中国科学: 数学　2025 年　第 55 卷　第 1 期: 145～168

SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

CrossMark click for updates

综　述

等参理论发展概述

献给彭家贵教授 80 寿辰

葛建全[1*], 钱超[2], 唐梓洲[3], 彦文娇[1]

1. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875;
2. 北京理工大学数学与统计学院, 北京 100081;
3. 南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071

E-mail: jqge@bnu.edu.cn, qianchao_1986@163.com, zztang@nankai.edu.cn, wjyan@bnu.edu.cn

收稿日期: 2024-04-02; 接受日期: 2024-05-28; 网络出版日期: 2024-09-13; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11931007, 12171037, 12271038 和 12371048)、南开智德基金和中央高校基本科研业务费资助项目

摘要　自 Cartan 开创实空间形式中等参超曲面的研究以来, 经历了一个世纪的曲折发展, 等参理论已经与数学及理论物理的多个领域产生了密切联系和交叉渗透. 本文旨在概括性综述等参理论的发展、推广和理论应用.

关键词　等参超曲面　等参函数　极小子流形

MSC (2020) 主题分类　53C12, 53C20, 53C30, 53C40

1　起源简介

Laura [91] 研究 3 维 Euclid 空间中时刻以恒定速度运动的波前 M_t 的几何, 即 $\phi: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y,z,t)\mapsto\phi(x,y,z,t)$ 满足波动方程

$$\phi_{tt}=\Delta\phi$$

且速度 $\frac{ds}{dt}=b(\phi)$ (s 为波前移动的距离) 和梯度模长

$$|\nabla\phi|=a(\phi)$$

在 ϕ 的水平面上均为常数 (a 和 b 是两光滑函数). 由上式可知, 每个时刻的波前 $M_t:=\Phi^{-1}(c)\cap(\mathbb{R}^3\times\{t\})$ 是互相平行的 (类似惠更斯原理), 而且满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial s}\frac{ds}{dt}=a(\phi)b(\phi)=:c(\phi),$$

从而

$$\Delta\phi=\phi_{tt}=c'(\phi)c(\phi).$$

Laura [91] 证明了 M_t 一定是 $\mathbb{R}^3$ 中的平面、圆球面或圆柱面.

英文引用格式: Ge J Q, Qian C, Tang Z Z, et al. An overview of the development of isoparametric theory (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 145–168, doi: 10.1360/SSM-2024-0099

定义 1.1 Riemann 流形 N^{n+1} 上的一个非常值光滑函数 f 称为是超常的 (transnormal), 如果存在光滑函数 b 满足

$$|\nabla f|^2 = b(f).$$

一个超常函数 f 称为等参的 (isoparametric), 如果存在光滑函数 a 满足

$$\Delta f = a(f).$$

等参函数 f 的正则水平集 $M_t^n := f^{-1}(t)$ 称为 Riemann 流形 N^{n+1} 的等参超曲面.

Somigliana [162] 在 $\mathbb{R}^3$ 上证明了超常函数是等参函数的充要条件是其正则水平集具有常平均曲率. 并由此得出结论: $\mathbb{R}^3$ 中的等参超曲面必定是平面、圆球面或圆柱面. 这一结果在 Segre [154] 和 Levi-Civita [95] 的独立重新证明中得到了进一步确认. 后者还证明了在 $\mathbb{R}^3$ 上的超常函数是等参函数的充要条件是其正则水平集具有常主曲率. Segre [155] 将这一分类结果推广到任意维数, 证明了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的等参超曲面是超平面 $\mathbb{R}^n$、圆球面 $\mathbb{S}^n$ 或圆柱面 $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. 同年, Cartan [7] 将此结果推广到双曲空间, 证明了 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的等参超曲面是全脐的 $\mathbb{H}^n$、$\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{S}^n$, 或是有 2 个不同常主曲率的柱面 $\mathbb{S}^k \times \mathbb{H}^{n-k}$.

在具有常截面曲率 c ($c = \pm 1, 0$) 的实空间形式 N_c^{n+1} 中, Cartan 证明了超曲面 M^n 是等参超曲面的充要条件是它及其附近的平行超曲面 M_t 都具有常平均曲率. 换句话讲, M^n 自身具有常主曲率. 记等参超曲面 M^n 的 g 个不同常主曲率为 $\lambda_1 > \cdots > \lambda_g$, 相应重数为 $m_1, \ldots, m_g$ ($m_1 + \cdots + m_g = n$). Cartan 证明了一个基本公式, 称之为 Cartan 恒等式:

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, g.$$

当 $c \leqslant 0$ 时, 由 Cartan 恒等式可得 $g \leqslant 2$, 从而容易得到上述 Euclid 空间和双曲空间中等参超曲面的分类. 然而, 当 $c > 0$ 时, 即在单位球面 $N_c^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$ 中, Cartan 恒等式不能对 g 的取值作出限制. 事实上, Cartan [8,9] 对单位球面中 $g \leqslant 3$ 的等参超曲面进行了分类. 当 $g = 1$ 时, $M = \mathbb{S}^n(r)$ $(0 < r < 1)$ 是坐标函数的正则水平集; 当 $g = 2$ 时, $M = \mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ $(0 < r < 1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上的多项式 $F(u,v) = |u|^2 - |v|^2$ $((u,v) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n-k+1})$ 在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 上限制的正则水平集. 特别地, 对 $g = 3$, Cartan 证明了以下有趣的结果:

定理 1.1 [8,9] $\mathbb{S}^{n+1}$ 中具 3 个不同主曲率的等参超曲面是射影平面 $\mathbb{F}P^2$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 或 $\mathbb{O}$) 到 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 Veronese 嵌入像的常半径管道超曲面, 相应地, 其主曲率重数均为 1、2、4 或 8, 并且是一个 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上的 3 次齐次多项式 F 在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 上限制的正则水平集. F 被称为 Cartan 多项式, 它满足

$$|\nabla F(x)|^2 = 9|x|^4, \quad \Delta F = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

特别地, Cartan 多项式有如下表示:

$$\begin{aligned} F_C(x,y,X,Y,Z) = {} & x^3 - 3xy^2 + \frac{3}{2}x(X\overline{X} + Y\overline{Y} - 2Z\overline{Z}) \\ & + \frac{3\sqrt{3}}{2}y(X\overline{X} - Y\overline{Y}) + \frac{3\sqrt{3}}{2}(XYZ + \overline{ZYX}), \end{aligned}$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}$, $X, Y, Z \in \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 对应于主曲率重数 $m = 1, 2, 4, 8$.

Cartan [8,9] 证明了 $g \leqslant 3$ 的等参超曲面都是齐性的, 即都是紧致 Lie 群等距作用的主轨道. 他在文献 [10] 中进一步研究了 $g = 4$ 且具有相同重数 $m_1 = \cdots = m_4 =: m = 1, 2$ 的情形, 指出 (并构造)

此情形的等参超曲面是 4 次齐次多项式 F (在下一节被称为 Cartan-Münzner 多项式) 在球面上限制的正则水平集. 对于单位球面中的等参超曲面, Cartan 提出了如下 3 个问题:

(1) 不同主曲率个数 g 的可能取值是什么?

(2) 主曲率的重数是否一定都相等?

(3) 等参超曲面是否总是齐性的?

经过 30 年的空白时期, Cartan 遗留的等参理论才重新进入人们研究视野. 首先, Nomizu[123] 构造了重数不同的 $g=4$ 的等参超曲面, 否定回答了 Cartan 的第二个问题. 1975 年, 他在文献 [124] 中详细回顾介绍了 Cartan 对等参理论的奠基性贡献. Hsiang 和 Lawson[76] 以及 Takagi 和 Takahashi[165] 对单位球面中齐性等参超曲面进行了分类, 证明了它们是单连通秩 2 紧致对称空间迷向表示的主轨道, $g=1,2,3,4,6$, 而且最多有 2 个不同重数. Münzner 的著名工作 [118,119] 流传出来, 成为单位球面中等参理论的又一个奠基性突破, 下一节具体介绍.

关于等参理论的详细和系统的讲解, 可参见文献 [4,19] 和 Thorbergsson 的综述 [186,187]. 关于单位球面中等参超曲面的历史和分类理论, 特别推荐 Chi 的优美综述文献 [29].

2 单位球面中等参超曲面

2.1 等参超曲面基本性质: Cartan-Münzner 等参多项式

定理 2.1 [118,119] 设 M^n 是单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中等参超曲面, 记其 g 个不同常主曲率为 $\lambda_1=\cot\theta_1>\cdots>\lambda_g=\cot\theta_g$, $\theta_i\in(0,\pi)$, 相应重数为 $m_1,\dots,m_g$, 则下列结论成立:

(1) M 是一个 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上的 g 次齐次多项式 F 在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 上限制函数 f 的正则水平集或其部分, F 满足 Cartan-Münzner 方程组

$$|\nabla F(x)|^2=g^2|x|^{2g-2},\quad \Delta F=\frac{m_2-m_1}{2}g^2|x|^{g-2},\quad x\in\mathbb{R}^{n+2}.$$

(2) f 的像集为闭区间 $[-1,1]$, 临界值只有 ±1. $M_\pm:=f^{-1}(\pm1)$ 是球面的光滑子流形, 称为焦流形 (focal submanifolds). 沿着焦流形的任意法向, 其主曲率为 $\cot(k\pi/g)$, $k=1,\dots,g-1$.

(3) $M_t:=f^{-1}(t)$ $(t\in(-1,1))$ 均为有 g 个不同主曲率的等参超曲面, 其主曲率重数满足 $m_i=m_{i+2}$ (指标模 2), 且 $\theta_i=\theta_1+\frac{i-1}{g}\pi$.

(4) 等参超曲面 M_t 是焦流形 $M_\pm$ 的管道, 且将球面分解为两个 $M_\pm$ 上的法球体丛, 并且

$$g=1,2,3,4,6.$$

综上可知, 单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中等参超曲面与 Cartan-Münzner 等参多项式在等距同构意义下是一一对应的. 实际上, Cartan-Münzner 多项式 F 在单位球面上的限制 f 是一个等参函数, 满足定义 1.1:

$$|\nabla f|^2=g^2(1-f^2),\quad \Delta f=\frac{m_2-m_1}{2}g^2-g(n+g)f.$$

由定理 2.1(2) 可知, 两个焦流形 $M_\pm$ 是 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的极小子流形 (甚至是严格极小的 (austere)[64]), 这个结果对一般 Riemann 流形中等参函数的焦流形也成立: 全等参函数的焦流形是严格极小的 (参见文献 [59,61,191]). 令 $c_0=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}$, 则 $M_{c_0}=f^{-1}(c_0)$ 恰是这一族等参超曲面 $\{M_t\mid t\in(-1,1)\}$ 中唯一的极小等参超曲面. 更一般地, 正 Ricci 曲率 Riemann 流形的一族等参超曲面中也存在唯一的极小等参超曲面 (参见文献 [59]). 定理 2.1(4) 中等参超曲面是焦流形的管道其实也对一般 Riemann 流形成

立, 甚至对超常函数成立 (参见文献 [191]). (4) 中 $g=1,2,3,4,6$ 是通过巧妙的代数拓扑技巧证明的, Fang[48] 给出了另一证明. 然而, g 的取值至今仍没有几何证明.

2.2 等参超曲面的分类

如前文所述, 单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 $g\leqslant 3$ 或齐性的等参超曲面分别在 1939 年被 Cartan (定理 1.1) 和 1972 年由 Hsiang-Lawson-Takagi-Takahashi 完成了分类 ($g=4,6$ 情形的 Cartan-Münzner 等参多项式将在本节给出, 其余情形可参见文献 [29,60]).

