

广义 Beurling-Ahlfors 定理*

方爱农

(上海交通大学数学系, 上海 200030)

摘要 建立了具有可积球伸张 $H(z, f)$ 的, 上半平面到自身的 ID-同胚 $w=f(z)$ 的 Beurling-Ahlfors 定理, 研究了广义 Beurling-Ahlfors 扩张的等距问题.

关键词 拟圆 边值问题 拟对称函数 拟共形扩张 μ -同胚

众所周知, 圆周或直线在全平面到自身的 K -拟共形映照下的象称为 K -拟圆周. 我们可以将判别一条 Jordan 曲线是否为 K -拟圆周的问题, 转化为判别实轴上的自同胚 $h(x)$ 是否为上半平面到自身的 K -拟共形映照的边界值问题. 对于 K -拟共形映照, Beurling 和 Ahlfors 于 1956 年解决了这个问题, 其充要条件是 $h(x)$ 为 λ 拟对称函数; $h(x)$ 在实轴上连续、单增、 $h(\infty) = \infty$ 以及

$$\lambda(K)^{-1} \leq \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} \leq \lambda(K), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

其中 $\lambda(K)$ 是仅与 K 有关的常数. 拟圆周和这个著名结果, 已被广泛应用到函数论, Sobolev 空间、万有 Teichmüller 空间、拟 Fuchs 群和复动力系统等领域. 因此这是一个十分基本的结果. 近 40 年来, 对于 Beurling-Ahlfors 扩张的最大伸缩商的上界已有许多工作. 但是对于拓广它的应用范围, 特别是在有奇性、更广泛的映照类中建立 Beurling 和 Ahlfors 的相应结果, 这个十分有意义的基本问题, 除了 David 对 μ -同胚猜测过之外, 则一直未见有所研究^[1-3], 本文将研究这个问题.

我们现在回忆本文要用到的一些定义和结果^[6], 假设 D 与 D' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $y=f(x): D \rightarrow D'$ 是一个保向同胚, 我们称

$$H(x, f) = \limsup_{r \rightarrow 0} \left[\max_{|y-x|=r} |f(y)-f(x)| / \min_{|y-x|=r} |f(y)-f(x)| \right] \quad (2)$$

为 $f(x)$ 在点 x 的球伸张. 如果 $y=f(x)$ 是 ACL 的, 几乎处处可微, 且 $H(x, f) \in L_{\text{loc}}(D)$, 则称它为具有可积伸张的同胚, 简称为 ID-同胚. 我们有

定理 A 假设 $y=f(x)$ 是 ID-同胚, $H(x, f) \in L_{\text{loc}}^{(n-1)^2}(D)$ 和 $H(y, f^{-1}) \in L_{\text{loc}}^{(n-1)}(D')$, 则

$$\left[\omega_{n-1} \int_{\alpha}^{\beta} \left(r^{n-1} \int_{S(0,1)} H(x, f)^{(n-1)^2} dS_{\omega} \right)^{-1/(n-1)} dr \right]^{1/(n-1)} \leq \text{mod} f(R)$$

$$\leq \omega_{n-1}^{1/(n-1)} \left[\int_{S(0,1)} \left(\int_{\alpha}^{\beta} (H(x, f)/r) dr \right)^{-(n-1)} dS_{\omega} \right]^{-1/(n-1)}, \quad (3)$$

其中 ω_{n-1} 是 $n-1$ 维单位球面的面积, $\text{mod} f(R)$ 是环 $f(R)$ 的模, $R = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < |x - x_0| < \beta\} \subset D$, $x_0 \in D$, dS_{ω} 是单位球面上的面积元素, $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

当 $n=2$, $H(z, f)$ 是 Riemann 可积时, 不等式 (3) 首先由何成奇得到^[7], 他是用另外的伸张 $K(z, f)$ 来做的. David 引进了 μ -同胚^[1], Tukia 研究了其紧性^[8]. 我们证明了 μ -同胚是 ID-同胚的一个真子类. 我们还建立了

定理 B 在定理 A 的条件下, 如果 $C(D) = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus D \neq \emptyset$, $x, \zeta \in D$, $x \neq \zeta$ 而且 $q(x, \zeta) < q(x, C(D))$, 则

$$q(f(x), f(\zeta))q(C(D')) \leq 2\lambda_n \exp \left\{ - \left[\omega_{n-1} \int_{\alpha}^{\beta} \left(r^{n-1} \int_{S(0,1)} H(x, f)^{(n-1)^2} dS_{\omega} \right)^{-1/(n-1)} dr \right]^{1/(n-1)} \right\}, \quad (4)$$

