙学暴涨模型提供理论基础, 还是去认识超标准模型的新物理、Planck 尺度上的物理行为, 特别是认识近期发现的占宇宙中物质组分约 73% 的暗能量本质, 都需要一个包括引力在内的基本量子引力理论. 超弦/M-理论, 尽管还有很多不完善之处, 目前仍是量子引力和统一四种相互作用的最理想的候选理论. 弦理论经历了两次革命, 其中第二次革命主要是基于该理论的一些非微扰态(称为 BPS 态)及其相应性质的<sup>[1-5]</sup>. 二次革命的重要发现是原有的五种微扰弦理论并不基本, 存在一个更大的 M-理论, 它不仅包括五种弦作为其不同的极限理论, 同时也包括十一维超引力作为其低能极限, 从而解决了人们有关十维弦理论和十一维超引力之间不相容的长期困惑.

弦二次革命还取得了一些巨大成功, 如首次为一些黑洞熵提供了微观解释, 预言了 M-理论的存在性, 以及一些对偶关系(特别是 AdS/CFT 对应), 具体实现了引力系统的全息性质<sup>[6]</sup>. 这一对应或其变种对很多强相互作用系统如夸克-胶子等离子体、强子物理、凝聚态物理中的量子相变、冷原子系统, 以及流体力学等具有广泛应用<sup>[5]</sup>, 一方面为研究这些系统提供了新的思路和方法, 另一方面对这些具体系统物理行为的刻画也有可能反馈给我们有关基本理论的一些启示. 另外, 弦/M-理论的研究揭示了时空、相互作用以及在非微扰意义下经典和量子的模糊性或非基本性, 预示着在新的基本理论中我们目前习惯的很多概念需要新的内涵或革新. 弦/M-理论的完整理论框架还有待于建立. 在缺少该理论完整框架的前提下, 获得对上述基本问题的深刻认识, 以及该理论更多的信息只能基于我们对该理论一些局限的了

**引用格式:** 卢建新. 弦/M-理论中黑膜热力学及相变. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2012, 42: 1099-1111

Lu J X. The Thermodynamical Phase Structure of black branes in String/M Theory (in Chinese). Sci Sin- Phys Mech Astron, 2012, 42: 1099-1111, doi: 10.1360/132012-610

解, 比如已建立的各种对偶关系、其低能有效理论以及从研究中获得的一些思想和启发. 众所周知, 黑洞是我们了解量子引力性质和行为的理想系统, 一方面黑洞为我们研究经典引力 (广义相对论意义下) 的各种有趣行为提供了理想模型, 另一方面它又可以看成为一个宏观量子系统, 其特有的热力学性质如熵、温度以及引力的全息性质本质上又是量子的, 因此为我们研究量子引力提供了一个重要窗口. 弦/M- 理论中基本动力学客体  $p$ - 膜所对应的黑膜可视为黑洞的高维推广. 我们期待着对这些黑膜相关的动力学比如热力学相及相变等特性的研究可提供更多的有关该理论的非微扰信息, 有助于我们对该理论中揭示的一些基本问题的了解和认识.

## 2 黑洞 (膜) 系统的热力学特性

四维时空最一般的稳态黑洞由其所拥有的 ADM 质量 ( $M$ ), 角动量 ( $J$ ) 和所带的电荷 ( $Q$ ) 完全确定. 早期对黑洞相关特性的研究发现, 这三个黑洞参量, 以及黑洞的视界面积 ( $A$ ) 和视界上的表面引力 ( $\kappa$ ), 遵从如下所谓的黑洞力学四定律: 第零定律表述为黑洞视界上的表面引力  $\kappa$  是一个常数, 与视界面上的具体位置无关; 第一定律描述的是当  $M, J, Q$  和视界面积  $A$  变化时, 它们的变化满足如下关系:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (1)$$

其中  $\Omega$  是黑洞的角速度,  $\Phi$  是对应的电势 (视界两极处); 第二定律是黑洞视界的面积永不减少,

$$\frac{dA}{dt} \geq 0; \quad (2)$$

第三定律表述为黑洞的表面引力  $\kappa \neq 0$ . 在上面的公式中, 我们已取了基本常数  $k$  (Boltzmann 常数) =  $\hbar = c = G$  (牛顿引力常数) = 1.

1972 年 Bekenstein 注意到, 上述黑洞力学四定律与已知的热力学四定律有着极其类似的关系 [7]. 如果把黑洞视界的表面引力 ( $\kappa$ ) 认为正比于一个热力学系统的温度 ( $T$ ), 黑洞视界面积正比于该热力学系统的熵, 其它的量完全对应过去, 那么黑洞力学四定律就完全成为热力学四定律. 这种特有的关系使得

Bekenstein 进一步认为, 黑洞本身很有可能就是一个热力学系统, 而黑洞力学四定律其实就是对应的热力学四定律. 这一大胆假设与当时人们对黑洞的理解如此的不同, 立即遭到了黑洞领域一些大家, 比如 Hawking 等人的反对. 四维稳态黑洞完全由其质量、角动量和所带的电荷确定 (只有三根毛), 很难理解这样的系统具有温度和熵, 按通常的理解不可能对应一个宏观热力学系统. Hawking 起初激烈反对 Bekenstein 这种建议, 但 Bekenstein 的这种对应似乎很美妙, 要完全证明 Bekenstein 是错的, 必须要有坚实的物理证据. 另外, 如果这种对应存在的话, 那一定是在量子意义上的, 经典框架下几乎不可能理解这种对应. 基于这一考虑, Hawking 在 1975 年采用半经典手段本希望证伪 Bekenstein 的对应, 但却发现黑洞不象原有想象的那样只吸收物质, 它还辐射粒子, 且等价于一个具有温度

$$T_{BH} = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3)$$

的黑体向外辐射粒子 [8]. 这一发现为 Bekenstein 的对应提供了物理图象和证据, 同时也确定了黑洞的确具有熵

$$S_{BH} = \frac{A}{4}, \quad (4)$$

也为 Bekenstein 后来推广的第二定律提供了理论基础 [9].

要清楚地认识黑洞温度和熵的量子本质, 我们恢复上述黑洞温度和熵公式中的基本常数如下:

$$T_{BH} = \frac{\hbar c \kappa}{2\pi k}, \quad S_{BH} = \frac{kc^3 A}{4G\hbar}. \quad (5)$$

通常的经典极限是取  $\hbar \rightarrow 0$ . 如果我们对上述温度公式取这样的极限, 我们会得到黑洞的经典温度  $T_{BH} = 0$ . 从表面上看, 这似乎很自然. 如果采用我们通常对温度的认识, 一个自然的问题就是: 一个绝对温度为零的系统还能是经典的吗? 我们至少会认为这种极限应该是反直觉的. 进一步考察黑洞熵的经典极限, 对于任何宏观意义下的黑洞, 我们得到一个发散的结果, 表明这种经典极限是不可取的, 这也与上述经典极限下得到反直觉绝对零温的结论一致. 换句话说, 宏观黑洞与宏观的普通物质系统很不一样, 至少从温度和熵的角度它没有从量子到经典的过渡, 其

本质是量子的. 这从宏观黑洞温度和熵的公式中出现 Planck 常熟  $\hbar$  已有所暗示.

从这种意义上来说, 虽然黑洞与普通物质一样服从热力学四定律, 但黑洞的热力学本质上是量子的, 没有经典对应, 反映的是一种宏观量子效应. 由于黑洞是由引力相互作用所支配, 因此其热力学的量子本质在一定意义上也反映了引力的量子特性, 因此研究黑洞的热力学为我们了解量子引力打开了一个窗口.