Ozeki 和 Takeuchi[125,126] 用将多项式按一个变量进行分解来研究 $g=4$ 的 Cartan-Münzner 等参多项式, 引入了分类理论中一个重要的条件 (Condition A: 焦流形上某点处所有形状算子的核相同), 由此构造了两个系列的无穷多非齐性的 $g=4$ 的等参超曲面, 否定回答了 Cartan 的第 3 个问题. Ferus 等[49] 推广了 Ozeki-Takeuchi 的构造, 利用 Clifford 代数的表示理论构造了无穷多 $g=4$ 的 Cartan-Münzner 等参多项式, 现被称为 OT-FKM 型等参, 其中包含无穷多非齐性的等参超曲面. $g=4$ 的齐性等参超曲面的主曲率重数对为 $(m_1,m_2)=(1,k-2),(2,2k-3),(4,4k-5),(2,2),(4,5)$ 或 $(6,9)$. 仅有 $(m_1,m_2)=(2,2),(4,5)$ 情形不能表示为 OT-FKM 型等参, 这两个例外的 Cartan-Münzner 等参多项式可如下表示 (参见文献 [161]):

$$
\begin{aligned}
&F(X)=|X|^4-2|X\wedge X|^2,\quad X\in\Lambda^2(\mathbb{F}^5)\cong\mathbb{F}^{10}.\\
&\mathbb{F}=\mathbb{R},\quad 当\ (m_1,m_2)=(2,2)\ 时;\quad \mathbb{F}=\mathbb{C},\quad 当\ (m_1,m_2)=(4,5)\ 时.
\end{aligned}
$$

OT-FKM 型 Cartan-Münzner 等参多项式定义如下:

$$
F(x)=|x|^4-2\sum_{\alpha=0}^{m}\langle P_\alpha x,x\rangle^2,\quad x\in\mathbb{R}^{2l},\tag{2.1}
$$

其中 $\{P_0,\dots,P_m\}$ 为 $\mathbb{R}^{2l}$ 上的对称 Clifford 系统表示, 即 P_α 是 $2l$ 阶实对称正交矩阵, 满足

$$
P_\alpha P_\beta+P_\beta P_\alpha=2\delta_{\alpha\beta}I_{2l}.
$$

P_α 的特征值恰好是 ±1, 其特征空间 $E_\pm(P_\alpha)\cong\mathbb{R}^l$. 适当选取 $E_\pm(P_0)$ 的基, 可建立对称 Clifford 系统与反称 Clifford 代数之间的对应:

$$
P_0=\begin{pmatrix} I_l & 0\\ 0 & -I_l\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix} 0 & I_l\\ I_l & 0\end{pmatrix},\quad P_{\alpha+1}=\begin{pmatrix} 0 & E_\alpha\\ -E_\alpha & 0\end{pmatrix},\quad \alpha=1,\dots,m-1,
$$

其中 $(E_1,\dots,E_{m-1})$ 为 $\mathbb{R}^l$ 上的反称 Clifford 代数表示, 即 E_α 是 l 阶实反称正交矩阵, 满足

$$
E_\alpha E_\beta+E_\beta E_\alpha=-2\delta_{\alpha\beta}I_l.
$$

相应 OT-FKM 型等参超曲面主曲率的重数对为 $(m_1,m_2)=(m,l-m-1)$. 根据 Clifford 代数的表示理论 (详见文献 [29,49]): $l=k\delta(m)$, 其中 $k\geqslant 1$ 为正整数, $\delta(m)$ 是不可约 Clifford 代数表示空间维数, 满足 $\delta(m+8)=16\delta(m)$ 且当 $m=1,\dots,8$ 时取值如表 1 所示.

实际上, 假设 $1\leqslant m_1\leqslant m_2$, (m_1,m_2) 成为 OT-FKM 型等参的重数对当且仅当 m_1+m_2+1 是 $2^{\phi(m_2-1)}$ 的倍数, 其中函数 $\phi(n)$ 表示 1 至 n 之间模 8 余 0、2 和 4 的整数的个数.

表 1　$\delta(m)$ 的取值

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$\delta(m)$	1	2	4	4	8	8	8	8

一般地, 关于 $g=4,6$ 的等参超曲面主曲率重数对的刻画首先由 Abresch [1] 在 1983 年给出. 他在 Münzner 拓扑结构基础上引入射影结构, 从而可应用 Stiefel-Whitney 示性类等工具进行计算. 特别地, 对于 $g=6$ 情形得到了完整刻画: $m_1=m_2=1$ 或 $m_1=m_2=2$. 对于 $g=4$, Grove 和 Halperin [65] 在 $m_1=m_2=:m$ 假设下也得到了 $m=1$ 或 $m=2$. Tang [166] 在 Abresch 的基础上取得更强的必要条件. Fang [47] 取得另一重要进展. 最终, Stolz [163] 在拓扑意义上得到了重数的分类: $(m_1,m_2)=(2,2),(4,5)$, 或者是 OT-FKM 型等参的重数对.

在 Abresch 工作基础上, 对 $g=6$ 且 $m_1=m_2=1$ 的情形, Dorfmeister 和 Neher [40] 引入了代数三元系统研究 $\mathbb{R}^8$ 上 6 次 Cartan-Münzner 等参多项式, 从而证明了这种情形是齐性的. Miyaoka [112] 证明了 $g=6$, $m_1=m_2=1$ 的等参超曲面与 $g=3$, $m_1=m_2=1$ 的等参超曲面之间存在 Hopf 映射. 对 $g=6$ 且 $m_1=m_2=2$ 的情形, Miyaoka [113, 115] 在 2013–2016 年通过验证焦流形 $M_\pm$ 每点处都满足条件 Condition A, 证明了这种情形也是齐性的. 利用例外单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_2$ 的反 Hermite 矩阵表示 $X\in\mathfrak{g}_2\cong\mathbb{R}^{14}$ 的 Cartan 分解 $X=K+\sqrt{-1}x$ (K 为实反称矩阵, $x\in\mathbb{R}^8$ 为实对称矩阵), Peng 和 Hou [130] (参见文献 [60]) 简洁地将这两个 $g=6$ 等参超曲面相应的 Cartan-Münzner 等参多项式 F_m ($m=1,2$) 表示为 $F_1(x):=18\mathbf{tr}x^6-\frac{5}{4}(\mathbf{tr}x^2)^3$ 和 $F_2(X):=18\mathbf{tr}X^6-\frac{5}{4}(\mathbf{tr}X^2)^3$. 综上所述, $g=1,2,3,6$ 的等参超曲面都是齐性的, 超曲面及其 Cartan-Münzner 等参多项式在等距同构意义下已被完整分类.

对于 $g=4$ 的情形, 根据重数对的刻画, Cecil 等 [16] 在 2007 年系统地研究了等参超曲面及其焦流形的第二基本形式, 应用精妙的代数几何方法证明了, 除了 $(m_1,m_2)=(3,4),(4,5),(6,9),(7,8)$ 情形之外, $g=4$ 的等参超曲面都是齐性的或 OT-FKM 型的. Immervoll [86] 给出了该结果的另一证明. 之后, Chi [26–28] 对上述 4 种例外情形分别进行了验证, 彻底完成了 $g=4$ 的等参超曲面的分类: 它们都是齐性的或 OT-FKM 型的.

2.3　等参超曲面及其焦流形的几何拓扑

首先, 利用球面被等参超曲面拆分为两个焦流形法球体丛, Münzner [118, 119] 已计算出它们的上同调环并由此给出 g 的取值.

定理 2.2 [118, 119]　设紧致超曲面 M^n 将球面拆分为 $\mathbb{S}^{n+1}=B_{-1}\cup_M B_1$, 其中 B_k ($k=\pm1$) 是以 M 为边界的 $n+1$ 维流形, 且微分同胚于 $n-m_k$ 维紧致流形 M_k 的光滑 $\mathbb{B}^{m_k+1}$ 球体丛. 如果 $M_{\pm1}$ 都可定向, 令系数环 $R=\mathbb{Z}$, 否则 $R=\mathbb{Z}_2$. 则

$$H^q(M_k)=\begin{cases}R, & \text{当 } q\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ m_1+m_{-1}),\quad 0\leqslant q<n \text{ 时},\\ R, & \text{当 } q\equiv m_{-k}\ (\mathrm{mod}\ m_1+m_{-1}),\quad 0\leqslant q<n \text{ 时},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$H^q(M)=\begin{cases}R, & \text{当 } q=0,n \text{ 时},\\ H^q(M_1)\oplus H^q(M_{-1}), & \text{当 } 0<q<n \text{ 时},\end{cases}$$

$$g:=\frac{2n}{m_1+m_{-1}}=\frac{1}{2}\dim_R H^*(M)\in\{1,2,3,4,6\}.$$

由于齐性的等参超曲面及其焦流形均是单连通秩 2 紧致对称空间迷向表示的轨道, 等距群作用已完全分类, 因此其几何拓扑已十分清楚. 我们更多地考虑非齐性的等参超曲面及其焦流形, 它们均属于 $g=4$ 的 OT-FKM 型等参, 其 Cartan-Münzner 等参多项式由 (2.1) 给出. 这种 OT-FKM 型等参的焦流形可如下表示:

$$\begin{aligned}
M_+ &= F^{-1}(1)\cap \mathbb{S}^{2l-1} = \{x\in \mathbb{S}^{2l-1} \mid \langle P_0x,x\rangle=\cdots=\langle P_mx,x\rangle=0\},\\
M_- &= F^{-1}(-1)\cap \mathbb{S}^{2l-1} = \left\{x\in \mathbb{S}^{2l-1} \,\middle|\, \sum_{\alpha=0}^{m}\langle P_\alpha x,x\rangle^2=1\right\}\\
&= \{x\in \mathbb{S}^{2l-1} \mid \exists Q_0\in \Sigma(P_0,\dots,P_m), Q_0x=x\},
\end{aligned}$$

其中 $\Sigma(P_0,\dots,P_m)=\mathbb{S}^m$ 是 $\mathrm{Span}\{P_0,\dots,P_m\}$ 中的单位球面, 称为 Clifford 球面. 记特征空间 $E_+(P_0)\cong \mathbb{R}^l$ 的单位球面为 $SE_+(P_0)=\mathbb{S}^{l-1}$, 则

$$\begin{aligned}
\pi_+ : M_+ &\to \mathbb{S}^{l-1}=SE_+(P_0),\\
x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x+P_0x),\\
\pi_- : M_- &\to \mathbb{S}^m=\Sigma(P_0,\dots,P_m),\\
x &\mapsto \sum_{\alpha=0}^{m}\langle P_\alpha x,x\rangle P_\alpha =: Q_0.
\end{aligned}$$

利用上述映射 π_+ 和 π_-, 可以分别说明: M_+ 是 $\mathbb{S}^{l-1}$ 上的 $\mathbb{S}^{l-m-1}$ 丛, 其纤维同构于 $\mathbb{S}^{l-m-1}\subset \mathrm{Span}\{y,E_1y,\dots,E_{m-1}y\}^\perp\subset E_+(P_0)$ (详见文献 [192]); M_- 是 $\mathbb{S}^m$ 上的 $\mathbb{S}^{l-1}$ 丛, 其纤维恰是 $SE_+(Q_0)=\mathbb{S}^{l-1}$ (详见文献 [49]). 容易验证 $\{P_0x,\dots,P_mx\}$ 是 M_+ 法丛的整体单位正交标架, 因此 M_+ 法丛平凡, 从而由于等参超曲面 M 是 M_+ 的管道, 所以 $M\cong M_+\times\mathbb{S}^m$. 焦流形 $M_\pm$ 作为球面上的球面丛的进一步拓扑性质, 如同伦等价、同胚和微分同胚 (下面均记为 $\cong$) 意义下是否是平凡丛、可平行性和 Lusternik-Schnirelmann category 数等, 可参见文献 [146, 192].

定理 2.3 [146] OT-FKM 型等参焦流形 $M_+\cong \mathbb{S}^{l-1}\times\mathbb{S}^{l-m-1}$ (等参超曲面 $M\cong \mathbb{S}^{l-1}\times\mathbb{S}^{l-m-1}\times\mathbb{S}^m$) 当且仅当 $(m_1,m_2)=(1,2),(2,1),(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)^I$, 其中 $(m=4k,m_2)^I$ 表示相应的 Clifford 系统是不定的, 即 $P_0P_1\cdots P_m\neq \pm I_{2l}$.

定理 2.4 [146, 192] OT-FKM 型等参焦流形 $M_-\cong \mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^{l-1}$ $(l=k\delta(m))$ 当且仅当

(1) $m\equiv 3,5,6,7 \pmod 8$, 或

(2) $m\equiv 1,2 \pmod 8$ 时 k 是偶数, 或

(3) $m\equiv 0 \pmod 4$ 时, $q\equiv 0 \pmod{d_m}$ (此时只有同伦等价), 或 $q=0$ (此时微分同胚), 其中 $2q\delta(m)=\mathbf{tr}(P_0P_1\cdots P_m)$, d_m 是 $\frac{1}{4}B_{m/4}$ 的分母, $B_{m/4}$ 是第 $m/4$ 个 Bernoulli 数.