其中 $q(x, \zeta)$ 是 $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$ 之间的弦距离, λ_n 由 Teichmüller 环的模确定^[9], $\lambda_2 = 16$, 而且

$$\alpha = q(x, \zeta) / \sqrt{1 - q(x, \zeta)^2}, \quad \beta = q(x, C(D)) / \sqrt{1 - q(x, C(D))^2}.$$

1 $\rho(x, t)$ 拟对称函数

在这节, 我们研究实值函数 $h(x)$ 是上半平面到自身的 ID-同胚的边界值的必要条件. 如果将 (1) 式中的 $\lambda(K)$ 换为 x, t 的正函数 $\rho(x, t)$, (1) 式才成立, 则称这类 $h(x)$ 为 $\rho(x, t)$ 拟对称函数. 如果 $w = f(z)$ 是 ID-同胚, $H(w, f^{-1}) \in L_{\text{loc}}(H)$, $f(\infty) = \infty$ 而且当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(r \int_0^{2\pi} H(z, f) d\theta \right)^{-1} dr \rightarrow \infty, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \left(r \int_0^{2\pi} H(w, f^{-1}) d\theta \right)^{-1} dr \rightarrow \infty,$$

则称 $w = f(z)$ 为 AID-同胚.

引理 1 上半平面 H 到自身的 AID-同胚 $w = f(z)$ 可以延拓为 $\overline{H}$ 到自身的同胚, 而且其边界值 $f(x)$ 存在、连续、单调增加和 $f(\infty) = \infty$.

利用定理 B 可如常规得到此引理. 为了能应用定理 A, 我们将上半平面共形映照为某个沿半径剪开的圆环. 在实轴上取 3 个点 $x_0 - t$, x_0 , $x_0 + t$ 和 ∞ 作顶点, 使 H 成为一个四边形, 记为 $H(\infty, x_0 - t, x_0, x_0 + t)$. 显然 (由文献[4], p.59)

$$z = z(\tau) = \sqrt{2} \, t \zeta \left(\frac{K(\sqrt{2}/2)}{2\pi} \ln \tau \right) - t + x_0, \quad t > 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

将沿半径 $[1, e^{2\pi}]$ 剪开的圆环 $R_t = \{\tau \in \mathbb{C} : 1 < |\tau| \leq e^{2\pi}\}$ 共形映照为 $H(\infty, x_0 - t, x_0, x_0 + t)$, 这里与今后恒设 $z(\tau)$ 与 $\tau(z)$, $\eta(\zeta)$ 与 $\zeta(\eta)$ 互为逆共形映照, 而

$$\eta(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{2i} \int_{\infty}^{\zeta} \frac{dz}{\sqrt{z(z - \sqrt{2}/2)(z - \sqrt{2})}}, \quad K(r) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}.$$

因此复合映照

$$w = f(z(\tau)) = f_0(\tau) \quad (6)$$

将沿半径 $[1, e^{2\pi}]$ 剪开的圆环 R_t 同胚变换为四边形 $H(\infty, w(x_0-t), w(x_0), w(x_0+t))$, 因为 $z(\tau)$ 是共形的, 因此 $f_0(\tau)$ 的球伸张

$$H(\tau, f_0) = H(z(\tau), f). \quad (7)$$

关于 $H(\tau, f_0)$ 的可积性, 我们有

引理 2 假设 $H(z, f)|\tau'(z)|^2 \in L(\overline{H})$, 则 $H(\tau, f_0) \in L(\overline{R_t})$, 其中 $f(z)$ 是上半平面到自身的 AID-同胚.

根据 (7) 式和引理 2 的条件, 我们有

$$\int_{R_t} H(\tau, f_0) d\sigma_\tau = \int_{R_t} H(z(\tau), f) d\sigma_\tau = \int_H H(z, f) |\tau'(z)|^2 d\sigma_z,$$

因此 $H(\tau, f_0) \in L(\overline{R_t})$, 引理 2 证毕.

由于 $H(z, f) \geq 1$, 所以仅有 $H(z, f) \in L_{\text{loc}}(H)$. 因此, 当要求整体可积时, 如下面的定理 1, 必须对 $H(z, f)$ 加条件. 现在我们建立

定理 1 在引理 2 的条件下, 实值函数 $h(x)$ 是上半平面 H 到自身的 AID-同胚 $w=f(z)$ 的边界值的必要条件是 $h(x)$ 为 $\rho(x, t)$ 拟对称函数, 而且 $\rho(x, t) \in L_{\text{loc}}(H)$ 仅依赖于 $H(x, f)$.