黑洞不可避免地有所谓的 Hawking 辐射, 因此渐进平坦的黑洞不可能具有热力学稳定性. 这可以简单地从比如史瓦西 (Schwarzschild) 黑洞的如下反直觉关系判断. 该黑洞的熵和温度与其所谓的 ADM 能量  $M$  关系如下:

$$S_{\text{BH}} = 4\pi M^2, \quad T_{\text{BH}} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (6)$$

当其 ADM 能量增大时, 其温度反而减少, 从而给出对应的比热小于零 ( $C < 0$ ), 因此其热力学不稳定. 要正确地研究黑洞的热力学及相关的相和相变, 我们首先应保证黑洞在热力学意义达到稳定.

York 等人的工作告诉我们, 实现黑洞系统热力学的稳定性需要考虑系综<sup>[10,11]</sup>. 换句话说, 我们不仅要考虑黑洞, 还要考虑黑洞所处的环境. 与普通系统不同的是, 自引力系统在空间上具有不均匀性, 确定对应的系综不仅要取定相应的热力学量, 还要标定这些量在空间何处取确定的值. 为简单起见, 本文的讨论将局限于具有球对称的黑洞 (膜) 情形. 对这种情形, 建立相应的系综可把黑洞放入一个半径大于黑洞视界半径且与其同心的空腔内. 该空腔具有确定的半径和温度. 当黑洞在空腔壁处的局域温度与空腔的温度达到一致时, 黑洞就与外热源达到了热平衡 (见图 1). 当空腔内的电荷给定时, 我们就定义了所谓的正则系综, 而当空腔壁上的电势给定, 那定义的就是巨正则系综.

对自引力系统, 一方面描述其稳定的热力学相,

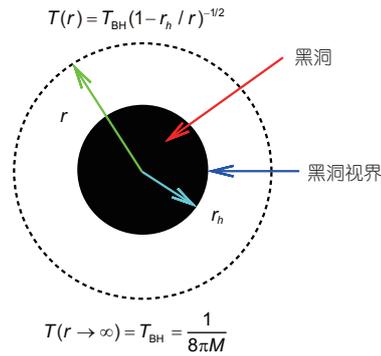


图 1 (网络版彩图) 半径为  $r$  和温度为  $T$  空腔内的黑洞 (其视界半径  $r_h \leq r$ )

Figure 1 (Color online) A black hole in a cavity of radius  $r$  and surface temperature  $T$  (with its horizon radius  $r_h \leq r$ ).

我们需要考虑系综, 而另一方面, 不同的系综并不等价<sup>[12]</sup>, 一般来说描述的是不同的相行为. 这为研究引力系统完整的热力学相及相变造成了一种困局, 如何理解这种困局还有待于进一步的认识. 过去的研究表明, 引力系统的正则系综具有更有趣的相行为. 比如在一定条件下, 有可能存在多于一个的稳定相, 因此可以有相变发生以及与此有关的临界现象. 我们在本文中也将局限于考虑这种系综下的黑洞 (膜) 的相稳定性、相变, 以及可能的临界现象<sup>1)</sup>.

分析自引力系统的热力学 (局域) 稳定性可以通过考虑该系统的亥姆霍兹 (Helmholz) 自由能的极值情况. 当其取极小值时, 对应的系统至少是局域稳定的. 要确定该系综下系统的整体稳定性并不容易, 需要知道该系统在给定条件下所有可能的局域稳定的相, 通过比较这些相的自由能, 具有整体最小自由能的相才是该系统的整体稳定相, 否则仅仅为局域或亚稳定相. 一般情况下, 我们几乎不可能确定系统的整体稳定相.

对自引力系统, 如黑洞, 如果我们知道其作用量  $I$ , 可以采用 Gibbons-Hawking 欧氏化作用量的方法计

1) 本文的考虑局限于渐进平坦黑洞或黑膜 (对黑膜或为紧致的  $T^p$  的环面). 对沿膜延展方向其它拓扑结构也有可能, 但只要垂直于膜方向的空间是球形对称, 本文的讨论仍然适用 (比如对应黑膜的泡泡位形, 具体见本文最后一节的讨论), 其原因是在我们的系综讨论中沿膜延展方向空间是固定的. 但一般来说, 如果沿膜的延展方向的拓扑结构非平庸, 它会影响到垂直膜方向的拓扑结构, 这在弦/M-理论或高维引力理论中已很常见, 比如近年来发现的各种有趣的非球形对称的拓扑位形. 如何合理地考虑这一类位形的热力学相及相变仍然是一个有待探讨的问题.

算零级近似下系统的配分函数<sup>[13]</sup>

$$Z \approx e^{-I_E}, \quad (7)$$

由此我们通过关系  $Z = e^{-\beta F}$  计算对应的亥姆霍兹自由能  $F$  为

$$I_E(r, T, Q; r_h) = \beta F = \beta E(r, Q; r_h) - S(r_h), \quad (8)$$

其中  $r, T, Q$  分别是空腔的半径, 温度和其内所带的电荷,  $r_h$  是黑洞视界半径.  $\beta = 1/T$ ,  $E(r, Q; r_h)$  是黑洞在空腔内的内能,  $S(r_h)$  是其熵. 对给定  $r, T, Q$ , 该系统的唯一变量是  $r_h$ . 黑洞与环境达到热平衡由

$$\left. \frac{dI_E}{dr_h} \right|_{r_h=\bar{r}_h} = 0 \quad (9)$$

来确定. 自由能取极小值的条件, 即达到局域平衡, 是在达到热平衡处满足如下条件:

$$\left. \frac{d^2 I_E}{dr_h^2} \right|_{r_h=\bar{r}_h} > 0. \quad (10)$$

### 3 零电荷黑洞的热力学稳定性

本节的讨论主要基于已有的工作<sup>[10,14,15]</sup>. 利用上节给出的判据, 首先分析给定空腔半径  $r = r_B$  和温度  $T = T_B$ , 但固定电荷  $Q = 0$  时空腔内的热力学稳定相. 这与史瓦西 (Schwarzschild) 黑洞的热力学稳定性相关. 首先考虑史瓦西黑洞的欧氏度规:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (11)$$

这里视界半径  $r_h = 2M$ , 其中  $M$  是黑洞的质量. 将该黑洞放入同心的上述空腔内 ( $r_B > r_h$ ), 对应正则系综下的作用量可以直接从其 Hilbert-Einstein 作用量得出:

$$I_E(r_B, T_B; r_h) = \beta_B F = \beta_B E(r_B; r_h) - S(r_h), \quad (12)$$

其中

$$E(r_B; r_h) = r_B \left(1 - (1-x)^{1/2}\right), \quad (13)$$

和

$$S(r_h) = \pi r_h^2 = 4\pi M^2 = \pi r_B^2 x^2, \quad (14)$$

分别是该系统在空腔内的内能和熵. 上面无量纲约化视界半径  $x$  定义如下:

$$x \equiv \frac{r_h}{r_B} = \frac{2M}{r_B}, \quad r_B > r_h, \quad (15)$$

我们有

$$0 < x < 1. \quad (16)$$

与常规做法一样<sup>[10,13]</sup>, 上述作用量的计算是相对所谓“热平坦时空”背景, 即为该系综下欧氏史瓦西黑洞作用量减去同样系综条件下欧氏平坦时空的作用量, 其目的在于去掉作用量中源于背景对作用量的发散贡献, 从而获得有限的, 对热力学有真正影响的部分. 我们一般总是这样做减除, 后面不再强调.