关于等参超曲面 M^n 和焦流形 $M_\pm$ 在诱导度量下的曲率, 包括截面曲率 K、Ricci 曲率 Ric、数量曲率 R 以及法数量曲率 $\rho^\perp$ 的估计问题, 可参见文献 [62, 146], 下面摘述部分.

由定理 2.1 易知, 等参超曲面 M^n 和焦流形 $M_\pm$ 的数量曲率 R 均为常数. 特别地, 极小等参超曲面 M_{c_0} 的第二基本形式模长平方 $S\equiv(g-1)n$, 这支撑着陈省身猜想: 单位球面中极小常数量曲率超曲面的数量曲率取值是离散的; 单位球面中极小常数量曲率超曲面是等参超曲面 (参见文献 [57, 177]).

当 $g\leqslant 2$ 时, 等参超曲面 M^n 是 $\mathbb{S}^n(r)$ 或 $\mathbb{S}^k(r)\times\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$, 显然截面曲率非负; 当 $g\geqslant 3$ 时,

容易计算

$$K(e_1,e_g)=1+\lambda_1\lambda_g=\frac{(1+\cot^2\theta_1)\cot\frac{\pi}{g}}{\cot\frac{\pi}{g}-\cot\theta_1}<0,$$

其中 e_1 和 e_g 分别是主曲率 λ_1 和 λ_g 的主方向, 从而等参超曲面 M^n 的截面曲率不是非负的.

当 $g\leqslant 3$ 时, 焦流形 $M_\pm$ 是点、球面或射影平面 $\mathbb{F}P^2$ ($\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$), 从而截面曲率非负.

定理 2.5 [146] (1) 当 $g=4$ 时, 等参焦流形 $M_\pm$ 具有非负截面曲率当且仅当焦流形是下述三种情形之一:

(i) OT-FKM 型的 M_+, 且 $(m_1,m_2)=(2,1),(6,1),(4,3)^D$, 其中 $(4k,m_2)^D$ 表示相应的 Clifford 系统是确定的, 即 $P_0P_1\cdots P_m=\pm I_{2l}$;

(ii) OT-FKM 型的 M_-, 且 $(m_1,m_2)=(1,l-2)$;

(iii) 齐性的 $(m_1,m_2)=(2,2)$ 等参族中的焦流形 $\widetilde{G}_2(\mathbb{R}^5)$ (定向 Grassmann 的 Plücker 嵌入像).

(2) 当 $g=6$ 时, 等参焦流形 $M_\pm$ 的截面曲率不是非负的.

关于 Ricci 曲率, Qian 等 [146] 证明了, 当 $g\geqslant 3$ 且有一个主曲率重数为 1 时, 等参超曲面 Ricci 曲率不是非负的; 当 $g=3,4$ 且主曲率重数均大于 1 时, 极小等参超曲面 M_{c_0} 附近的 M_t 的 Ricci 曲率都是正的; 当 $g=6$ 且主曲率重数为 2 时, 极小等参超曲面 M_{c_0} 附近的 M_t 的 Ricci 曲率都不是非负的.

考虑等参族 $\{M_t\}$ 中的等参超曲面 M^n_c, 它是 Einstein 流形当且仅当 $g\leqslant 2$ 且 $M_c\neq\mathbb{S}^1(r)\times\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$; 当 $g\geqslant 3$ 时, M_c 都是积分 Einstein 流形 (Einstein 流形的一种推广, 详见文献 [52]). 考察 Einstein 流形的另一种推广—Ricci 张量平行的流形, Gray 定义了更加广泛的 $\mathcal{A}$ 流形和 $\mathcal{B}$ 流形, 并证明了 Ricci 平行等价于 $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. 根据文献 [89], 等参超曲面仅在 $g\leqslant 3$ 时是 $\mathcal{A}$ 流形, 且仅在 $g\leqslant 2$ 时是 Ricci 平行的. 针对 $g=4$ 的等参焦流形 $M_\pm$, Tang 和 Yan [173] 及 Li 和 Yan [99] 证明了它们都是 $\mathcal{A}$ 流形. 文献 [173] 还对 Ricci 平行的 $M_\pm$ 进行了分类. 基于此, 文献 [173] 为 Besse 在其著名专著 *Einstein Manifolds* 中一个挑战性问题给出一系列单连通的例子. 之后, Peng 和 Qian [131] 进一步研究了这类广义 Einstein 流形. 当 $g=6$ 时, Li 和 Yan [99] 证明了每个等参族中只有一个焦流形是 $\mathcal{A}$ 流形, 但都不是 $\mathcal{B}$ 流形.

此外, 文献 [142, 171, 195] 证明了单位球面中的等参族的焦流形都是 Willmore 子流形 (广义 Willmore 泛函的临界子流形). 由于极小浸入到球面的 Einstein 流形是 Willmore 的, 文献 [142] 对 $g=4$ 的焦流形哪些是 Einstein 的进行了分类.

对于齐性的等参焦流形, 法数量曲率 $\rho^\perp:=|R^\perp|^2$ 均为常数. 然而, 对于 OT-FKM 型等参焦流形 (大多为非齐性的), 我们有已知的 DDVV 不等式 (参见文献 [56])

$$\rho^\perp\leqslant 4m_2^2(m_1+1)^2.$$

在等参焦流形上, DDVV 不等式等号处处成立 (即是 Wintgen 理想子流形) 当且仅当 $M_+\cong M_-\cong\mathbb{R}P^2\subset\mathbb{S}^4$, 即 $g=3$, $(m_1,m_2)=(1,1)$; 或 $M_+\cong SO(3)\subset\mathbb{S}^5$, 即 $g=4$, $(m_1,m_2)=(1,1)$ (详见文献 [62]). 对于 OT-FKM 型等参焦流形, Ge 等 [62] 取得了法数量曲率的另一个比 DDVV 不等式更精确的上界和两个下界:

$$2m_1m_2(m_1+1)\leqslant\rho^\perp\leqslant 8m_1m_2(m_1+1),\tag{2.2}$$

$$\rho^\perp\geqslant 2m_1m_2(m_1+1)+\frac{6m_1m_2(m_1+1)}{2m_2+m_1}(2m_2-m_1-2).\tag{2.3}$$

(2.2) 中上界等号取到的点刻画 Condition A, 点集记为 C_A; (2.2) 中下界等号取到的点刻画第二基本形式平行, 点集记为 C_P; (2.3) 中下界等号取到的点刻画 Einstein 条件, 点集记为 C_E. 文献 [62] 对子集 C_A、C_P 和 C_E 进行了完整分类 (参见文献 [62, 表 1 和 2]).

3 等参理论的几种推广

3.1 一般 Riemann 流形中等参超曲面

根据定义 1.1, 一般 Riemann 流形 N^{n+1} 上等参函数的正则水平集即为等参超曲面, 不同于实空间形式, 此时等参超曲面没有 Cartan 定理—实空间形式中超曲面是等参的当且仅当其具有常主曲率. 容易证明: 超常函数的正则水平集是相互平行的超曲面, 一个超曲面是等参超曲面当且仅当它及附近的平行超曲面具有常平均曲率. Wang[191] 进一步证明了类似 Münzner 的结构定理: 超常函数的像集为一个区间, 其端点 (若存在最大值最小值) 的逆像记为 $M_\pm$, 它们是光滑子流形 (可能不连通), 称为焦流形; 区间的内点均是正则值, 其水平集 M^n 是焦流形 $M_\pm$ 的常半径管道超曲面. 完备流形等参函数的焦流形是极小子流形 (参见文献 [59]); 球面和 Euclid 空间的超常函数是局部等参的, 其正则水平集是等参超曲面, 双曲空间存在非等参的超常函数.

Ge 和 Tang[58] 引进了正则 (proper) 超常或等参函数, 即焦流形余维数大于等于 2 的超常或等参函数. 它们的水平集均是连通的. 文献 [58] 提出了几种等参函数构造方式, 并在 7 维 Gromoll-Meyer 怪球面上构造了一个以两点为焦流形的超常函数. 利用等参的拓扑结构, 即紧致单连通流形 N^{n+1} 被正则超常函数分解为两个焦流形的法球体丛的并 (称之为 DDBD (double disk bundle decomposition) 结构):

$$N^{n+1}=D(\nu M_-)\bigcup_M D(\nu M_+),\tag{3.1}$$

他们证明了 4 维光滑 Poincaré 猜想在有正则超常函数假设下成立:

定理 3.1[58] 假设 4 维同伦球面 Σ^4 上存在某度量, 使得其上存在一个正则超常函数, 则 Σ 一定微分同胚于标准球面 $\mathbb{S}^4$.

对于具有 DDBD 结构的紧致流形 N^{n+1}, 或等价地, N^{n+1} 上存在 Morse-Bott 函数 f 且 f 的临界点集 $M_\pm$ 的余维数大于等于 2, Qian 和 Tang[140] 证明了下述基本定理:

定理 3.2[140] 假设紧致流形 N^{n+1} 上存在一个 Morse-Bott 函数 f, 其临界点集 $M_\pm$ 的余维数大于等于 2. 则在 N^{n+1} 上存在一个 Riemann 度量, 使得 f 是一个正则等参函数, 并且焦流形 $M_\pm$ 是全测地子流形.

文献 [140] 还在同伦球面 (怪球面) 上构造了大量与标准单位球面具有相同焦流形的等参例子, 部分验证了 Ge 和 Tang[58] 的问题: 在 4 维以外的同伦球面上是否都存在等参超曲面, 其焦流形与标准单位球面中的一致? 应用 Qian 和 Tang 的基本构造定理 (定理 3.2), Ge[50] (定理 3.3) 完整回答了这个问题. 正则等参 (超常) 函数的水平集构成 Riemann 流形 N^{n+1} 上的一个叶状分层结构 $(N^{n+1},\mathcal{F})$, 称之为等参叶状结构. 如果两个等参叶状结构之间存在保持叶子的微分同胚, 则它们被称为等价的. 需要注意的是, 两个等参叶状结构可以在不同的 Riemann 度量下存在, 这种等价微分同胚不一定是等距的. 因此, 对于紧致流形中的等参叶状结构, 在等价的意义下进行分类比在某个固定度量下分类更为复杂.

定理 3.3 [50] 同伦球面 Σ^n $(n \neq 4)$ 上的等参叶状结构等价类全体 $\{[\Sigma^n, \mathcal{F}_\Sigma]\}$ 与标准球面上的等参叶状结构等价类全体 $\{[\mathbb{S}^n, \mathcal{F}_S]\}$ 存在一一对应, 两者的等参超曲面和焦流形及其法丛都相同 (尽管整体 Σ^n 不微分同胚于 $\mathbb{S}^n$).

文献 [50] 还在标准球面上 (因而在同伦球面上) 构造了许多新的等参叶状结构, 其等参超曲面和焦流形不微分同胚于单位圆球度量下已经分类的那些等参超曲面和焦流形, 但这些例子仍是拓扑同胚的, 因此不是方复全问题[48]— 同伦球面中等参超曲面和焦流形是否与单位球面中的拓扑同胚?—的反例. 因此, 标准球面上的等参叶状结构等价类全体 $\{[\mathbb{S}^n, \mathcal{F}_S]\}$ 的分类问题仍是一个困难未解问题. 在焦流形为两个点的情形, Ge[50] 给出了部分分类结果.

定理 3.4 [50] (1) $\mathbb{S}^n$ $(n \neq 5)$ 具有唯一的等参叶状结构等价类, 使得其焦流形为两个点;

(2) 当且仅当 $\mathbb{S}^4$ 上保定向微分同胚群 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^4)$ 只有 1 个连通分支时, $\mathbb{S}^5$ 具有唯一的等参叶状结构等价类, 使得其焦流形为两个点.

$\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^4)$ 的结构甚至其连通分支个数至今仍神秘未解, 定理 3.4 给出了一个几何刻画.

应用 Qian 和 Tang 的基本构造定理 (定理 3.2), Ge 和 Radeschi[55] 对所有 4 维紧致单连通 Riemann 流形上的等参叶状结构等价类进行了完整分类 (文中含列表), 并对含有奇异 Riemann 叶状结构的 4 维紧致单连通 Riemann 流形在微分同胚意义下进行了分类.

定义 3.1 Riemann 流形 N 上的一个分层 $\mathcal{F}=\{L \mid L$ 是 N 中互不相交的连通子流形, 称为叶子$\}$ 且 $N = \bigcup_{L\in\mathcal{F}} L$, 称为奇异 Riemann 叶状结构 (singular Riemannian foliation) (最大维数的叶子的余维数称之为奇异 Riemann 叶状结构的余维数), 如果它满足以下两点:

(1) 任意叶子的法向测地线与其他叶子相交时为正交 (仅满足这一条件的分层称为超常系统);

(2) 存在一组光滑向量场, 在每点处张成该点处叶子的切空间 (仅满足这一条件的称为奇异叶状结构).