证 根据引理 1, $w=f(z)$ 的边界值 $w(x)=f(x)$ 存在、连续、单调增加而且 $w(\infty)=f(\infty)=\infty$. 因此, 如果我们能证明 $w(x)$ 满足不等式 (1), 而且用 x 与 t 的正函数 $\rho(x, t)$ 取代其中的 $\lambda(K)$, 则我们证明了 $w(x)$, 也就是 $h(x)$, 是 $\rho(x, t)$ 拟对称函数.

根据引理 2, 应用定理 A, 或利用极值长度, 仿其证明, 我们得到模不等式

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^{e^{2\pi}} \left(r \int_0^{2\pi} H(\tau, f_0) d\theta \right)^{-1} dr &\leq \text{mod}(H(\infty, w(x_0-t), w(x_0), w(x_0+t))) \\ &\leq 2\pi \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{e^{2\pi}} \frac{H(\tau, f_0)}{r} dr \right)^{-1} d\theta \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $r=|\tau|$. 根据文献[4], p.81 得到

$$M(H(\infty, w(x_0-t), w(x_0), w(x_0+t))) = \frac{2}{\pi} \mu(\sqrt{1/(1+X)}), \quad (9)$$

其中

$$\mu(r) = \frac{\pi}{2} \frac{K(\sqrt{1-r^2})}{K(r)}, \quad X = \frac{w(x_0+t) - w(x_0)}{w(x_0) - w(x_0-t)}.$$

将 (9) 式代入 (8) 式, 利用 $\mu(r)$ 的单调性, 如同文献[4], (6.3) ~ (6.6) 式, 注意到 $M(H(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \text{mod}(H(\cdot))$, 我们有

$$\left[\mu^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \int_1^{e^{2\pi}} \left(r \int_0^{2\pi} H(z(\tau), f) d\theta \right)^{-1} dr \right) \right]^{-2} - 1 \leq \frac{w(x_0+t) - w(x_0)}{w(x_0) - w(x_0-t)}$$

$$\leq \left\{ \mu^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{e^{2x}} \frac{H(z(\tau), f)}{r} dr \right)^{-1} d\theta \right]^{-1} \right) \right\}^{-2} - 1. \quad (10)$$

记(10)式左端和右端为 $\rho_1(x_0, t)$ 和 $\rho_2(x_0, t)$. 令

$$\rho(x_0, t) = \max(\rho_1(x_0, t)^{-1}, \rho_2(x_0, t)). \quad (11)$$

则有

$$\frac{1}{\rho(x_0, t)} \leq \frac{w(x_0 + t) - w(x_0)}{w(x_0) - w(x_0 - t)} \leq \rho(x_0, t).$$

根据文献[4], p.61, (2.10)式, 当 $0 < x < \infty$ 时, $0 < \mu^{-1}(x) < 1$, 因此从(10)与(11)式得到, 当 $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ 时, $\rho(x, t) > 0$. 根据引理 1, 我们可记 $h(x) = w(x)$; 于是 $w(x)$, 也就是 $h(x)$, 是 $\rho(x, t)$ 拟对称函数.

最后, 我们证明 $\rho(x, t) \in L_{\text{loc}}(H)$. 事实上, 由(5)式得到 $\tau = \tau(z; t, x_0)$, 当 $t > 0$ 时, τ 是 t 与 x_0 的连续函数. 令 $F(\tau) = H(\tau, f_0)/|\tau|^2$, 这里 $H(\tau, f_0)$ 由(7)式定义. 由引理 2, $F(\tau) \in L(\bar{R}_t)$, 应用 Borel 定理, 可以证明 $\int_{R_t} F(\tau) d\sigma_\tau$ 是 x_0 与 t 的连续函数. 因此注意到 $F(\tau) \geq e^{-4\pi}$. 利用 Fubini 定理, 不难证明

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{e^{2x}} F(\tau) r dr \right)^{-1} d\theta \right)^{-1}$$

是 x_0 与 t 的连续函数. 同理可得

$$\int_1^{e^{2x}} \left(\int_0^{2\pi} F(\tau) d\theta \right)^{-1} r dr$$

是 x_0 与 t 的连续函数. 根据 Grötzsch 极值区域模函数 $\mu(r)$ 在 $(0, 1)$ 上的严格单调性和连续性, (11)式中的 $\rho_i(x_0, t)$, $i=1, 2$, 是 x_0, t 的连续函数. 因此 $\rho(x_0, t) = \frac{1}{2} [\rho_1(x_0, t) + \rho_2(x_0, t) + |\rho_1(x_0, t) - \rho_2(x_0, t)|]$ 是 x_0 与 t 的连续函数. 于是 $\rho(x, t) \in L_{\text{loc}}(H)$. 定理证毕.