对固定空腔温度  $T_B = 1/\beta_B$ , 上述欧氏作用量与该系统的自由能没有本质区别. 因此在同样的系综条件下, 如果存在多个局域稳定的相, 其中具有最小欧氏作用量的相应该是在所能考虑的相中最稳定. 比如在目前的情况下, 我们将看到当温度  $T_B$  大于一极小值时, 可以有局域稳定的黑洞相. 如果对应黑洞相的欧氏作用量大于零, 该黑洞相的自由能就高于同样条件下的“热平坦时空”相的零自由能, 该局域稳定的黑洞相就要通过所谓的 Hawking-Page 相变<sup>[16]</sup> 成为“热平坦时空”相. 只有那些具有负欧氏作用量的黑洞相才可能成为整体稳定相. 下面来看具体的稳定性分析. 为简单起见, 定义约化作用量和约化温度倒数

$$\bar{I}_E \equiv \frac{I_E}{4\pi r_B^2}, \quad \bar{b} = \frac{\beta_B}{4\pi r_B}. \quad (17)$$

这样

$$\bar{I}_E = \bar{b} \left(1 - (1-x)^{1/2}\right) - \frac{1}{4}x^2. \quad (18)$$

注意  $x = 0$ , 即“热平坦时空”,  $\bar{I}_E = 0$ . 我们一般有

$$\frac{d\bar{I}_E}{dx} = \frac{1}{2(1-x)^{1/2}} (\bar{b} - b(x)), \quad (19)$$

这里约化温度倒数函数

$$b(x) = x(1-x)^{1/2} > 0. \quad (20)$$

注意到

$$b(x \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad b(x \rightarrow 1) \rightarrow 0, \quad (21)$$

$b(x)$  在  $0 < x < 1$  区间一定有极大值. 腔内黑洞与空腔达到热平衡由上述作用量取极值确定, 即

$$\bar{b} = b(\bar{x}) = \bar{x}(1-\bar{x})^{1/2}. \quad (22)$$

局域稳定性由下面条件决定,

$$\left. \frac{d^2 \bar{I}_E}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} \sim -\frac{db(\bar{x})}{d\bar{x}} > 0. \quad (23)$$

换句话说, 当黑洞与空腔达到热平衡时, 只有函数  $b(x)$  在该处的斜率为负时黑洞才是局域稳定的. 温度倒数函数  $b(x)$  的特征行为如图 2 所示, 这也可以由方程 (20) 和 (21) 看出.

$b(x)$  的最大值由下列极值所定出

$$\left. \frac{db(x)}{dx} \right|_{x=x_{\max}} = 0 \quad (24)$$

为

$$x_{\max} = \frac{2}{3} \Rightarrow r_h = \frac{2r_B}{3}. \quad (25)$$

对应的最大  $b_{\max}$  或最小温度  $T_{\min}$  为

$$b_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow T_{\min} = \frac{1}{4\pi r_B b_{\max}} = \frac{\sqrt{27}}{8\pi r_B}. \quad (26)$$

这与 York 用不同的方式在文献 [10] 中得出的结果完全一样. 从图 2 或函数  $b(x)$  的行为 ((21) 或其唯一的极值为极大) 可知, 当  $0 < \bar{b} < b_{\max}$ , 状态方程 (22) 总有两个解  $x_1$  和  $x_2$ , 其中  $0 < x_1 < x_{\max}$  对应一个小黑洞而  $x_{\max} < x_2 < 1$  对应的是一个大黑洞. 由局域稳定性判据 (23),  $x_1$  对应的小黑洞不稳定, 而  $x_2$  对应的大黑洞至少局域稳定. 换句话, 当温度大于上述最小温度时, 存在一大一小两个黑洞, 只有大黑洞稳定, 而小黑洞不稳定, 通常的史瓦西黑洞可认为对应这里的小黑洞.

上面所定的大黑洞尽管局域稳定, 但不一定是整体稳定, 至少这里还有一个自由能为零的“热平坦时空”相没有考虑. 如果局域稳定的大黑洞的自由能大于零, 那么它仅仅是亚稳定, 将通过所谓的 Hawking-Page 相变转为更为稳定的“热平坦时空”. 只有当自由能小于零时, 它才有可能成为整体稳定. 利用状态方程 (22), 我们可以把处于局域稳定的黑洞作用量 (等价于自由能) 改写为

$$\bar{I}_E(y) = -\frac{3\bar{b}}{4y}(1-y)\left(\frac{1}{3}-y\right), \quad (27)$$

这里

$$y \equiv \sqrt{1-x_2}. \quad (28)$$

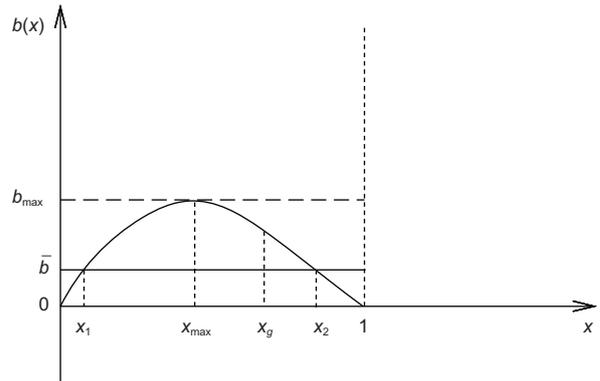


图 2 零电荷情况下  $b(x)$  对  $x$  的特征行为

Figure 2 The characteristic behavior of  $b(x)$  vs  $x$  for the chargeless case.

给定  $2/3 < x_2 < 1$ , 我们有  $0 < y < 1/\sqrt{3}$ . 要保证局域稳定的作用量小于零, 由 (27) 我们必须要有  $0 < y < 1/3$ . 由此定出整体稳定的黑洞相的条件为:

$$1 > x_2 > x_g = \frac{8}{9} > x_{\max} = \frac{2}{3}. \quad (29)$$

当  $x_2 = x_g = 8/9$ , 黑洞和“热平坦时空”可以共存. 当  $\bar{b} > b_{\max}$  时, 不可能有黑洞存在. 如果没有其它自由能小于零的相存在, 那“热平坦时空”相将是整体稳定相.

#### 4 非零电荷黑洞的热力学稳定性

我们在本节描述球对称带电黑洞, 即 R-N 黑洞, 的热力学稳定性问题、相变及临界现象 [10,14,15]. 对应空腔中带电黑洞的欧氏作用量的计算基本思路与不带电情形一致, 但这里还要考虑电磁场对作用量的贡献, 具体可以参看 York 等人的讨论 [10,11]. 带电 R-N 黑洞的欧氏度规

$$ds_E^2 = V(r)dt^2 + \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (30)$$

和电势

$$\Phi(r) = \frac{Q}{r}. \quad (31)$$

这里

$$V(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (32)$$

R-N 黑洞有两个视界 (由  $V(r) = 0$  确定)

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (33)$$

BPS 界告诉我们有  $M \geq Q$ . 外视界与我们考虑的热力学相关, 计算相应的作用量给出

$$\begin{aligned} I_E(r_B, T_B, Q; r_+) &= \beta_B E(r_B, Q; r_+) - S(r_+) \\ &= \beta_B r_B \left( 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{r_+}{r_B}\right) \left(1 - \frac{Q^2}{r_B r_+}\right)} \right) - \pi r_+^2. \end{aligned} \quad (34)$$

同样定义相应的约化量:

$$\bar{I}_E = \frac{I_E}{4\pi r_B^2}, \quad x = \frac{r_+}{r_B}, \quad q = \frac{Q}{r_B}, \quad \bar{b} = \frac{\beta_B}{4\pi r_B}. \quad (35)$$

因  $r_+ > Q, r_B > r_+$ , 我们有

$$q < x < 1. \quad (36)$$

约化作用量为

$$\bar{I}_E(\bar{b}, q; x) = \bar{b} \left( 1 - \sqrt{(1-x) \left(1 - \frac{q^2}{x}\right)} \right) - \frac{1}{4} x^2. \quad (37)$$

由此我们有

$$\frac{d\bar{I}_E}{dx} = \frac{1 - \frac{q^2}{x^2}}{2(1-x)^{1/2} \left(1 - \frac{q^2}{x}\right)^{1/2}} (\bar{b} - b_q(x)), \quad (38)$$

这里约化温度倒数函数为

$$b_q(x) = \frac{x(1-x)^{1/2} \left(1 - \frac{q^2}{x}\right)^{1/2}}{1 - \frac{q^2}{x^2}}. \quad (39)$$

考察如下极限

$$b_q(x \rightarrow q) \rightarrow \infty, \quad b_q(x \rightarrow 1) \rightarrow 0, \quad (40)$$

注意到  $x \rightarrow q$  时,  $b_q(x)$  的极限与零电荷情形有本质的区别. 正是这种差别使得目前的稳定相结构变得丰富多彩. R-N 黑洞与空腔达到热平衡的条件是

$$\frac{d\bar{I}_E}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{b} = b_q(\bar{x}). \quad (41)$$

我们同样有

$$\left. \frac{d^2 \bar{I}_E}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} \sim - \frac{db(\bar{x})}{d\bar{x}}, \quad (42)$$

因此局域稳定性要求

$$\frac{db(\bar{x})}{d\bar{x}} < 0. \quad (43)$$

由于极限 (40), 存在一个临界电荷  $q_c = \sqrt{5} - 2$ , 根据电荷  $q > q_c, q = q_c,$  或  $q < q_c, b_q(x)$  在区间  $q < x < 1$  中的行为可以有三种情况, 具体见图 3.