定理 3.5 [55] (1) 4 维紧致单连通 Riemann 流形 N 如果具有正则超常函数 (等价地, 有 DDBD 结构, 或余维 1 奇异 Riemann 叶状结构, 或正则等参结构), 则 N 微分同胚于下列 5 个流形之一: $\mathbb{S}^4$、$\mathbb{C}P^2$、$\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{C}P^2\#\pm\mathbb{C}P^2$.

(2) 4 维紧致单连通 Riemann 流形 N 如果具有奇异 Riemann 叶状结构, 则 N 微分同胚于下列流形的若干连通和: $\mathbb{S}^4$、$\pm\mathbb{C}P^2$ 和 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$.

定理 3.5 第一部分推广了定理 3.1, 其中的 5 个 4 维紧致单连通流形恰好是已知仅有的具有非负截面曲率的 4 维紧致单连通流形, 这为 Grove 猜想—具有非负截面曲率的 4 维紧致单连通流形具有 DDBD 结构—提供了有力支撑.

关于奇异 Riemann 叶状结构, Radeschi 与其合作者有许多进展结果和应用成果. 例如, 文献 [147] 利用 Clifford 代数构造了单位球面中系列非齐性的奇异 Riemann 叶状结构; Alexandrino 和 Radeschi[2] 证明了 Molino 猜想—奇异 Riemann 叶状结构的闭包仍为奇异 Riemann 叶状结构; Liu 和 Radeschi[104] 研究了 Riemann 对称空间中的极叶状结构 (polar foliation, 是指奇异 Riemann 叶状结构中每点都包含在一个与所有叶子正交的全测地子流形中), 证明了非负截面曲率单连通对称空间的极叶状结构是等参叶状结构, 并应用此结果证明了其上的平均曲率流的解是古老解, 从而推广了 Liu 和 Terng[105, 106] 的结果.

3.2 Riemann 对称空间中等参超曲面

研究固定度量下的 Riemann 流形中等参超曲面, 除了经典的实空间形式, 最受关注的靶空间就是

Riemann 对称空间.

早在 20 世纪 80 年代, Wang [189] 就研究了复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 中的等参超曲面, 并发现其中存在主曲率不是常值的等参超曲面, 同时证明了 Hopf 等参超曲面是齐性的, 从而具有常主曲率. Ge 等 [61] 引入了 Riemann 流形 N^{n+1} 中 k- 等参超曲面的概念—超曲面及其附近的平行超曲面具有常值的 1 阶至 k 阶平均曲率, 用以衔接一般常平均曲率等参超曲面 (1- 等参) 到常主曲率等参超曲面 (n- 等参, 称之为全等参超曲面), 并特别研究了 Riemann 对称空间中的等参超曲面, 得到了许多分类和刚性结果. 特别地, 对于秩 1 的 Riemann 对称空间中等参超曲面, 有以下结果:

定理 3.6 [61] (1) $\mathbb{C}P^{2n}$ 中等参超曲面都是齐性的全等参超曲面 (从而已经完成了分类).

(2) $\mathbb{C}P^{2n+1}$ 中存在 2- 等参但非 3- 等参超曲面, 满足 3 阶平均曲率为常值的 1- 等参超曲面是齐性的全等参超曲面.

(3) 在局部秩 1 的 Riemann 对称空间中, 3- 等参超曲面一定是 5- 等参超曲面. 特别地, 复空间形式中 3- 等参超曲面一定是全等参的.

(4) 在局部秩 1 的 Riemann 对称空间中, 如果曲率适应 (Hopf) 的超曲面具有常主曲率或者它本身是等参超曲面, 那么它一定是全等参超曲面. 特别地, 复双曲空间 $\mathbb{C}H^n$ 中的 Hopf 等参超曲面是齐性的全等参超曲面 (从而已经完成了分类).

利用秩 1 的 Riemann 对称空间的 Lie 代数技巧, Domínguez 和 Vázquez[36] 对 $\mathbb{C}P^n$ $(n \neq 15)$ 中的等参叶状结构进行了分类, 其中包括高余维非齐性等参子流形. 同时, Domínguez-Vázquez 和 Gorodski[37] 对 $\mathbb{H}P^n$ $(n \neq 7)$ 中的等参叶状结构分类, 其中包括高余维非齐性等参子流形. Díaz-Ramos 等 [35] 完整分类了 $\mathbb{C}H^n$ 中的等参超曲面, 发现存在无穷多非齐性的非常主曲率的等参超曲面. 此外, Díaz-Ramos 等 [34] 完整分类了 $\mathbb{H}H^n$ 中的齐性的等参超曲面, 并证明了存在无穷多常主曲率的非齐性等参超曲面. Díaz-Ramos 等 [33] 研究了非紧高秩对称空间中的余齐性 1 作用, 即齐性等参超曲面, 对 SL_n/SO_n 中的余齐性作用进行了分类. 此外, Domínguez-Vázquez 和 Sanmartín-López [38] 研究了非紧高秩对称空间中的无穷多非齐性等参超曲面, 其焦流形不是严格极小的. 相关的分类工作仍在积极进行中.

另外, Terng 和 Thorbergsson [183] 引入了紧致 Riemann 对称空间中等焦子流形, 并证明其具有奇异 Riemann 叶状结构和与单位球面中等参超曲面相似的几何性质; Tang [167] 研究了等焦超曲面对应的焦流形的余维数对, 特别是在八元数射影平面 CaP^2 中的情形, 这是唯一在 CaP^2 中与等参超曲面相关的结果.

3.3 空间形式中 Dupin 超曲面

关于 Dupin 超曲面的研究历史和现状以及研究方法, 可参见文献 [12–14, 19, 186] 以及其引用的相关文献. 下面综述一些重点和最新进展.

超曲面的曲率曲面是其主曲率分布的积分子流形. 在空间形式中, 如果一个超曲面沿着每个曲率曲面相应的主曲率是常数, 则称其为 Dupin 超曲面. 而当不同主曲率个数 g 为常数时, 称其为正则 (proper) Dupin 超曲面. 因此, 空间形式中的等参超曲面都是正则 Dupin 超曲面.

由于 Möbius 变换保持 (正则) Dupin 性质, 可以只考虑单位球面中的 Dupin 超曲面. 实际上, (正则) Dupin 性质在更一般的 Lie 球变换群下保持不变. 简单地, 任意 Lie 球变换 α 可表示为 $\alpha = \phi P_t \psi$ (参见文献 [15]), 其中 ϕ 和 ψ 是 Möbius 变换, 而 P_t 是 Euclid、球面或双曲空间中的平移. 因此, Lie 球几何是研究 Dupin 超曲面的合适理论和工具. 然而, Lie 球几何需要考虑切触空间 $(\Lambda^{2n-1} \cong T_1\mathbb{S}^n)$ 中的 $n-1$ 维 Legendre 子流形, 具体的计算仍需结合空间形式中的子流形几何.

Pinkall[138] 系统地研究了 Dupin 超曲面, 引入了 4 种 (在 Lie 球等价意义下是 3 种) 构造方法. 这些方法允许通过已知的 Dupin 超曲面经过柱面、旋转、管道 (或锥化) 构造更高维数的 Dupin 超曲面. 通过这些构造方法得到的与原始超曲面 Lie 球等价的 Dupin 超曲面被称为可约的, 否则称为不可约的. 利用这些构造方法, 可以得到具有任意主曲率个数 g 及任意重数的正则 Dupin 超曲面. Cecil 等[17] 证明了 $g>2$ 的紧致正则 Dupin 超曲面是不可约的. Thorbergsson[184] 证明了紧致正则 Dupin 超曲面 M 是套紧的 (taut), 即每个非退化距离函数 $L_p(x)=d(p,x)^2$ 的临界点数为最小值 Betti 数和, 从而证明了 M 像等参情形那样将球面分解为两个焦流形的球体丛. 因此, Münzner[118,119] 和 Stolz[163] 的拓扑方法同样适用于此情形. 换言之, Thorbergsson[184] 证明了, 紧致正则 Dupin 超曲面的不同主曲率个数 $g=1,2,3,4,6$, 且其重数与等参情形相同.

一个自然的猜测是, 所有紧致正则 Dupin 超曲面都与等参超曲面在 Lie 球等价意义下相同. 当 $g=1$ 时, 这一猜测显然成立. 当 $g=2$ 时, Cecil 和 Ryan[18] 证明了这一猜测成立 (它们是 Möbius 等价的). 当 $g=3$ 时, Miyaoka[111] 证明了这一猜测成立 (它们 Lie 球等价, 但不一定 Möbius 等价). 然而, 当 $g=4$ 时, Pinkall 和 Thorbergsson[139] 以及 Miyaoka 和 Ozawa[116] 分别构造了这一猜测的反例. 当 $g=6$ 时, Miyaoka 和 Ozawa[116] 也构造了反例. 这些反例的 Lie 曲率 (由主曲率的交错商定义, 是 Lie 球变换的不变量) 不是常数, 而在等参情形下, Lie 曲率是常数.

Cecil 等[17] 在上述猜测的基础上增加了 Lie 曲率为常数的条件以提出修改版的猜想, 即 CCJ 猜想: 对于 $g=4$ 或 $g=6$ 的紧致正则 Dupin 超曲面, 如果具有常 Lie 曲率, 则其与等参超曲面是 Lie 球等价的. Cecil 等[17] 证明了, 对于 $g=4$ 的紧致或不可约的正则 Dupin 超曲面, 如果具有常 Lie 曲率且主曲率重数中有一个重数为 1, 则它 Lie 球等价于等参超曲面. Li 等[103] 证明了, 对于 $g\geqslant 3$ 的正则 Dupin 超曲面, 如果其具有常 Möbius 曲率, 则它在 Möbius 等价意义下与等参超曲面或其锥相同, 从而在常 Möbius 曲率条件下证明了紧致或不可约正则 Dupin 超曲面都在 Möbius 等价意义下与等参超曲面相同. 最近, 李同柱和王长平取得了新的突破, 证明了对于 $g=4$ 的正则 Dupin 超曲面, 如果其具有常 Lie 曲率且主曲率重数均大于 1, 则它在 Lie 球等价意义下与 $g=4$ 的等参超曲面或 $g=3$ 的等参超曲面的锥相同, 从而完整地证明了 CCJ 猜想在 $g=4$ 的情形及其不可约版本.

另外, Thorbergsson[186] 在 2000 年 *Handbook of Differential Geometry* 中的著名综述文章提出了一个重要问题: 不可约正则 Dupin 超曲面的不同主曲率个数 $g=1,2,3,4,6$ 以及其重数是否与等参情形相同? 等参超曲面由 Münzner 定理确定为紧致等参超曲面或其部分, 而正则 Dupin 超曲面却不一定. 对 Thorbergsson 问题的一个正面的回答将极大地促进 Dupin 超曲面的分类. 然而, 最近 Ge 和 Zhou[64] 构造了 3 个 $g=5$ 的不可约正则 Dupin 超曲面 $\widetilde{B}_{4,\mathbb{F}}\subset\mathbb{S}^{6m+2}$, 其重数分别为 m、m、m、m 和 $2m+1$, 其中 $m=1,2,4$ 对应 $\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$, 否定了 Thorbergsson 的问题. $\widetilde{B}_{4,\mathbb{F}}$ 是模长为 1 的 4 阶 $\mathbb{F}$ 系数的可逆严格极小矩阵全体 (严格极小矩阵是指特征值正负成对出现的实对称矩阵、复数或四元数 Hermite 矩阵). 有趣的是, 模长为 1 的 3 阶 $\mathbb{F}$ 系数的严格极小矩阵全体 $\mathcal{B}_{3,\mathbb{F}}$ 恰好是 $g=3$ 的 Cartan 极小等参超曲面 (对应主曲率重数为 1、2 和 4), 而一般的 $\mathcal{B}_{n,\mathbb{F}}$ ($n>4$ 时是高余维子流形) 都是球面中法丛平坦的严格极小子流形, 即每个法向的形状算子可由严格极小矩阵表示. 因此, 正则 Dupin 超曲面的分类问题仍是一个非常有挑战性的问题.