注 1 因为当 $t > 0$ 时, $\rho(x, t)$ 是 x, t 的连续函数, 所以 $\rho(x, t) \in L_{\text{loc}}^p(H)$, $p \geq 1$.

2 广义 Beurling-Ahlfors 扩张

Beurling-Ahlfors 用构造性方法证明了 λ 拟对称函数 $h(x)$, 一定是某个上半平面 H 到自身的 $K=K(\lambda)$ -拟共形映照的边界值. 对于 ID-同胚, 我们也用这个方法来说明定理 1 的逆, 即

定理 2 假设实值函数 $h(x)$ 是 $\rho(x, t)$ 拟对称的, 而且 $\rho(x, t) \in L_{\text{loc}}^3(H)$, 则存在一个 ID-同胚 $w=f(z): H \rightarrow H$ 以 $h(x)$ 为边界值.

证 当 $\rho(x, t) = \lambda = \text{常数}$ 时, 正如文献[4]所表明的, 各种估计仅依赖于常数 λ , 但在我们的各种估计中, 它们不仅依赖于 $\rho(X, T)$, 而且在各个估计中 X 与 T 取值是不同的. 对于这种估计, 我们将详细地计算 $\rho(X, T)$, 其他地方将从略.

如同文献[4], pp. 83~85, 令

$$\alpha(x, y) = \int_0^1 h(x+ty) dt, \quad \beta(x, y) = \int_0^1 h(x-ty) dt, \quad (12)$$

则

$$w = u + iv = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \frac{i}{2} (\alpha - \beta) = \frac{1}{2} (1+i)(\alpha - i\beta). \quad (13)$$

定义一个上半平面到自身的连续可微同胚, 在 $y=0$ 上取 $h(x)$. 下面证明它是 ID-同胚.

事实上, 根据文献[4], p. 84 得到

$$\begin{aligned} \alpha_x(x, y) &= \frac{1}{y} (h(x+y) - h(x)), \quad \beta_x(x, y) = \frac{1}{y} (h(x) - h(x-y)), \\ \alpha_y(x, y) &= \frac{1}{y} (h(x+y) - \alpha(x, y)), \quad \beta_y(x, y) = \frac{1}{y} (h(x-y) - \beta(x, y)), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\alpha_x(x, y) > 0, \quad \beta_x(x, y) > 0, \quad \alpha_y(x, y) > 0, \quad \beta_y(x, y) < 0,$$

$$D(z) \leq \frac{\alpha_x \beta_x}{-\alpha_y \beta_y} \cdot \frac{\alpha_x / \beta_x + \alpha_y^2 / (\alpha_x \beta_x) + \beta_x / \alpha_x + \beta_y^2 / (\alpha_x \beta_x)}{-\beta_x / \beta_y + \alpha_x / \alpha_y}, \quad (15)$$

其中

$$D(z) = \frac{|w_z| + |w_{\bar{z}}|}{|w_z| - |w_{\bar{z}}|}, \quad w_z = \frac{1}{2} (w_x - iw_y), \quad w_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (w_x + iw_y).$$

根据定理 2 的假设, $h(x)$ 适合

$$\rho(X, T)^{-1} \leq \frac{h(X+T) - h(X)}{h(X) - h(X-T)} \leq \rho(X, T), \quad X \in \mathbb{R}, \quad T > 0. \quad (16)$$

取 $X = x + \frac{1}{2}y$, $T = \frac{1}{2}y$, 从 (16) 式的左端得到

$$h(x+y/2) - h(x) \leq \rho(x+y/2, y/2)(h(x+y) - h(x+y/2)), \quad (17)$$

因此

$$h(x+y) - h(x) \leq (1 + \rho(x+y/2, y/2))(h(x+y) - h(x+y/2)), \quad (18)$$

从文献[4], p. 85 得到

$$\alpha_x(x, y) > \alpha_y(x, y) \geq \frac{1}{2y} (h(x+y) - h(x+y/2)), \quad (19)$$