临界电荷以及临界黑洞半径可由如下条件决定:

$$\left. \frac{db_q(x)}{dx} \right|_{x=x_c} = 0, \quad \left. \frac{d^2 b_q(x)}{dx^2} \right|_{x=x_c} = 0. \quad (44)$$

$b_q(x)$  (39) 只依赖变量  $x$  和电荷参数  $q$ , 因此上两方程可以完全确定临界电荷  $q_c = \sqrt{5} - 2$  和黑洞临界半径  $x_c = 5 - 2\sqrt{5}$ . 由状态方程 (41), 我们可以定下对应的临界  $b_c = 0.429$ . 具体求解这些量的过程参见文献 [15].

我们就这三种情况分别进行讨论. 当  $q > q_c$ , 给定任何  $\bar{b} > 0$ , 状态方程 (41) 只有唯一解且  $b_q(\bar{x})$  达到热平衡处的斜率也是负的, 因此是局域稳定的, 后面我们将说明这也可能是整体稳定的. 当  $q < q_c, b_q(x)$  在  $q < x < 1$  区间有一极小和极大. 当  $\bar{b}$  取值在这极大和极小之间时, 状态方程 (41) 将有三个解, 其中只有最小的解  $\bar{x}_1$  和最大的解  $\bar{x}_2$  ( $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ) 对应局域稳定黑洞而中间的解是非稳定的 (因那里的  $b_q(\bar{x})$  的斜率是正的).  $\bar{x}_1$  对应的是局域稳定小黑洞而  $\bar{x}_2$  对应的是局域稳定大黑洞. 对一给定  $q$ , 存在一个仅为电荷  $q$  的函数的温度  $T_t(q)$  (或  $\bar{b}_t(q)$ ), 它由图中标示的两面积相等确定 (一个是在水平线  $\bar{b} = \bar{b}_t(q)$  之上由  $b_q(x)$  与其所围的面积, 另一个是在水平线之下所围的面积, 详细讨论见文献 [15]). 这时具有半径  $\bar{x}_1$  的小黑洞与

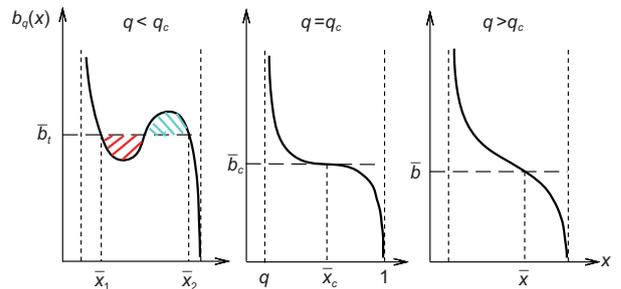


图 3  $q < q_c, q = q_c, q > q_c$  时, 函数  $b_q(x)$  对  $x$  的特征行为  
Figure 3 The characteristic behavior of  $b(x)$  vs  $x$  for  $q < q_c, q = q_c, q > q_c$ , respectively.

半径为  $\bar{x}_2$  的大黑洞的自由能完全一样, 因此两者在这种情况下可以共存和互相转化. 由于该相变涉及熵的变化 (由黑洞半径确定), 因此是一级相变. 利用上述面积可以证明 (见文献 [10]), 当  $\bar{b} > \bar{b}_l(q)$ , 局域稳定的小黑洞具有更小的自由能, 因此最稳定; 而当  $\bar{b} < \bar{b}_l(q)$ , 局域稳定的大黑洞具有更小的自由能, 因此更稳定. 对  $q < q_c$ ,  $\bar{b}_l(q)$  是电荷的函数, 代表一条线, 因此我们具有一条一级相变线. 它终结在  $q = q_c$  处, 这时局域稳定的大小黑洞已没有分别, 两者间转化已没有熵的变化, 因此是一个二级相变临界点. 这里  $q_c$ ,  $x_c$  和  $b_c$  完全确定.

这里的情形完全类似于范德瓦尔斯 - 麦克斯韦气 - 液相变情形, 只要把这里的  $b_q$  看成那里的压强,  $x$  看成那里的体积,  $q$  看成那里的温度. 这里局域稳定的小黑洞类似那里的液相而局域稳定的大黑洞看成那里的气相. 在临界点, 我们可以计算相应的临界指数, 比如比热  $c_v \sim (T - T_c)^{-2/3}$ , 给出临界指数 2/3. 无论是 AdS 空间, 渐进平坦黑洞还是我们后面讨论的渐进平坦黑膜, 这一临界指数都是普适常数 2/3.

### 5 黑膜的热力学稳定性

我们在本节中采用类似的方法讨论弦/M- 理论中黑膜的热力学稳定性、相变和临界现象. 类似粒子物理标准模型中的轻子和夸克, BPS 膜是弦/M- 理论中的基本动力学客体. 与轻子、夸克不同之处在如下几个方面: (i) 这些膜在空间上一般都有延展, 而不是没有几何大小的几何点; (ii) 弦理论中的其它膜相对基本弦来说都是非微扰的, 即它们的膜张力与弦耦合常数成某种反比关系, 更类似于通常的孤子. 弦/M- 理论最大时空维数可到 11 维, 这里我们局限讨论 10 和 11 维中的膜. 在 10 维, 除基本弦外, 我们有各种  $D_p$  膜, 其中  $p = 0, 1, \dots, 9$ . 另外, 我们还有所谓的 NSNS 5- 膜. 在 11 维, 我们有 M2 和 M5 膜. 这里的数, 比如  $D_p$  膜中的  $p$ , 代表对应膜的空间维数. 膜上的时空维数为  $d = p + 1$ , 垂直膜方向上的空间维数为  $D - d = \tilde{d} + 2$  (见图 4).  $p$ - 膜可以带类似电荷的  $(d + 1)$ - 形式的荷  $e_d$  或类似磁荷的  $(\tilde{d} + 1)$ - 形式的荷

$g_{\tilde{d}}$ , 分别由下面公式给出:

$$e_d \sim \int *F_{d+1}, \tag{45}$$

和

$$g_{\tilde{d}} \sim \int F_{\tilde{d}+1}. \tag{46}$$

这里 \* 标记的是时空 Hodge- 对偶,  $\tilde{d} = D - d - 2$ ,  $D$  为时空维数. BPS 膜的特性是其具有质量 (张力) 和荷, 在适当单位制下这两者相等, 对其它与之平行放置的同类膜不仅具有起源于它们质量的相互吸引的引力同时还有起源于它们所带荷的相互排斥的斥力, 但这两者大小相等, 因此总的相互作用为零. 换句话说, 静止的 BPS 膜本身是 (动力学) 稳定的, 且保持一半时空超对称, 如图 4 所示.