3.4 单位球面中 Möbius 等参超曲面

由共形几何出发, 王长平、李海中、郭震、胡泽军、李兴校、李同柱、刘会立和马翔等研究了单位球面中等参超曲面的各种推广, 包括 Möbius 等参超曲面、Möbius 齐性超曲面、常 Möbius 曲率超曲

面、Blaschke 等参超曲面和 Laguerre 等参超曲面等 (参见文献 [66,79–85,96–98,100–102,110,122,188]).

在单位球面中, 一个超曲面称为 Möbius 等参超曲面, 如果其 Möbius 形式消失且 Möbius 主曲率为常数. 根据定义, Möbius 等参超曲面在 Möbius 变换下保持不变, 而经典等参超曲面显然是 Möbius 等参超曲面. 实际上, 这些推广的等参超曲面与第 3.3 小节的 Dupin 超曲面密切相关. 例如, Rodrigues 和 Tenenblat [148] 证明了, 在单位球面中, 一个定向超曲面是 Möbius 等参超曲面当且仅当它是具有常 Möbius 曲率的正则 Dupin 超曲面. 因此, 人们更多地关注正则 Dupin 超曲面的分类问题.

3.5 Finsler 等参超曲面

Finsler 几何是陈省身先生晚年特别提倡的一个重要研究领域, 是 Riemann 几何的重要推广 (参考经典教材 [3,156]). 近年来, 沈一兵和沈忠民倡导在 Finsler 流形中建立和研究等参理论, 自 2016 年以来已经涌现了一系列研究进展成果 (参见文献 [22,23,39,67–71,197–199,203]).

在 Finsler 流形 (M,F) 上, 没有 Riemann 情形那样统一的体积测度, 一般采用多种方式来定义体积形式及相应超曲面的平均曲率. 一个函数 f 的梯度 ∇f 是利用 Legendre 变换来定义的 ($\nabla f = \mathfrak{L}^{-1}(df)$), 而 Laplace Δf 须在给定测度 $d\mu$ 下用散度定义 ($\Delta f = \mathrm{div}\nabla f$). 一般而言, Finsler 流形 $(M,F,d\mu)$ 上的 Laplace 算子和梯度算子是非线性的, 而且通常没有显式表达式, 即使在特殊情形 (如 Randers-Minkowski 空间中) 它们的计算也十分复杂, 甚至 Δf 只在 $df \neq 0$ 处有定义. 尽管如此, 类似于 Riemann 情形 (1.1), He 等 [70] 引入了 Finsler 几何中的等参理论.

定义 3.2 在 Finsler 流形 $(M,F,d\mu)$ 上, 一个非常值的光滑函数 f 称为是超常的 (transnormal), 如果存在光滑函数 b 满足 $F(\nabla f) = b(f)$. 一个超常函数 f 称为等参的 (isoparametric), 如果存在光滑函数 a 满足 $\Delta f = a(f)$. 等参函数 f 的正则水平集 $N_t^n := f^{-1}(t)$ 称为 Finsler 流形 $(M,F,d\mu)$ 的等参超曲面.

在此定义下, 文献 [70] 推广了 Riemann 情形等参函数的基本性质, 例如, 超常函数是等参函数当且仅当 N_t 具常 $d\mu_{\boldsymbol{n}}$- 平均曲率; 在常旗曲率且常 S- 曲率的 Finsler 流形中, 超常函数是等参函数当且仅当 N_t 具有常主曲率, 并对 Randers-Minkowski 空间中在 BH 或 HT 体积形式下的等参超曲面进行了分类 (这些后来被 He 等 [71] 发现恰好是 Ge 和 Ma [54] 在 Euclid 空间中分类的异向等参超曲面). 后续不同类型的 Finsler 流形中的等参超曲面及其焦流形得到了密切关注和研究, 也涌现一些新的应用结果. 相信 Finsler 等参理论会进一步发展.

3.6 Euclid 空间中高余维等参子流形

早在 20 世纪 80 年代, 一些杰出数学家们已开始研究等参超曲面理论的高余维情形的推广. 为了推广 Cartan 和 Münzner 等参函数的概念, Eells [41] 在研究调和映照时引进了 Riemann 流形之间的等参映射; 而 Carter 和 West [11] 也提出了一种等参映射的定义, 并详细研究了到 $\mathbb{R}^2$ 的等参映射 (特别是球面中余 2 维或 Euclid 空间中余 3 维的等参子流形, 即作为等参映射的正则水平集); Terng [181] 系统地研究了 Euclid 空间中一般余维数的等参子流形, 将 Cartan 和 Münzner 等参超曲面几何结构完整地推广到高余维等参子流形; 而 West [194] 则在上述重合部分不同的等参子流形定义之间建立了等价关系.

定义 3.3 [11] 定向 Riemann 流形之间的一个非常值映射 $\varphi: W \to Q$ $(2\dim Q \leqslant \dim W)$ 被称为等参映射, 如果 $\varphi^*(\Lambda(Q))$ 在 W 的外代数 $\Lambda(W)$ 中是 $*$ 闭的, 即 $\varphi^*(\Lambda(Q))$ 在外微分 d 和外积 $\wedge$ 运算

下是闭的:

$$d\alpha, \alpha\wedge\beta \in \varphi^*(\Lambda(Q)) \cup \star\varphi^*(\Lambda(Q)), \quad \forall\, \alpha,\beta\in\varphi^*(\Lambda(Q)).$$

定义 3.4 [181]　实空间形式 N^{n+m} $(N=\mathbb{R}^{n+m},\mathbb{S}^{n+m},\mathbb{H}^{n+m})$ 中的一个完备连通 n 维子流形 M^n 称为等参子流形, 如果 M^n 的法丛平坦, 且沿着任意平行法向量场的主曲率为常数.

定义 3.5 [181]　一个光滑映射 $f=(f_{n+1},\dots,f_{n+m}):N^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ 称为等参映射, 如果它满足

(1) f 有正则点;

(2) $\nabla f_\alpha\cdot\nabla f_\beta$ 和 Δf_α 都是 f 的函数对任意 α 和 β 成立;

(3) $[\nabla f_\alpha,\nabla f_\beta]$ 是 $\nabla f_{n+1},\dots,\nabla f_{n+m}$ 的线性组合且其系数均为 f 的函数对任意 α 和 β 成立.

当 $m=1$ 时, 上述定义均与等参函数和等参超曲面定义 1.1 等价. 一般而言, Terng [181] 证明了等参子流形 (定义 3.4) 与等参映射 (定义 3.5) 的正则水平集对应, 而当 $Q=\mathbb{R}^m$ 时, West [194] 证明了定义 3.3 与 3.5 等价, 而且对于 $N=\mathbb{R}^{n+m},\mathbb{S}^{n+m}$, Δf_α 为 f 的函数这个条件没有必要, 推广了 Wang [191] 的超常函数即为等参函数这一结果 (注意, 当 $N=\mathbb{H}^{n+m}$ 时, 存在非等参的超常函数). Terng [181] 证明了非紧等参子流形均是紧致等参子流形上的柱面, 而紧致等参子流形均落在圆球面中, 由 Dadok [31] 的工作可知, 齐性的等参子流形均为对称空间迷向表示的主轨道. 关于高余维等参子流形的更多几何拓扑性质可参见文献 [77, 127, 128, 181, 182], 最后由 Thorbergsson [185] 完成了分类 (无穷维情形参见文献 [72]).

定理 3.7 [185]　Euclid 空间中紧致不可约且满的余维数大于等于 3 的等参子流形都是齐性的, 均为对称空间迷向表示的主轨道.

因此, 球面中余维数大于等于 2 的等参子流形也都是齐性的, 它们是 (秩大于等于 3 的) 对称空间迷向表示的主轨道.

Wang [190, 193] 进一步推广上述等参子流形, 定义了从 Riemann 流形到 Euclid 空间的等参映射 $f:N^{n+m}\to\mathbb{R}^m$, 只需要满足定义 3.5 中的前两个条件, 即不需要条件 (3) 关于 $[\nabla f_\alpha,\nabla f_\beta]$ 的部分. 他还利用 Clifford 代数在 $m\geqslant 2$ 情形构造了球面和 Euclid 空间上的非齐性等参映射 (等参子流形), 从而结合 Thorbergsson 的定理 3.7 说明这个定义比定义 3.5 更广泛, 然而其分类仍远未解决. 利用等参映射 f, 他还构造了球面和 Euclid 空间中的无穷多极小超曲面, 其构造类似于 Hsiang 等 [73–75, 78] 在研究极小锥和球面 Bernstein 问题时利用群作用的方法, 并对陈省身、林芳华和 Solomon 等的一些问题给出了回答.

4　等参理论的应用

单位球面中的等参超曲面及其焦流形为人们提供了具有典型几何特性及拓扑特性的无穷多具体明确的例子. 等参函数和等参叶状结构给 Riemann 流形带来了很漂亮的几何与拓扑结构. 在前文中已经多次提及等参理论在各方面的应用, 本节补充并简要介绍更多方面的应用.

4.1　球面同伦群的调和表示

对于紧致 Riemann 流形 M 和 N, 如果映射 $f:M\to N$ 是能量泛函 $E(f)=\int_M|df|^2$ 的临界点, 则称它为调和映射. Eells 和 Sampson [46] 提出了著名问题: 是否映射 f 的同伦类都有调和代表元? 当 N 的截面曲率 $K_N\leqslant 0$ 时, 文献 [46] 给出了此问题的正面答案. 当 N 的截面曲率 $K_N>0$ 时, 这个问题变得非常困难, 且有挑战性. 著名数学家 Eells 和 Lemaire [42] 在经典综述文献 “调和映照报告” 中

明确提出了球面同伦群的调和表示这一基本问题, 即是否每一个球面之间的映射都可以同伦到调和映照? 这也是 1982 年丘成桐在 120 个问题集中第 112 问题的猜测:

猜想 4.1 (Eells-Lemaire 问题 [42], 丘成桐第 112 问题 [201]) 对于任意正整数 m 和 n, $\pi_m(S^n)$ 中的元素都有调和代表元.

由 Smith [158]、Eells 和 Lemaire [43, 44]、Eells 和 Ratto [45] 的工作可知, 当 $m \leqslant 7$ 或 $m = 9$ 时, 同伦群 $\pi_m(S^m)$ 的每个元素都有调和代表元. Peng 和 Tang [133] 精确计算了每个球面上 Cartan-Münzner 等参多项式的梯度映射的 Brouwer 映射度, 继而通过构造调和拼接, 得到了更多球面间调和映照的例子. 在此工作基础上, Peng 和 Tang [134, 135] 取得了猜想 4.1 在几乎所有奇数维的重要突破:

定理 4.1 [134, 135] 设 $p \geqslant 1$, 则对于以下整数 j:

(i) $j = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$;

(ii) $j = 1$ 且 $p \equiv 1 \bmod 16$, $p > 1$,

存在调和映射 $\Phi: S^{16p+j} \to S^{16p+j}$, 且 Φ 的 Brouwer 映射度为 ± 2.

在之后的近 30 年间, 定理 4.1 一直是猜想 4.1 在高维情形的唯一结果, 被 Yau [202] 在公开出版物 *Selected Expository Works of Shing-Tung Yau with Commentary* 中肯定. 2022 年, 利用等参焦流形的特征映射, Qian 等 [144] 构造了 $\pi_{14}S^7$ 的调和生成元和 $\pi_{8k-1}S^{8k-8} (k > 2) \cong \mathbb{Z}_{240}$ 中元素 $(2j-k+1) \pmod{240}$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ 的调和代表元.

此外, 受到文献 [133–135] 启发, Ge 和 Xie [63] 利用 Cartan-Münzner 等参多项式梯度作为球面之间映射度为 ± 1 的映射, 构造了关于 Ginzburg-Landau 系统的 Brézis 问题的两个反面解.

4.2 球面中极小超曲面的陈省身猜想

著名的陈省身极小超曲面猜想是由 Chern [25] 在 1968 年提出的, 他提出如下猜测:

猜想 4.2 (陈省身猜想 (原始版本)) 对于单位球面中的极小、常数量曲率的紧致超曲面, 其数量曲率的取值范围是离散的.

Yau [201] 在 1982 年著名的 “120 个公开问题集” 中将之列为第 105 个问题, 并在 2012 年特意为陈省身猜想的进展撰写综述性文章 [153], 强调其重要性.