联合 (14) 与 (18) 式得到

$$\frac{1}{2y} (h(x+y) - h(x+y/2)) \geq \frac{\alpha_x(x, y)}{2(1 + \rho(x+y/2, y/2))}. \quad (20)$$

取 $X = x - \frac{y}{2}$, $T = \frac{y}{2}$, 从 (16) 式的右端类似地得到

$$h(x) - h(x-y) \leq (1 + \rho(x-y/2, y/2))(h(x-y/2) - h(x-y)). \quad (21)$$

类似于 (19) 与 (20) 式得到

$$\beta_x(x, y) > -\beta_y(x, y) \geq \frac{1}{2y} \left(h\left(x - \frac{y}{2}\right) - h(x-y) \right), \quad (22)$$

$$\frac{1}{2y} \left(h\left(x - \frac{y}{2}\right) - h(x-y) \right) \geq \frac{\beta_x(x, y)}{2(1 + \rho(x-y/2, y/2))}. \quad (23)$$

从 (14) 和 (16) 式得到

$$\rho(x, y)^{-1} \leq \frac{\alpha_x}{\beta_x} = \frac{h(x+y) - h(x)}{h(x) - h(x-y)} \leq \rho(x, y). \quad (24)$$

联合 (19) 与 (20) 式得到

$$\alpha_x/\alpha_y \leq 2(1 + \rho(x+y/2, y/2)). \quad (25)$$

联合 (22) 与 (23) 式得到

$$\beta_x/(-\beta_y) \leq 2(1 + \rho(x-y/2, y/2)). \quad (26)$$

从 (24) 式得到

$$\alpha_x/\beta_x \leq \rho(x, y), \quad \beta_x/\alpha_x \leq \rho(x, y). \quad (27)$$

联合 (15), (25)~(27), (19) 和 (22) 式得到

$$D(z) \leq 8(1 + \rho(x+y/2, y/2))(1 + \rho(x-y/2, y/2))\rho(x, y). \quad (28)$$

显然, 当 $\rho(x, y) = \text{常数}$ 时, (28) 式与文献 [4], p. 85, (6.19) 式一致. 根据定理 2 的假设 $\rho(x, y) \in L^3_{\text{loc}}(H)$, 因此利用 Hölder 不等式易得 $D(z) \in L_{\text{loc}}(H)$. 前面已指出 (13) 式定义一个上半平面到自身的连续可微同胚, 在 $y=0$ 取 $h(x)$. 因此得到 (见文献 [4], p. 45 和 p. 105)

$$H(z, f) = D(z) \in L_{\text{loc}}(H),$$

于是 (13) 式定义一个上半平面到自身的 ID-同胚, 它在 $y=0$ 上取 $h(x)$. 定理证毕.

注 2 1) 如果我们利用文献 [10] 中的有关估计, 则定理 2 中可设 $\rho(x, t) \in L^2_{\text{loc}}(H)$. 若利用其他的估计, 则似乎可设 $\rho(x, t) \in L_{\text{loc}}(H)$. 若闭域 $\overline{D} \subset \overline{H}$, $\rho(x, t) \in L^3(\overline{D})$, 则 $D(z) \in L^3(\overline{D})$.

2) 因为我们已经证明 μ -同胚是 ID-同胚的一个子类, 因此 David 关于 μ -同胚的边界值问题的猜测^[1]

$$M(t)^{-1} \leq \frac{w(x+t) - w(x)}{w(x) - w(x-t)} \leq M(t)$$

中的 $M(t)$, 只要换为定理 2 中的 $\rho(x, t)$, 则他的猜测是真的.

3) 当 $H(z, f) = K = \text{常数}$ 时, 计算指出 (10) 式与文献 [4], p. 81, (6.6) 式一致, 因此我们在第 2 节中引进的 $\rho(x, t)$ 拟对称函数是 Beurling-Ahlfors 的 λ 拟对称函数^[4]的自然拓广, 可称作一维 ID-同胚. 如同 λ 拟对称函数, 它也是有广泛应用的一类函数. 但在本文中, 我们不深入研究它, 而是继续研究广义 Beurling-Ahlfors 扩张 (13) 的性质.