当把这种膜放在时空中, 其质量和荷的存在会引起其周围时空弯曲, 并在其周围产生类似电荷产生的静电场的  $(d + 1)$ - 形式的静场. 但当  $p > 6$  时, 我们无法描述对应的引力位形, 因此下面的讨论局限  $0 \leq p \leq 6$  或  $1 \leq \tilde{d} \leq 7$ . 当这种膜的质量大于其所带的荷时, 对应的膜称为黑膜, 其热力学是本节讨论的内容.

对不带电的黑膜, 其热力学的讨论与不带电的黑洞没有区别, 且结论也没有本质区别, 这里不再重复. 下面仅限对带电黑膜的讨论.

欧氏时间带电黑  $p$ - 膜的时空度规, dilaton 场,  $(p + 1)$ - 形式势和对应的场强为

$$ds^2 = \Delta_+ \Delta_-^{-\frac{d}{D-2}} dt^2 + \Delta_-^{\frac{\tilde{d}}{D-2}} (dx^1)^2 + \Delta_-^{\frac{\tilde{d}}{D-2}} \sum_{i=2}^p (dx^i)^2 + \Delta_+^{-1} \Delta_-^{\frac{a^2}{2d}-1} d\rho^2 + \rho^2 \Delta_-^{\frac{a^2}{2d}} d\Omega_{\tilde{d}+1}^2,$$

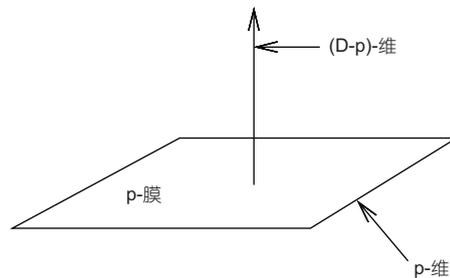


图 4 无限延展的  $p$ - 膜

Figure 4 The infinitely extended  $p$ -brane

$$\begin{aligned}
 e^\phi &= g_s \Delta_-^{a/2}, \quad g_s \equiv e^{\phi_0}, \\
 A_{t1\dots p} &= -i \left[ \left( \frac{r_-}{r_+} \right)^{\tilde{d}/2} - \left( \frac{r_- r_+}{\rho^2} \right)^{\tilde{d}/2} \right], \\
 F_{pt1\dots p} &\equiv \partial_\rho A_{t1\dots p} = -i \tilde{d} \frac{(r_- r_+)^{\tilde{d}/2}}{\rho^{\tilde{d}+1}}, \quad (47)
 \end{aligned}$$

这里  $\Delta_\pm = 1 - \frac{r_\pm^{\tilde{d}}}{\rho^{\tilde{d}}}$ ,  $r_+$  和  $r_-$  分别是黑膜视界和奇点的位置 ( $r_+ > r_-$ ). dilaton 耦合常数  $a$  由下式给定

$$a^2 = 4 - \frac{2d\tilde{d}}{D-2}. \quad (48)$$

对 11 维 M-膜,  $a=0$ . 对 10 维 D<sub>p</sub>-膜,  $a(p) = (p-3)/2$  而对 NSNS p-膜,  $a(p) = (3-p)/2$ .  $g_s$  为弦耦合常数. 该膜所带的荷与参数  $r_\pm$  和  $g_s$  相关, 可由下式算出为

$$Q_d = \frac{i}{2\sqrt{\kappa}} \int e^{-a(d)\phi} * F_{[p+2]} = \frac{\Omega_{\tilde{d}+1}}{2\sqrt{\kappa}} e^{-a\phi_0/2} \tilde{d} (r_+ r_-)^{\tilde{d}/2}. \quad (49)$$

该黑膜的空间延展方向为  $1, 2, \dots, p$ ,  $r$  为垂直膜方向上的径向坐标,  $d\Omega_{\tilde{d}+1}$  为膜横向方向上的  $(\tilde{d}+1)$ -维单位球上的度规. 要使作用量有限, 膜的每一个延展空间坐标必须是紧致的. 由上述度规可以看出,  $\rho$  仅仅是  $(\tilde{d}+1)$ -球的坐标半径而对应的物理半径为

$$\bar{\rho} = \Delta_-^{\frac{2}{4\tilde{d}}} \rho. \quad (50)$$

为研究正则系综下平衡态热力学, 我们同样要把黑膜放入一个沿膜横向方向且与膜同心的球形空腔内. 这时空腔的物理半径  $\bar{\rho}_B$ , 温度  $T_B = 1/\beta_B$ , 在  $\bar{\rho}_B$  处的 dilaton 场值  $\phi_B$  以及空腔内的电荷  $Q_d^B$  都完全固定. 另外, 该系综沿膜空间方向每一紧致物理半径也都固定.

在平衡状态下, 空腔内稳定相在空腔壁处的上述对应量取值应与上述空腔固定值完全一样. 比如,

$$Q_d^B = Q_d \equiv \frac{\Omega_{\tilde{d}+1} \tilde{d}}{\sqrt{2\kappa}} e^{-a\phi_B/2} (\bar{r}_+ \bar{r}_-)^{\tilde{d}/2}, \quad (51)$$

和

$$e^{\phi_B} = e^{\phi(\bar{\rho}_B)} \equiv g_s \Delta_-^{a/2} (\bar{\rho}_B). \quad (52)$$

上面我们已将  $Q_d$  中的  $\phi_0$ ,  $r_\pm$  参数换成  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_B$  处的  $\phi_B$  及

$$\bar{r}_\pm = \Delta_-^{\frac{2}{4\tilde{d}}} r_\pm. \quad (53)$$

注意  $\Delta_\pm$  可以用坐标参数也可以用物理参数表示, 结果一样. 这可以从下列表达式看出

$$\Delta_\pm = 1 - \frac{r_\pm^{\tilde{d}}}{\rho_B^{\tilde{d}}} = 1 - \frac{\bar{r}_\pm^{\tilde{d}}}{\bar{\rho}_B^{\tilde{d}}}. \quad (54)$$

有了这些准备, 我们就可以按前面带电黑洞类似的方式具体计算相应的欧氏作用量. 因涉及的场多一些, 具体计算会复杂一些, 我们在文献 [17] 的附录中给了详细的讨论和计算, 这里不再重复, 直接引用那里的结果. 因热力学稳定相的讨论只与对应的约化作用量相关, 我们这里只给出该约化作用量. 为此, 我们先对一些相关量给出定义. 注意到

$$\bar{r}_- = \left( \frac{\sqrt{2\kappa} Q_d^B}{\Omega_{\tilde{d}+1} \tilde{d}} e^{a\phi/2} \right)^{\frac{2}{\tilde{d}}} \frac{1}{\bar{r}_+} \equiv \frac{(Q_d^*)^2}{\bar{r}_+}, \quad (55)$$

我们定义

$$x = \left( \frac{\bar{r}_+}{\bar{\rho}_B} \right)^{\tilde{d}} < 1, \quad \bar{b} = \frac{\beta_B}{4\pi\bar{\rho}_B}, \quad q = \left( \frac{Q_d^*}{\bar{\rho}_B} \right)^{\tilde{d}} \leq x. \quad (56)$$

相应的约化作用量为

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_E(x) &= -\bar{b} \left[ (\tilde{d}+2) \left( \frac{1-x}{1-q^2/x} \right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{d}(1-x)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{q^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\quad + 2\bar{b}(\tilde{d}+1) - x^{1+1/\tilde{d}} \left( \frac{1-q^2/x^2}{1-q^2/x} \right)^{1/2+1/\tilde{d}}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

热平衡状态方程由下式给出

$$\left. \frac{d\bar{I}_E(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} = 0 \Rightarrow \bar{b} = b_q(\bar{x}), \quad (58)$$

这里

$$b_q(x) = \frac{1}{\tilde{d}} \frac{x^{1/\tilde{d}}(1-x)^{1/2}}{\left( 1 - \frac{q^2}{x^2} \right)^{1/2-1/\tilde{d}} \left( 1 - \frac{q^2}{x} \right)^{1/\tilde{d}}}. \quad (59)$$

由上面  $b_q(x)$  的表达式不难看出当  $\tilde{d} > 2$  时

$$b_q(x \rightarrow q) \rightarrow \infty, \quad b_q(x \rightarrow 1) \rightarrow 0. \quad (60)$$

这一特征告诉我们,  $\tilde{d} > 2$  时的相结构应与上节讨论的带电黑洞情形一致. 我们在文献 [17] 中给予了仔细地分析, 除临界参数与横向维数  $\tilde{d}$  相关外, 其它特

征与带电黑洞的确一致, 这里不再重复. 比如, 比热  $c_v \sim (T - T_c)^{-2/3}$ , 其临界指数仍为  $2/3$ , 且不依赖  $\tilde{d}$ . 临界参数  $q_c, x_c, b_c$  与  $\tilde{d}$  的关系见表 1.