记单位球面 S^{n+1} 中紧致极小超曲面 M^n 的第二基本形式模长平方为 S. 由 Gauss 方程可知, S 为常数等价于数量曲率为常数. 根据 1968 年 Simons 的著名刚性定理可知, 若 $S \leqslant n$, 则 $S \equiv 0$ 或 $S \equiv n$. 当 $S \equiv 0$ 时, M^n 为赤道球面, 即 $g = 1$ 的极小等参超曲面. 当 $S \equiv n$ 时, Lawson 和 Chern 等独立地刻画了 M^n 为 Clifford 环面, 即 $g = 2$ 的极小等参超曲面. Peng 和 Terng [136, 137] 首创对 S 的第二间隔的研究, 对猜想 4.2 作出第一个突破性贡献. 他们取得了如下定理:

定理 4.2 [136, 137] 设 M^n 为单位球面 S^{n+1} $(n \geqslant 3)$ 中紧致极小超曲面, 满足 S 为常数. 若 $n \leqslant S \leqslant n + C(n)$ $(C(n) \geqslant \frac{1}{12n})$, 则 $S = n$. 特别地, 当 $n = 3$ 时, $C(3) = 3$. 若 $3 \leqslant S \leqslant 6$, 则 $S = 3$ 或 $S = 6$.

后来, Yang 和 Cheng [200] 及 Suh 和 Yang [164] 将第二间隔从 $\frac{1}{12n}$ 逐步扩大到 $\frac{3n}{7}$. 但是 30 多年以来, 还是仅有 Peng 和 Terng [136, 137] 在 3 维情形得到了第二间隔的最佳估计.

如前所述, 单位球面中极小等参超曲面的第二基本形式模长平方 $S \equiv (g-1)n$, 因而其数量曲率为常数, 且取值集合是离散的. 事实上, 它是球面中极小常数量曲率超曲面仅知的例子. 1986 年, Verstraelen-Montiel-Ros-Urbano 提出了强版本的陈省身猜想, 也可称之为陈省身等参超曲面猜想:

猜想 4.3 (陈省身猜想) 单位球面中的紧致极小常数量曲率超曲面一定是等参超曲面.

受到 Peng 和 Terng 工作的启发, 结合文献 [136,137], Chang [21] 在 1993 年解决了 3 维陈省身猜想, 这也是迄今为止仅有的陈省身猜想被彻底解决的成果. 另外, de Almeida 和 Brito [32] 证明了 S^4 中具有常平均曲率和非负常数量曲率的紧致超曲面 M^3 是等参的. Chang [20] 及 Cheng 和 Wan [24] 分别独立地证明了数量曲率 "非负" 这个假设是非必要的. 丘成桐等的综述性文献 [153] 指出, 对于 4 维以上超曲面, de Almeida 和 Brito [32] 的方法是目前陈省身猜想研究的主要思想框架. Lusala 等 [107] 和 Scherfner 等 [152] 将文献 [32] 的结果部分地推广到 4 维和 6 维等较低维数. 但是, 他们的假设条件中要求主曲率要正负成对出现. Tang 等 [168] 以及 Tang 和 Yan [177] 逐步克服本质困难, 将文献 [32] 完全推广到任意维数, 得到以下定理:

定理 4.3 [168, 177] 对于 S^{n+1} $(n > 3)$ 中闭超曲面 M^n, 若它具有非负数量曲率, 且主曲率的从 1 阶到 $n-1$ 阶的幂次和为常数, 则 M^n 为等参超曲面.

定理 4.3 推广了综述文献 [153] 中提到的陈省身猜想的几乎所有结果.

事实上, 去掉假设条件 S 为常数, Peng 和 Terng 也得到了一个重要的拼挤结果:

定理 4.4 [136, 137] 设 M^n 为单位球面 S^{n+1} $(n \leqslant 5)$ 中紧致极小超曲面, 若 $n \leqslant S \leqslant n + \delta(n)$, 其中 $\delta(n)$ 为仅依赖于 n 的正常数, 则 $S \equiv n$.

在这个定理的证明中, 两个由 Peng 和 Terng 发现的、由第二基本形式及其共变导数组成的几何量 A 和 B 起到关键性作用. $A - 2B$ 出现在一个 Simons 型公式中, 被 Lei 等 [93] 及许洪伟和许智源 [196] 称作 Peng-Terng (彭 - 滕) 不变量. 对数量曲率第二间隔的后续研究, 包括成庆明和 Ishikawa、魏嗣明和许洪伟、张旗、丁琪和忻元龙、许洪伟和许智源、雷力等的工作, 都依赖于将 Peng-Terng 不变量作到更精确的估计.

在 3 维情形, 有一个局部版本的陈省身猜想:

猜想 4.4 (Bryant 猜想) S^4 中的一片具有常数量曲率的极小超曲面是等参的.

Bryant 猜想至今仍未解决的主要原因是不存在局部版本的彭 - 滕定理.

关于陈省身猜想的其他广义版本和相关问题, 可参考 Ge 和 Tang [57]、Lei 等 [94], 及许洪伟和许智源 [196] 的综述文章.

陈猜想的假设条件在文献 [52] 中有一个 Takahashi 型的刻画: 单位球面中超曲面是极小常数量曲率的当且仅当其法向量场是特征函数. 另外, Perdomo 猜测单位球面 S^{n+1} 中的非全测地极小超曲面 M^n 的 S 的平均值大于等于 n. Ge 和 Li [53] 证明了其具有只依赖于维数的正下界.

4.3 等参情形的丘成桐第一特征值猜想

Laplace 算子是 Riemann 流形 M^n 上最重要的算子之一. 众所周知, Laplace 算子是一个椭圆算子, 并且有离散的谱, 其第一个正的特征值被称为 M^n 的第一特征值. Takahashi 定理说明单位球面中的浸入极小子流形的维数是它的特征值, 因而第一特征值小于等于其维数. 1982 年, 丘成桐在他的 120 个问题集的第 100 个问题中提出如下猜想:

猜想 4.5 (丘成桐第一特征值猜想 [201]) 若 M^n 是单位球 S^{n+1} 中的闭的极小嵌入超曲面, 则第一特征值等于其维数.

这里, 嵌入的条件是必需的. Montiel 和 Ros [117] 断言 Lawson 猜想是丘成桐第一特征值猜想在环面情形的特例. 2013 年, Lawson 猜想被 Brendle [6] 解决, 换言之, 3 维球面 S^3 的极小嵌入环面的第一特征值一定为 2. 此外, Choe 和 Soret [30] 对于当时所有已知的 S^3 中极小曲面的例子: Lawson 曲面和 Karcher-Pinkall-Sterling 曲面, 都验证了其第一特征值确实等于维数 2.

注意到球面中的闭等参超曲面一定是嵌入的, 可以考虑等参情形的丘成桐第一特征值猜想. $g \leqslant 2$ 的情形是平凡的. 当 $g=3$ 时, Solomon [159,160] 计算了所有等参超曲面的特征值. 针对齐性等参超曲面, Mutō 等 [121] 和 Kotani [90] 验证了 $g=3,6$, 以及 $g=4$, $(m_1,m_2)=(1,k-2),(2,2)$ 的齐性等参情形的猜想 4.5. Mutō [120] 对于满足限制条件 $\min\{m_1,m_2\} \leqslant 10$ 的非齐性等参超曲面验证了猜想 4.5. 然而, 对比 OT-FKM 型等参超曲面的重数对 $(m_1,m_2)=(m,l-m-1)$, 容易发现 m 可取任意正整数. 2013 年, 不依赖于等参超曲面的分类结果, Tang 和 Yan [172] 完成了其他所有情形 ($g=4, m_1$, $m_2 \geqslant 2$) 的验证. 因此, 结合球面中等参超曲面的分类结果, 他们最终在等参情形彻底解决了猜想 4.5:

定理 4.5 [172] 单位球面中的极小等参超曲面的第一特征值等于其维数.

值得一提的是, Tang 和 Yan [172] 还在 $g=4$, $m_1,m_2 \geqslant 2$ 的情形得到了极小等参超曲面 M^n 的第一特征值的重数为 $n+2$, 这在以往结果中是罕见的. 2014 年, 不依赖于等参超曲面的分类结果, Tang 等 [170] 重新在 $g=6$, $m_1=m_2=2$ 情形直接验证了猜想 4.5. 进一步地, 还可以考虑猜想 4.5 对于正则 Dupin 超曲面等其他等参超曲面的推广概念成立的可能性. 然而, 11 年过去了, 定理 4.5 没有任何推广, 仍是猜想 4.5 对于任意维数都成立的唯一结果.

根据定理 4.5 可知, 如果陈省身猜想 4.3 成立, 那么丘成桐第一特征值猜想 (猜想 4.5) 在单位球面中的具有常数量曲率的闭极小嵌入超曲面上成立, 从而将丘成桐第一特征值猜想与陈省身猜想这两个微分几何中的经典问题建立起关联. 并且, 定理 4.3 联动地给两个问题都提供了进展.

如前所述, 单位球面中的等参焦流形是球面的极小子流形. 由 Takahashi 定理可知, 焦流形的第一特征值小于等于其维数. 当 $g \leqslant 3$ 时, 焦流形的第一特征值显然等于其维数. 当 $g=4$ 时, 在焦流形满足一个对几乎所有焦流形都成立的维数不等式的条件下, Tang 和 Yan [172] 验证了焦流形的第一特征值等于其维数. 之后, Tang 等 [170] 对于 $g=4,6$ 的剩余情形进行了补充. Qian 和 Tang [141] 利用 Clifford 代数构造了两个序列的极小等参超曲面, 改进了文献 [170,172] 中对单位球面中等参焦流形的特征值估计. 详细内容可参见文献 [175]. 此外, Qian 和 Tang [141] 还借助极小等参序列构造了许多极小等参超曲面到球面的特征映射, 从而对 Eells-Lemaire 的另一著名问题作出贡献, 并提供了 Leung 两个猜想的无穷多反例.

4.4 非负多项式的多项式平方和表示问题

1888 年和 1893 年, Hilbert 证明了存在 n 元 d 次齐次非负多项式 (这种多项式全体记为 $P_{n,d}$) 不能表达为多项式的平方和 (能表示为多项式平方和的齐次非负多项式记为 sos, 其集合记为 $\Sigma_{n,d}$), 从而一般而言, $P_{n,d} \neq \Sigma_{n,d}$. Hilbert 给出的证明不是构造性的, 因而, 寻找具体的不能表示为平方和的非负多项式, 就成了一个引人注目的, 也是实代数几何中的重要问题. 最早的这种多项式的例子在距 Hilbert 的工作 70 年后才出现. Hilbert 的第 17 问题问到: 是否所有非负多项式都可以表示为有理函数的平方和? 这个问题在 1927 年被 Artin 解决. 由于有理函数分子分母的多项式次数不容易控制, 现代应用于一些优化算法的设计时 Artin 的有理函数平方和表示就不足够, 尤其在欠缺对有理函数分母控制的时候. 因此, 人们现在更加关注非负多项式的多项式平方和表示问题—寻找和判定哪些非负多项式可以表达为多项式的平方和, 以及有理函数平方和表示中统一分母的简洁明确表示 (最简单的统一分母为 $|x|^{2r}$, 即 $|x|^{2r}F(x)$ 是 sos 的), 这些问题可以称作广义 Hilbert 第 17 问题. Ge 和 Tang [60] 结合单位球面中等参超曲面的完整分类理论, 利用所有等参多项式构造了 3 类无穷多的具有明确表达式的非负齐次多项式, 完整分类了哪些具有多项式平方和表示, 其中有无穷多非负多项式不能表示为多项式的平方和, 但都具有统一分母 ($|x|^2$, 当 $g=4$ 时; $|x|^4$, 当 $g=6$ 时) 的有理函数平方和表示, 从而

在等参情形回答了广义 Hilbert 第 17 问题.

定义 4.1 [60] 对于任意一个 $\mathbb{R}^n$ 上的 g 次 Cartan-Münzner 等参多项式 $F(x)$, 定义如下 3 个齐次多项式:

$$\begin{cases} G_F^{\pm}(x) := |x|^g \pm F(x) \in P_{n,g}, & g = 2,4,6, \\ H_F(x) := |x|^{2g} - F(x)^2 \in P_{n,2g}, & g = 1,2,3,4,6. \end{cases}$$

Ge 和 Tang [60] 证明了 $G_F^{\pm}(x)$ 和 $H_F(x)$ 分别为 g 次和 $2g$ 次齐次非负多项式, 证明了 $H_F(x)$ 均有多项式平方和表示, 而 $G_F^{\pm}(x)$ 都具有统一分母 ($|x|^2$, 当 $g=4$ 时; $|x|^4$, 当 $g=6$ 时) 的有理函数平方和表示, 但其中没有多项式平方和表示 (non-sos) 的也有无穷多, 甚至 $G_F^{+}(x)$ 这类中绝大多数都没有多项式平方和表示 (表 3 "其他" 列), 见表 2 和 3.