3 加权拟等距性

假设 $h(x)$ 是 $\rho(x, t)$ 拟对称函数, $w = f(z): H \rightarrow H$ 是 Beurling-Ahlfors 扩张 (13). 我们现在研究它在上半平面的 Poincaré 度量下的保距性问题. 众所周知, 当 $\rho(x, t) = \rho = \text{常数}$ 时, 它是拟保距的 (见文献 [10], p. 119):

$$\frac{|df(z)|}{\operatorname{Im} f(z)} \leq C \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}, \quad (29)$$

其中 C 是仅依赖于 ρ 的常数. 可类似地证明, 当 $\rho(x, t)$ 是 x 与 t 的正函数时, 它是加权拟保距的:

$$\begin{aligned} \frac{|df(z)|^2}{(\operatorname{Im} f(z))^2} &\leq 64\rho(x, y) \left(2 + \rho\left(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right) + \rho\left(x - \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right) \right) \\ &\quad \cdot \left(1 + \rho\left(x - \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right) \right)^2 \frac{|dz|^2}{(\operatorname{Im} z)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

事实上, 如同文献[10], (17.21) 式和上一节, 适当选取 $\rho(X, T)$ 中的 X 和 T , 经过冗长细微的计算得到

$$|df|^2 \leq 4\rho(x, y)(2 + \rho(x + y/2, y/2) + \rho(x - y/2, y/2)) J_f |dz|^2, \quad (31)$$

其中 J_f 是 $w=f(z)$ 的 Jacobi 行列式. 利用文献[10], p.119 中的不等式和 $h(x)$ 的 $\rho(x, t)$ 拟对称性可得

$$y^2 J_f \leq \rho(x, t)[h(x) - h(x - y)]^2. \quad (32)$$

令

$$\tilde{h}(t) = [h(x) - h(x - ty)] / [h(x) - h(x - y)]. \quad (33)$$

则 $\tilde{h}(t)$ 是 $\rho(t, T)$ 拟对称的, 而且 $\tilde{h}(0) = 0$, $\tilde{h}(1) = 1$. 由 $h(x)$ 的 $\rho(x, t)$ 拟对称性可得

$$\frac{1}{1 + \rho(x - y/2, y/2)} \leq \tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{\rho(x - y/2, y/2)}{1 + \rho(x - y/2, y/2)}, \quad (34)$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^1 [h(x) - h(x - ty)] dt &= \int_0^1 \tilde{h}(t) dt [h(x) - h(x - y)] \\ &\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \tilde{h}(t) dt [h(x) - h(x - y)] \geq \frac{h(x) - h(x - y)}{2(1 + \rho(x - y/2, y/2))}. \end{aligned}$$

于是由文献[10], p.119 得到

$$\operatorname{Im} f(z) \geq \frac{h(x) - h(x - y)}{4(1 + \rho(x - y/2, y/2))}.$$

代入 (32) 式得到

$$y^2 J_f \leq 16\rho(x, y)(1 + \rho(x - y/2, y/2))^2 (\operatorname{Im} f(z))^2. \quad (35)$$

联合 (31) 与 (35) 式得到 (30) 式.

致谢 对杨乐、李忠等教授的关心和帮助及审者对本文提出的宝贵意见, 均表示衷心感谢.

参 考 文 献

- 1 David G. Solutions de l'équation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$. Ann Acad Sci Fenn, Ser A, I Math, 1988, 13: 25~69
- 2 Lehto O. Univalent Functions and Teichmüller Space. New York: Springer-Verlag, World Publishing Corp, 1990
- 3 La W C. Almost quasiconformal mappings with given boundary values and a complex dilatation bound. Chin Ann of Math, 1988, 9B(2): 179~187
- 4 Lehto O, Virtanen K I. Quasiconformal Mappings in the Plane. New York: Springer-Verlag, 1973
- 5 Reich E. Quasiconformal mappings with prescribed boundary values and a dilatation bound. Arch Rational Mech Anal, 1978, 68: 99~112
- 6 Fang A N. On homeomorphisms with integrable dilatation. In: Yang Le ed. Proceedings of the International Conference on Complex Analysis, Nakai Institute of Mathematics, 1992. Boston: International Press Company, 1994. 36~44
- 7 He C Q. On the existence theorem of quasiconformal homeomorphism. In: Zhuang X T ed. Proceeding of the Symposium on the International Complex Analysis, Xian, 1987. Singapore: World Scientific, 1987. 159~175
- 8 Tukia P. Compactness properties of μ -homeomorphisms. Ann Acad Sci Fenn Ser A, I Math, 1991, 16: 47~69
- 9 Gehring F W. Quasiconformal Mapping, Complex Analysis and its Applications 2. Vienna: Inter. Atomic Agency, 1976. 213~286
- 10 Li Z. Quasiconformal Mappings and Their Applications in Riemann Surfaces. Beijing: Science Press, 1988