由表 1 我们看出, 所有 3 个参数随  $\tilde{d}$  的增大而减小. 在结束这部分讨论之前, 我们来分析一下极端黑膜是否可以成为稳定相. 极端黑膜与极端黑洞一样, 与其非极端对应有着本质的区别, 它可以与外界任意给定的热源达到热平衡<sup>[19-21]</sup>. 至少从热力学角度来说, 极端黑膜(洞)不能简单地从非极端黑膜取极端极限获得, 这两者之间可能要通过相变才能联系起来.

由于极端黑膜可以与任何热源达到热平衡, 其欧氏作用量可以从(57)中取  $x = q$  得到

$$\bar{I}_E^{\text{ext.}} = \bar{b}\tilde{d}q, \quad (61)$$

对应的自由能

$$F^{\text{ext.}} = \bar{I}_E^{\text{ext.}}/\bar{b} = \tilde{d}q. \quad (62)$$

对一般黑膜, 满足热平衡状态方程(58)的在壳欧氏作用量为

$$\bar{I}_E = -\bar{b}F_q(\bar{x}), \quad (63)$$

这里

$$F_q(x) = 2 \left( \frac{1-x}{1-q^2/x} \right)^{1/2} + \tilde{d} \left( \frac{1-q^2/x}{1-x} \right)^{1/2} + \tilde{d}(1-x)^{1/2} \left( 1 - \frac{q^2}{x} \right)^{1/2} - 2(\tilde{d}+1), \quad (64)$$

对应的在壳自由能

$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{I}_E(\bar{x})/\bar{b} = -F_q(\bar{x}). \quad (65)$$

表 1 临界参数  $q_c, x_c, b_c$  与  $\tilde{d}$  的关系

$\tilde{d}$	$q_c$	$x_c$	$b_c$
3	0.141626	0.292656	0.199253
4	0.090672	0.238800	0.159921
5	0.064944	0.202012	0.134632
6	0.049599	0.175176	0.116698
7	0.039529	0.154691	0.103210

注意到  $F_q(q) = -\tilde{d}q, F_q(q) = \infty$ , 我们有  $\bar{F}(q) = \tilde{d}q$  和  $\bar{F}(1) = -\infty$ . 我们希望指出在壳非极端黑膜的自由能极端极限  $\bar{x} \rightarrow q$  与极端黑膜的自由能(62)一致(注意极端黑膜的自由能不需要在壳, 这两者一致的原因是非极端黑膜在壳自由能中源于对应欧氏作用量(57)中的最后一项在取  $\bar{x} \rightarrow q$  极限时没有贡献). 另外, 我们有

$$\frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{d}^2 \bar{x}^{1-1/\tilde{d}} (1-q^2/\bar{x})^{1+1/\tilde{d}}}{(1-\bar{x})(1-q^2/\bar{x}^2)^{1/\tilde{d}}} \frac{db_q(\bar{x})}{d\bar{x}}. \quad (66)$$

在区间  $q < x < 1$ , 局域稳定的黑膜对应  $db_q(x)/dx < 0$ , 由此可知对在壳稳定黑膜有  $d\bar{F}(\bar{x})/d\bar{x} < 0$ , 即为一递减函数, 因此对  $\tilde{d} > 2$  的极端黑膜, 在任何给定的空腔条件下, 其自由能总是最大(对  $q > q_c, q = q_c$  和  $q < q_c$  任一情况都对), 因此不可能是一稳定相(更仔细的讨论参见文献[18]).

当  $\tilde{d} \leq 2$ , 新的相行为出现了, 我们下面分别对  $\tilde{d} = 2, 1$  两种情形给予较仔细的描述.

### 5.1 $\tilde{d} = 2$ 情形

当  $\tilde{d} = 2$  时, (59) 给出

$$b_q(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x(1-x)}{1-q^2/x}}. \quad (67)$$

我们注意到

$$b_q(x \rightarrow q) \rightarrow \frac{\sqrt{q}}{2}, \quad b_q(x \rightarrow 1) \rightarrow 0, \quad (68)$$

它在  $x \rightarrow q$  的极限有限且不为零, 不同于零荷情形和  $\tilde{d} > 2$  时的非零荷情形. 后面我们将看到,  $\tilde{d} = 2$  情形是一种介于  $\tilde{d} > 2$  和  $\tilde{d} = 1$  之间的过渡情形, 而后的行为更类似于零荷情形. 换句话说,  $\tilde{d} = 2$  在某些方面类似  $\tilde{d} > 2$  情形, 比如它有临界参数但没有临界现象出现, 而其相结构等又类似后面描述的  $\tilde{d} = 1$  情形.

为更进一步了解  $b_q(x)$  行为, 我们来分析一下  $b_q(x)$  的极值情况. 由

$$\frac{db_q(x)}{dx} = 0, \quad (69)$$

我们有

$$2x^2 - (1 + 3q^2)x + 2q^2 = 0. \quad (70)$$

该方程可分解为

$$(x-x_+)(x-x_-) = 0, \quad (71)$$

其中

$$x_{\pm} = \frac{1}{4} \left( 1 + 3q^2 \pm \sqrt{\Delta} \right), \quad (72)$$

这里  $\Delta = (1-q^2)(1-9q^2)$ . 要使  $x_-$  和  $x_+$  是上述方程的实根, 要求

$$\Delta = (1-q^2)(1-9q^2) \geq 0. \quad (73)$$

因  $0 < q < 1$ , 这要求  $0 < q \leq 1/3$ . 当  $q = q_c = 1/3$ ,  $\Delta = 0$ , 我们有  $x_+ = x_- = q_c = 1/3 = q$ . 也就是说, 这时极值发生在边界  $x = q$ . 在这里我们有

$$\left. \frac{d^2 b_q(x)}{dx^2} \right|_{x=q=1/3} \sim x - q = 0. \quad (74)$$

因此, 边界  $x_c = q_c = 1/3$  是一个拐点. 按常规判断临界点来说, 这对应的似乎是一个临界点. 由于局限在区域  $x \geq q$  而  $x = q$  在边界上, 我们没有象  $\tilde{d} > 2$  时那样具有两稳定相之间的相变而终结在该临界点 (下面  $q < q_c = 1/3$  的讨论会明确说明这一点). 也就是说我们有类似的临界参数  $x_c = q_c = 1/3, b_c = 1/(2\sqrt{3})$ , 但没有临界现象. 根据  $q > q_c, q = q_c$  和  $q < q_c$ , 我们也有三种  $b_q(x)$  行为如图 5 所示.