特别地, 对于某类 $g=4$ 次 OT-FKM 型 Cartan-Münzner 等参多项式 $F(x)$ 构造的 $G_F^{+}(x)$, 应用上述分类, Ge 和 Tang [60] 发现一族表达式简单的且不能表示为多项式平方和的非负 4 次齐次多项式:

$$G_{q4}(X,Y) := |X|^2|Y|^2 - |\langle X,Y\rangle_{\mathbb{H}}|^2 \in P_{8k,4} \setminus \Sigma_{8k,4}, \quad X,Y \in \mathbb{H}^k, \quad k \geqslant 2,$$

这里 $\langle X,Y\rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^k X_i\overline{Y}_i$ 指向量的 Hermite 内积. G_{q4} 的非负性立即证明了四元数向量的 Cauchy-Schwarz 不等式, 而其不能表示为多项式平方和又说明了 Lagrange 恒等式:

$$|X|^2|Y|^2 - |\langle X,Y\rangle_{\mathbb{H}}|^2 = |X\wedge Y|^2, \quad X,Y \in \mathbb{F}^k, \quad \mathbb{F} = \mathbb{R},\mathbb{C}, \quad k \geqslant 2$$

对四元数向量不成立, 但结合 G_{q4} 的另一种有理函数平方和表示, 它有如下广义的 Lagrange 恒等式:

$$4\left(\sum_{\alpha=0}^{4}\langle P_\alpha x, x\rangle^2\right)(|X|^2|Y|^2 - |\langle X,Y\rangle_{\mathbb{H}}|^2) = \left|\sum_{\alpha=0}^{4}\langle P_\alpha x, x\rangle P_\alpha x \wedge x\right|^2, \quad x = (X,Y) \in \mathbb{R}^{8k},$$

其中 $\{P_0, P_1, \ldots, P_4\}$ 是对应于四元数的 Clifford 系统.

Ge 和 Tang [60] 另外阐述了上述多项式平方和分类结果对于多个方面也具有应用, 如正交乘法、Grassmann 流形上平方和问题、等参超曲面特征值重数估计相关的 Solomon 问题—等参焦流形是否是二次型零点集的交.

4.5 其他应用

丘成桐 120 个问题集的第 76 问题猜测紧致 Riemann 流形上 Laplace 算子的特征函数的临界点个数随特征值的增长而递增. Jakobson 和 Nadirashvili [87] 在 2 维环面上构造反例, 当特征值往无穷增

表 2 当 $g = 1,2,3,6$ 时, 分类具多项式平方和表示 sos 的 $G_F^{\pm}$ 和 H_F

g	1	2	3	6
G_F^+	–	sos	–	non-sos
G_F^-	–	sos	–	non-sos
H_F	sos	sos	sos	sos

表 3 当 $g = 4$ 时, 分类具多项式平方和表示 sos 的 $G_F^{\pm}$ 和 H_F

(m_+, m_-)	$(2,2)$	$(5,4)$	$(1,k)$	$(2,2k-1)$	$(3,4)$	$(4,3)^I$	$(5,2)$	$(6,1)$	其他
G_F^+	non-sos	non-sos	sos	sos	sos	sos	sos	sos	non-sos
G_F^-	sos	sos	sos	sos	sos	sos	sos	sos	sos
H_F	sos	sos	sos	sos	sos	sos	sos	sos	sos

长时, 相应特征函数的临界点个数趋向于常数. Tang 和 Yan [174] 在单位球面的极小等参超曲面上构造了 3 个特征函数, 其特征值为 $(n, 2n, 3n)$, 临界点个数分别为 8 个点, 子流形 (无穷多点) 和 8 个点, 从而提供了第 76 问题新的反例.

借助 Schoen-Yau-Gromov-Lawson 的手术理论, Tang 等 [169] 在单位球面中的极小等参超曲面处施行手术, 得到所谓的 Double 流形, 其上不仅有复杂的拓扑性质, 更具有正数量曲率度量. Peng 和 Qian [132] 受此启发, 进一步构造了 Double 流形上的正 Ricci 曲率度量. Tang 和 Zhang [179] 受等参的这种几何结构启发, 利用 Atiyah-Patodi-Singer 的 η 不变量计算了 Eells-Kuiper 四元数射影平面的 Eells-Kuiper 不变量, 解决了 Bérard-Bergery 问题, 即证明每个 Eells-Kuiper 四元数射影平面都存在一个 Riemann 度量使其具有 SC^p 结构: 任何经过点 p 的测地线都是有相同长度的简单闭曲线. 在文献 [50, 55] 中, 等参叶状结构对 4 维流形、球面微分同胚群及球面超曲面的怪异微分结构均有应用.

继文献 [58, 140] 研究怪球面 (同伦球面) 上的等参及其应用之后, Qian 等 [143] 将 Gromoll-Meyer 7 维怪球面 Σ^7 表达为一个 8 维流形上超常函数水平集, 并证明了 Σ^7 在诱导度量下同时具有正 Ricci 曲率和拟正截面曲率.

应用等参理论, Tang 和 Zhang [180] 构造了许多极小和最小锥, 是单位球面等参焦流形及其某种乘积上的锥化.

Stiefel 流形 $V_k(\mathbb{R}^n)$、$V_k(\mathbb{C}^n)$ 和 $V_k(\mathbb{H}^n)$ $(k \leqslant n)$ 的几何拓扑性质已经广为人知. James [88] 定义了八元数 Stiefel 空间 $V_k(\mathbb{O}^n)$, 并提出了两个基本性问题: $V_k(\mathbb{O}^n)$ 是否是光滑流形? 投影映射 $\pi : V_k(\mathbb{O}^n) \to V_q(\mathbb{O}^n)$ $(q < k)$ 是否是纤维映射? James 给出了 $k = 2$ 且 $q = 1$ 时两个问题的正面回答. Qian 等 [145] 证明了 $V_3(\mathbb{O}^n)$ $(n \geqslant 2)$ 是 $3(8n-9)$ 维光滑流形, 但是 $\pi : V_{k+1}(\mathbb{O}^n) \to V_k(\mathbb{O}^n)$ $(n > k \geqslant 2)$ 不是 Serre 纤维化.

Shklover [157] 考虑了 Schiffer 问题的推广: 在 Riemann 流形中, 当补集连通的有界区域的边界是齐性超曲面或一般等参超曲面时, Serrin 型 Neumann 或 Dirichlet 过定系统问题均存在解, 且该区域不是球 (参见文献 [51]). Pelayo 和 Peralta-Salas [129] 证明了解析 Riemann 流形中连通区域 Ω 的自引力流体的平衡形状 $\partial\Omega$ 是等参超曲面. Savo [149–151] 在解析 Riemann 流形上研究了过定系统热方程和热流, 证明了其解满足所谓的恒流性质当且仅当区域具有等参叶状结构, 且其边界的各连通分支为等参超曲面, 也当且仅当区域是热容量泛函的临界点.

Ma 和 Ohnita [108, 109] 完全决定了单位球面中齐性等参超曲面到二次超锥 $Q_n(\mathbb{C})$ 的 Gauss 映照像作为极小 Lagrange 子流形的 Hamilton 稳定性. Miyaoka [114] 将所有 $g = 4$ 的 Cartan-Münzner 等参多项式用某些群作用的矩映射表示出来.

Tang 和 Yan [176] 在单位球面中等参超曲面上构造了近复结构, 并在其中一类等参超曲面上构造了复结构. 作为特殊情形, 他们证明了 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^6$ 都是复流形, 这是首次在 $\mathbb{S}^6$ 和 8 维闭流形的乘积上构造了复结构. 最近, Tang 和 Yan [178] 将 Blanchard [5] 和 LeBrun [92] 在此方面的经典结果进行了推广.

5 结论

等参理论经历了一个世纪的演变与发展, 如今已渗透到数学的各个领域. 许多结果和证明方法涉及微分几何、代数、分析、方程、代数几何、代数拓扑、微分拓扑、复几何和流体力学等各个分支, 形成了交叉融合的局面. 其理论应用广泛, 取得了丰硕的成果. 这种理论丰富的几何、拓扑甚至代数结构

将持续为现代数学提供重要的参考和研究工具.

参考文献

1 Abresch U. Isoparametric hypersurfaces with four or six distinct principal curvatures. Math Ann, 1983, 264: 283–302
2 Alexandrino M M, Radeschi M. Closure of singular foliations: The proof of Molino's conjecture. Compos Math, 2017, 153: 2577–2590
3 Bao D, Chern S S, Shen Z M. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2000
4 Berndt J, Console S, Olmos C. Submanifolds and Holonomy. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003
5 Blanchard A. Recherche de structures analytiques complexes sur certaines variétés. C R Acad Sci Paris, 1953, 236: 657–659
6 Brendle S. Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture. Acta Math, 2013, 211: 177–190
7 Cartan É. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante. Ann Mat Pura Appl (4), 1938, 17: 177–191
8 Cartan E. Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques. Math Z, 1939, 45: 335–367
9 Cartan E. Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces. C R Congrès Math Liège, 1939, 30–41
10 Cartan E. Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et à 9 dimensions. Rev Univ Tucuman Ser A, 1940, 1: 5–22
11 Carter S, West A. Isoparametric systems and transnormality. Proc Lond Math Soc (3), 1985, 51: 520–542
12 Cecil T E. Isoparametric and Dupin hypersurfaces. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2008, 4: 062
13 Cecil T E. Lie Sphere Geometry, 2nd ed. New York: Springer, 2008
14 Cecil T E. Classifications of Dupin hypersurfaces in Lie sphere geometry. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2024, 44: 1–36
15 Cecil T E, Chern S S. Tautness and Lie sphere geometry. Math Ann, 1987, 278: 381–399
16 Cecil T E, Chi Q-S, Jensen G R. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures. Ann of Math (2), 2007, 166: 1–76
17 Cecil T E, Chi Q-S, Jensen G R. Dupin hypersurfaces with four principal curvatures, II. Geom Dedicata, 2007, 128: 55–95
18 Cecil T E, Ryan P J. Focal sets, taut embeddings and the cyclides of Dupin. Math Ann, 1978, 236: 177–190
19 Cecil T E, Ryan P J. Geometry of Hypersurfaces. Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer, 2015
20 Chang S P. A closed hypersurface with constant scalar and mean curvatures in $\mathbb{S}^4$ is isoparametric. Comm Anal Geom, 1993, 1: 71–100
21 Chang S P. On minimal hypersurfaces with constant scalar curvatures in S^4. J Differential Geom, 1993, 37: 523–534
22 Chen Y L, He Q. The isoparametric functions on a class of Finsler spheres. Differential Geom Appl, 2023, 86: 101970
23 Chen Y L, He Q. Transnormal functions and focal varieties on Finsler manifolds. J Geom Anal, 2023, 33: 128
24 Cheng Q M, Wan Q. Hypersurfaces of space forms $M^4(c)$ with constant mean curvature. In: Geometry and Global Analysis (Sendai, 1993). Sendai: Tohoku University, 1993, 437–442
25 Chern S S. Minimal submanifolds in a Riemannian manifold. University of Kansas, Department of Mathematics Technical Report 19, 1968
26 Chi Q-S. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, II. Nagoya Math J, 2011, 204: 1–18
27 Chi Q-S. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, III. J Differential Geom, 2013, 94: 469–504
28 Chi Q-S. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV. J Differential Geom, 2020, 115: 225–301
29 Chi Q-S. The isoparametric story, a heritage of Élie Cartan. In: Proceedings of the International Consortium of Chinese Mathematicians, 2018. Boston: Int Press, 2020, 197–260
30 Choe J, Soret M. First eigenvalue of symmetric minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$. Indiana Univ Math J, 2009, 58: 269–282
31 Dadok J. Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups. Trans Amer Math Soc, 1985, 288: 125–137
32 de Almeida S C, Brito F G B. Closed 3-dimensional hypersurfaces with constant mean curvature and constant scalar curvature. Duke Math J, 1990, 61: 195–206
33 Díaz-Ramos J C, Domínguez-Vázquez M, Otero T. Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type and higher rank. Adv Math, 2023, 428: 109165
34 Díaz-Ramos J C, Domínguez-Vázquez M, Rodríguez-Vázquez A. Homogeneous and inhomogeneous isoparametric hypersurfaces in rank one symmetric spaces. J Reine Angew Math, 2021, 779: 189–222
35 Díaz-Ramos J C, Domínguez-Vázquez M, Sanmartín-López V. Isoparametric hypersurfaces in complex hyperbolic spaces. Adv Math, 2017, 314: 756–805
36 Domínguez-Vázquez M. Isoparametric foliations on complex projective spaces. Trans Amer Math Soc, 2016, 368: 1211–1249