我们分别就上述三种情况讨论. 当  $1 > q \geq q_c = 1/3$  时, 因  $\Delta \leq 0, b_q(x)$  在  $q < x < 1$  区间上没有极值存在. 注意到

$$\frac{db_q(x)}{dx} = -\frac{b_q(x)}{2} \left[ \frac{2x^2 - x(1+3q^2) + 2q^2}{x(1-x)(x-q^2)} \right] < 0, \quad (75)$$

$b_q(x)$  在该区间是递减函数, 在  $x = q$  处取最大值为  $b_q(x=q) = \sqrt{q}/2$ . 对  $0 < \bar{b} < \sqrt{q}/2$ , 状态方程

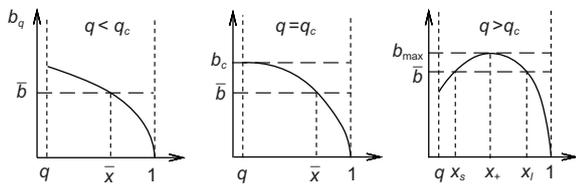


图 5  $\tilde{d} = 2$  时  $b_q(x)$  对  $x$  的特征行为

Figure 5 The characteristic behavior of  $b_q(x)$  vs  $x$  for the  $\tilde{d} = 2$  three subcases, respectively.

$\bar{b} = b_q(\bar{x})$  有唯一解  $\bar{x}$  且在该处系统的自由能取局域最小, 因此是局域稳定. 对这种情形, 类似  $\tilde{d} > 2$ , 极端黑洞这时自由能取最大值, 因此任何局域稳定的黑膜很可能也是整体稳定. 当  $\bar{b} \geq b_q(q) = \sqrt{q}/2$ , 黑膜不可能存在, 这时极端黑膜起到零荷时的“热平坦时空”的作用成为稳定相. 当非极端黑膜接近极端极限时, 非极端黑膜应通过类似 Hawking-Page 相变变为极端黑膜.

对  $0 < q < q_c = 1/3$  (见图 5 中的第三图),  $\Delta > 0$ . 这时方程 (69) 给出两个实解 (72), 其中  $q < x_+ < 1$  但  $x_- < q$ . 在区间  $q < x < 1$ , 我们只有实解  $x_+$ , 这时  $b_q(x)$  取其最大值

$$b_{\max} = \frac{\left( 1 + 3q^2 + \sqrt{(1-q^2)(1-9q^2)} \right)^{1/2}}{8\sqrt{2}} \times \left( 3\sqrt{1-q^2} - \sqrt{1-9q^2} \right) > b_q(q) = \frac{\sqrt{q}}{2}. \quad (76)$$

由 (64) 和 (65), 我们算出  $\tilde{d} = 2, \bar{x} = x_+$  时在壳自由能为

$$\bar{F}(x_+) = 6 - 4\sqrt{2(1-q^2)} > F^{\text{ext.}} = 2q, \quad (77)$$

这里最后的不等式用了 (62) 并取  $\tilde{d} = 2$ . 因此在  $x_+ < \bar{x} < 1$  区间的局域稳定态中, 存在一个  $x_g$  使得在壳自由能  $\bar{F}(x_g) = F^{\text{ext.}} = 2q$ . 这样在  $x_+ < \bar{x} < x_g$ , 在壳自由能  $\bar{F}(\bar{x}) > F^{\text{ext.}} = 2q$ , 因此这些局域稳定的非极端黑膜只是亚稳定的, 通过类似的 Hawking-Page 相变转变为极端黑膜. 只有当  $x_g < \bar{x} < 1$  时非极端在壳黑膜的自由能 (一个递减函数) 小于对应极端黑膜的自由能, 因此可为整体稳定相. 另外, 当  $\bar{b} > b_{\max}$  只有极端黑膜相存在. 因此这里的讨论很类似零荷情形, 极端黑膜取代了那里的“热平坦时空”. 下面我们来决定  $x_g$ , 对应的方程为

$$\left( \frac{1-x_g}{1-\frac{q^2}{x_g}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1-\frac{q^2}{x_g}}{1-x_g} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( (1-x_g) \left( 1 - \frac{q^2}{x_g} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = 3 - q. \quad (78)$$

该方程, 尽管看上去复杂, 可以约化成如下可解二次方程

$$x_g^2 - \frac{3-2q+3q^2}{2}x_g + q^2 = 0, \quad (79)$$

其解为

$$x_g^\pm = \frac{3-2q+3q^2 \pm (1+q)\sqrt{3(3-q)(1-3q)}}{8}. \quad (80)$$

我们可以验证只有  $x_g^+$  解满足  $x_+ < x_g^+ < x_q$  而  $x_g^- < q$ . 这里  $x_q$  是方程  $b_q(x_q) = \sqrt{q}/2$  除  $x=q$  外的另外一个解, 其为

$$x_q = \frac{1-q + \sqrt{(1-3q)(1+q)}}{2} < 1. \quad (81)$$

在  $\bar{x} = x_g$  处, 非极端黑膜的自由能与极端黑膜的自由能在

$$\bar{b} = b_g = \frac{5-3q - \sqrt{3(3-q)(1-3q)}}{16\sqrt{2}} \times \left[ 3-2q+3q^2 + (1+q)\sqrt{3(3-q)(1-3q)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (82)$$

时是一样, 因此两者可以共存, 相互转化.

### 5.2 $\tilde{d} = 1$ 情形

对该情形, (59) 给出

$$b_q(x) = \frac{x(1-x)^{1/2} \left(1 - \frac{q^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{q^2}{x}} > 0. \quad (83)$$

注意到这里

$$b_q(x \rightarrow q) \rightarrow 0, \quad b_q(x \rightarrow 1) \rightarrow 0, \quad (84)$$

与零荷时的行为一样, 只是这里  $x \rightarrow q$  取代了那里的  $x \rightarrow 0$ ,  $b_q(x)$  的行为见图 6. 因此由

$$\frac{db_q(x)}{dx} = 0 \quad (85)$$

导出

$$\frac{3}{2}x^4 - \left(1 + \frac{5}{2}q^2\right)x^3 + \frac{3}{2}q^2x^2 + \frac{3}{2}q^4x - q^4 = 0, \quad (86)$$

在区间  $q < x < 1$  有唯一解  $x_{\max}$ , 对应  $b_q(x)$  取最大值  $b_{\max}$  (详细讨论见文献 [17,18]). 基于上述事实 and 前面  $\tilde{d} = 2$  的讨论, 我们期待着这里的相结构与前面零荷下黑洞 (膜) 一样. 我们在文献 [18] 中对该情形做了仔细研究, 发现情况的确如所料, 唯一的区别是用这里的  $q < x < 1$  取代零荷时的  $0 < x < 1$  以及这里的极

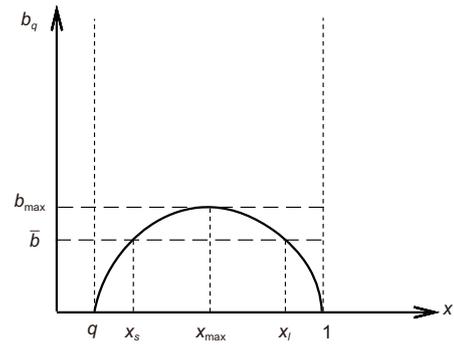


图 6  $\tilde{d} = 1$  时  $b_q(x)$  对  $x$  的特征行为

Figure 6 The  $\tilde{d} = 1$  characteristic behavior of  $b_q(x)$  vs  $x$ .

端黑膜取代那里的“热平坦时空”. 在  $x_{\max} < \bar{x} < 1$  区间, 同样存在一个  $x_g$  使得在壳自由能与对应极端黑膜的自由能一致, 由下列方程确定

$$4 - q = 2 \left( \frac{1-x_g}{1-\frac{q^2}{x_g}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1-\frac{q^2}{x_g}}{1-x_g} \right)^{\frac{1}{2}} + (1-x_g)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{q^2}{x_g} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (87)$$

该方程约化成一个  $x_g$  的四次方程, 但从前面有关非极端黑膜在壳自由能与对应极端黑膜自由能的关系可知,  $x_g = q$  一定是该方程的一个解 (这也不难从上面方程直接得到验证). 这样上述方程可以约化成如下三次方程

$$9x_g^3 + (-8 + q - 5q^2)x_g^2 + q^2(4 + 3q)x_g - 4q^3 = 0. \quad (88)$$

我们在文献 [18] 中讨论了该方程存在一个正实解, 其解析形式可以从上述方程直接给出. 但由于其表达式过于复杂, 我们在表 2 中列出了电荷  $q = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  时对应的数值解以及对应的  $b_g$  值 (表中也列出了相应  $q$  值对应的  $x_{\max}$  和  $b_{\max}$ ).

该情形的相结构及相变与零荷时类似, 具体参考文献 [18], 这里不再重复.

## 6 讨论与总结

在本文的讨论中, 为简单起见, 对  $p > 0$  黑膜, 我们没有考虑在文献 [18] 中发现的一个新的热力学相

表 2 电荷  $q = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  时对应的数值解及  $b_g$  值

Table 2 The numerical solutions and the values of  $b_g$  when  $q = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$

$q$	$x_g$	$\bar{b}_g$	$x_{\max}$	$b_{\max}$
0.1	0.878471	0.307757	0.668371	0.386344
0.2	0.870088	0.319918	0.673943	0.390683
0.3	0.864945	0.332758	0.673943	0.397903
0.4	0.864458	0.346219	0.684781	0.407890
0.5	0.870015	0.360200	0.731065	0.420323
0.6	0.882600	0.374565	0.769645	0.434666
0.7	0.902505	0.389161	0.817842	0.450290
0.8	0.929316	0.403845	0.873604	0.466636
0.9	0.962160	0.418491	0.934861	0.483295

泡泡 (“bubble of nothing”). 该泡泡相无论对  $\tilde{d} > 2$  还是  $\tilde{d} \leq 2$  都可以成为稳定相, 具体见文献 [18] 的讨论. 由于泡泡相的存在使得每一种  $\tilde{d}$  情况下的相结构和对应的相变变得非常丰富.

在对黑膜的热力学研究选取合适的框架下, 我们的系列研究 [17,18,22] 揭示了正则系综下以前忽视的两个新热力学相: 极端黑膜相和泡泡相, 每一个都起到零荷情况下 “热平坦时空” 的作用. 只有考虑这两个新相, 尤其是极端黑膜相, 我们才能在  $\tilde{d} \leq 2$  时得到非零荷情况下完整的稳定相结构. 在非零荷情况下, 我们还发现了很多有趣的相结构, 比如最多可以达

到四相共存, 以及相关的相变, 包括类似的 Hawking-Page 相变. 我们要指出的是, 除在临界点外 (二级相变), 其它的相变都是一级. 我们发现对  $\tilde{d} > 2$  极端黑膜不能成为热力学稳定相, 但在  $\tilde{d} \leq 2$  时极端黑膜是给出完整相结构所必不可少的. 我们对热力学稳定性的分析完全基于自由能判据 (零级引力作用量近似).

本研究表明非极端黑膜和极端黑膜之间不是简单地取极端极限, 至少在热力学下不可能如此, 因那样很可能与热力学第三定律有不一致的地方, 这两者的自旋结构也不一样 [18]. 在热力学意义下, 它们之间的联系可能要通过相关的拓扑相变 (类似 Hawking-Page 相变). 一般情况下, 如何理解这两者之间的关联可能仍然是一个没有解决的问题, 尤其是相关的动力学.

另外, 空腔中渐进平坦黑洞 (膜) 热力学的稳定相和相变与 AdS 空间下的黑洞特性的一致性 [14,15] 似乎表明有更深刻的内涵. 空腔和 AdS 空间起的作用之一是保证系统内的自由度在某种意义上守恒或禁闭作用, 自然的问题是, 我们在空腔设置下也有类似的一个引力理论和一个非引力理论的对偶关系吗?

如何从动力学角度去理解相关的相变, 以及各种相变实际发生的几率大小也是一个现实和有意义的问题.

## 参考文献

- 1 Duff M J, Khuri R, Lu J X. String solitons. Phys Rep-Rev Sec Phys Lett, 1995, 259: 213–326
- 2 Witten E. String theory dynamics in various dimensions. Nucl Phys B, 1995, 443: 85–126
- 3 Townsend P. Four lectures on M-theory. arXiv: hep-th/9612121
- 4 Polchinski J. String duality: A colloquium. Rev Mod Phys, 1996, 68: 1245–1258
- 5 Schwarz J H. Status of superstring and M-theory. arXiv: 0812.1372.
- 6 Maldacena J. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. Int J Theor Phys, 1999, 38: 1113–1133
- 7 Bekenstein J D. Black holes and entropy. Phys Rev D, 1973, 7: 2333–2346
- 8 Hawking S W. Particle creation by black holes. Commun Math Phys, 1975, 43: 199–220 [Erratum. Commun Math Phys, 1976, 46: 206–206]
- 9 Bekenstein J D. Generalized second law of thermodynamics in black hole physics. Phys Rev D, 1974, 9: 3292–3300
- 10 York J W. Black hole thermodynamics and the Euclidean Einstein action. Phys Rev D, 1986, 33: 2092–2099
- 11 Braden H W, Brown J D, Whiting B F, et al. Charged black hole in a grand canonical ensemble. Phys Rev D, 1990, 42: 3376–3385
- 12 Okamoto I, Katz J, Parentani R. A comment on fluctuations and stability limits with application to ‘superheated’ black holes. Class Quantum Grav, 1995, 12: 443–448; Kaburaki O. Should entropy be concave? Phys Lett A, 1994, 185: 21–28; Kaburaki O. Critical behavior of extremal Kerr-Newman black holes. Gen Rel Grav, 1996, 28: 843–854
- 13 Gibbons G W, Hawking S W. Action integrals and partition functions in quantum gravity. Phys Rev D, 1977, 15: 2752–2756

- 14 Carlip S, Vaidya S. Phase transitions and critical behavior for charged black holes. *Class Quantum Gravity*, 2003, 20: 3827–3838
- 15 Lundgren A P. Charged black hole in a canonical ensemble. *Phys Rev D*, 2008, 77: 044014
- 16 Hawking S W, Page D N. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Commun Math Phys*, 1983, 87, 577–588
- 17 Lu J X, Roy S, Xiao Z. Phase transitions and critical behavior of black branes in canonical ensemble. *J High Energy Phys*, 2011, 1: 133
- 18 Lu J X, Roy S, Xiao Z. The enriched phase structure of black branes in canonical ensemble. *Nucl Phys B*, 2012, 854: 913–925
- 19 Gibbons G M, Kallosh R E. Topology, entropy and Witten index of dilaton black holes. *Phys Rev D*, 1995, 51: 2839–2862
- 20 Hawking S W, Horowitz G T, Ross S F. Entropy, area, and black hole pairs. *Phys Rev D*, 1995, 51: 4302–4314
- 21 Teitelboim C. Action and entropy of extreme and nonextreme black holes. *Phys Rev D*, 1995, 51: 4315–4318 [Erratum. *Phys Rev D*, 1995, 52: 6201–6201]
- 22 Lu J X, Roy S, Xiao Z. Phase structure of black branes in grand canonical ensemble. *J High Energy Phys*, 2011, 5: 091

## The Thermodynamical Phase Structure of black branes in String/M Theory

LU JianXin\*

*The Interdisciplinary Center for Theoretical Study, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*

A macroscopic gravitational system such as a black hole differs significantly from a non-gravitational system in thermodynamics in that its state functions entropy and temperature are quantum mechanical in nature without a classical limit. As such its corresponding thermodynamics, to certain extent, is also quantum mechanical in nature and this provides a window for the study of quantum gravity. This article reviews the recent work of the author and his collaborators on the thermodynamical phases, phase transitions and the related critical phenomena of the black branes in string/M-theory (the basic dynamical building blocks of this theory), the higher dimensional generalization of the black hole, in hope of obtaining important non-perturbative information for the complete formulation of M-theory.

**quantum gravity, string/M-theory, thermodynamical phase, phase transition**

**PACS:** 11.25.-w, 11.27.+d, 04.50.Gh

**doi:** 10.1360/132012-610