37 Domínguez-Vázquez M, Gorodski C. Polar foliations on quaternionic projective spaces. Tohoku Math J (2), 2018, 70: 353–375
38 Domínguez-Vázquez M, Sanmartín-López V. Isoparametric hypersurfaces in symmetric spaces of non-compact type and higher rank. Compos Math, 2024, 160: 451–462
39 Dong P L, He Q. Isoparametric hypersurfaces of a class of Finsler manifolds induced by navigation problem in Minkowski spaces. Differential Geom Appl, 2020, 68: 101581
40 Dorfmeister J, Neher E. Isoparametric hypersurfaces, case $g = 6$, $m = 1$. Comm Algebra, 1985, 13: 2299–2368
41 Eells J. On equivariant harmonic maps. In: Proceedings of the 1981 Shanghai Symposium on Differential Geometry and Differential Equations (Shanghai/Hefei, 1981). Beijing: Science Press, 1984, 55–73
42 Eells J, Lemaire L. A report on harmonic maps. Bull Lond Math Soc, 1978, 10: 1–68
43 Eells J, Lemaire L. Selected Topics in Harmonic Maps. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 50. Providence: Amer Math Soc, 1983
44 Eells J, Lemaire L. Another report on harmonic maps. Bull Lond Math Soc, 1988, 20: 385–524
45 Eells J, Ratto A. Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries. Annals of Mathematics Studies, vol. 130. Princeton: Princeton Univ Press, 1993
46 Eells J, Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer J Math, 1964, 86: 109–160
47 Fang F Q. On the topology of isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures. Proc Amer Math Soc, 1999, 127: 259–264
48 Fang F Q. Dual submanifolds in rational homology spheres. Sci China Math, 2017, 60: 1549–1560
49 Ferus D, Karcher H, Münzner H F. Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen. Math Z, 1981, 177: 479–502
50 Ge J Q. Isoparametric foliations, diffeomorphism groups and exotic smooth structures. Adv Math, 2016, 302: 851–868
51 Ge J Q. Problems related to isoparametric theory. In: Surveys in Geometric Analysis. Beijing: Science Press, 2020, 71–85
52 Ge J Q, Li F G. Integral-Einstein hypersurfaces in spheres. arXiv:2101.03753, 2021
53 Ge J Q, Li F G. A lower bound for L_2 length of second fundamental form on minimal hypersurfaces. Proc Amer Math Soc, 2022, 150: 2671–2684
54 Ge J Q, Ma H. Anisotropic isoparametric hypersurfaces in Euclidean spaces. Ann Global Anal Geom, 2012, 41: 347–355
55 Ge J Q, Radeschi M. Differentiable classification of 4-manifolds with singular Riemannian foliations. Math Ann, 2015, 363: 525–548
56 Ge J Q, Tang Z Z. A proof of the DDVV conjecture and its equality case. Pacific J Math, 2008, 237: 87–95
57 Ge J Q, Tang Z Z. Chern conjecture and isoparametric hypersurfaces. In: Advanced Lectures in Mathematics, vol. 22. Somerville: Int Press, 2012, 49–60
58 Ge J Q, Tang Z Z. Isoparametric functions and exotic spheres. J Reine Angew Math, 2013, 683: 161–180
59 Ge J Q, Tang Z Z. Geometry of isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds. Asian J Math, 2014, 18: 117–126
60 Ge J Q, Tang Z Z. Isoparametric polynomials and sums of squares. Int Math Res Not IMRN, 2023, 2023: 21226–21271
61 Ge J Q, Tang Z Z, Yan W J. A filtration for isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds. J Math Soc Japan, 2015, 67: 1179–1212
62 Ge J Q, Tang Z Z, Yan W J. Normal scalar curvature inequality on the focal submanifolds of isoparametric hypersurfaces. Int Math Res Not IMRN, 2018, 2: 422–465
63 Ge J Q, Xie Y Q. Gradient map of isoparametric polynomial and its application to Ginzburg-Landau system. J Funct Anal, 2010, 258: 1682–1691
64 Ge J Q, Zhou Y. Austere matrices, austere submanifolds and Dupin hypersurfaces. arXiv:2302.06105, 2023
65 Grove K, Halperin S. Dupin hypersurfaces, group actions and the double mapping cylinder. J Differential Geom, 1987, 26: 429–459
66 Guo Z, Li T Z, Lin L M, et al. Classification of hypersurfaces with constant Möbius curvature in $\mathbb{S}^{m+1}$. Math Z, 2012, 271: 193–219
67 He Q, Chen Y L, Yin S T, et al. Isoparametric hypersurfaces in Finsler space forms. Sci China Math, 2021, 64: 1463–1478
68 He Q, Dong P L, Yin S T. Classifications of isoparametric hypersurfaces in Randers space forms. Acta Math Sin (Engl Ser), 2020, 36: 1049–1060
69 He Q, Huang X, Dong P L. Isoparametric hypersurfaces in conic Finsler manifolds. Differential Geom Appl, 2022, 84: 101937
70 He Q, Yin S T, Shen Y B. Isoparametric hypersurfaces in Minkowski spaces. Differential Geom Appl, 2016, 47: 133–158
71 He Q, Yin S T, Shen Y B. Isoparametric hypersurfaces in Funk spaces. Sci China Math, 2017, 60: 2447–2464
72 Heintze E, Liu X B. Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds. Ann of Math (2), 1999, 149:

149–181
73 Hsiang W Y. Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces. I. J Differential Geom, 1982, 17: 337–356
74 Hsiang W Y. Minimal cones and the spherical Bernstein problem, I. Ann of Math (2), 1983, 118: 61–73
75 Hsiang W Y. Minimal cones and the spherical Bernstein problem, II. Invent Math, 1983, 74: 351–369
76 Hsiang W Y, Lawson H B Jr. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. J Differential Geom, 1971, 5: 1–38
77 Hsiang W Y, Palais R S, Terng C L. The topology of isoparametric submanifolds. J Differential Geom, 1988, 27: 423–460
78 Hsiang W Y, Sterling I. Minimal cones and the spherical Bernstein problem. III. Invent Math, 1986, 85: 223–247
79 Hu Z J, Li D Y. Möbius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures. Pacific J Math, 2007, 232: 289–311
80 Hu Z J, Li H Z. Classification of Möbius isoparametric hypersurfaces in $\mathbb{S}^4$. Nagoya Math J, 2005, 179: 147–162
81 Hu Z J, Li H Z, Wang C P. Classification of Möbius isoparametric hypersurfaces in $\mathbb{S}^5$. Monatsh Math, 2007, 151: 201–222
82 Hu Z J, Li X X, Zhai S J. On the Blaschke isoparametric hypersurfaces in the unit sphere with three distinct Blaschke eigenvalues. Sci China Math, 2011, 54: 2171–2194
83 Hu Z J, Tian X L. On Möbius form and Möbius isoparametric hypersurfaces. Acta Math Sin (Engl Ser), 2009, 25: 2077–2092
84 Hu Z J, Zhai S J. Classification of Möbius isoparametric hypersurfaces in the unit six-sphere. Tohoku Math J (2), 2008, 60: 499–526
85 Hu Z J, Zhai S J. Möbius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures, II. Pacific J Math, 2011, 249: 343–370
86 Immervoll S. On the classification of isoparametric hypersurfaces with four distinct curvatures in spheres. Ann of Math (2), 2008, 168: 1011–1024
87 Jakobson D, Nadirashvili N. Eigenfunctions with few critical points. J Differential Geom, 1999, 53: 177–182
88 James I M. Cross-sections of Stiefel manifolds. Proc Lond Math Soc (3), 1958, 8: 536–547
89 Ki U, Nakagawa H. A characterization of the Cartan hypersurface in a sphere. Tohoku Math J (2), 1987, 39: 27–40
90 Kotani M. The first eigenvalue of homogeneous minimal hypersurfaces in a unit sphere $S^{n+1}(1)$. Tohoku Math J (2), 1985, 37: 523–532
91 Laura E. Sopra la propagazione di onde in un mezzo indefinito. In: Scritti Matematici Offerti ad Enrico D'Ovidio. Torino: Bocca, 1918, 253–278
92 LeBrun C. Orthogonal complex structures on S^6. Proc Amer Math Soc, 1987, 101: 136–138
93 Lei L, Xu H W, Xu Z Y. On Chern's conjecture for minimal hypersurfaces in spheres. arXiv:1712.01175, 2017
94 Lei L, Xu H W, Xu Z Y. On the generalized Chern conjecture for hypersurfaces with constant mean curvature in a sphere. Sci China Math, 2021, 64: 1493–1504
95 Levi-Civita T. Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo. Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Natur (6), 1937, 26: 355–362
96 Li H Z. Generalized Cartan identities on isoparametric manifolds. Ann Global Anal Geom, 1997, 15: 45–50
97 Li H Z, Liu H L, Wang C P, et al. Möbius isoparametric hypersurfaces in S^{n+1} with two distinct principal curvatures. Acta Math Sin (Engl Ser), 2002, 18: 437–446
98 Li H Z, Wang C P. Möbius geometry of hypersurfaces with constant mean curvature and scalar curvature. Manuscripta Math, 2003, 112: 1–13
99 Li Q C, Yan W J. On Ricci tensor of focal submanifolds of isoparametric hypersurfaces. Sci China Math, 2015, 58: 1723–1736
100 Li T Z, Li H Z, Wang C P. Classification of hypersurfaces with constant Laguerre eigenvalues in $\mathbb{R}^n$. Sci China Math, 2011, 54: 1129–1144
101 Li T Z, Ma X, Wang C P. Möbius homogeneous hypersurfaces with two distinct principal curvatures in S^{n+1}. Ark Mat, 2013, 51: 315–328
102 Li T Z, Ma X, Wang C P. Willmore hypersurfaces with constant Möbius curvature in R^{n+1}. Geom Dedicata, 2013, 166: 251–267
103 Li T Z, Qing J, Wang C P. Möbius curvature, Laguerre curvature and Dupin hypersurface. Adv Math, 2017, 311: 249–294
104 Liu X B, Radeschi M. Polar foliations on symmetric spaces and mean curvature flow. J Reine Angew Math, 2022, 2022: 135–155
105 Liu X B, Terng C L. The mean curvature flow for isoparametric submanifolds. Duke Math J, 2009, 147: 157–179
106 Liu X B, Terng C L. Ancient solutions to mean curvature flow for isoparametric submanifolds. Math Ann, 2020, 378: 289–315
107 Lusala T, Scherfner M, Sousa L A M Jr. Closed minimal Willmore hypersurfaces of $S^5(1)$ with constant scalar curvature. Asian J Math, 2005, 9: 65–78

108 Ma H, Ohnita Y. On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres. Math Z, 2009, 261: 749–785
109 Ma H, Ohnita Y. Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces, I. J Differential Geom, 2014, 97: 275–348
110 Ma X, Wang C P. Willmore surfaces of constant Möbius curvature. Ann Global Anal Geom, 2007, 32: 297–310
111 Miyaoka R. Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures. Math Z, 1984, 187: 433–452
112 Miyaoka R. The linear isotropy group of $G_2/SO(4)$, the Hopf fibering and isoparametric hypersurfaces. Osaka J Math, 1993, 30: 179–202
113 Miyaoka R. Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$. Ann of Math (2), 2013, 177: 53–110
114 Miyaoka R. Moment maps of the spin action and the Cartan-Münzner polynomials of degree four. Math Ann, 2013, 355: 1067–1084
115 Miyaoka R. Errata of "Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$". Ann of Math (2), 2016, 183: 1057–1071
116 Miyaoka R, Ozawa T. Construction of taut embeddings and Cecil-Ryan conjecture. In: Geometry of Manifolds. Perspect Math, vol. 8. Boston: Academic Press, 1989, 181–189
117 Montiel S, Ros A. Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area. Invent Math, 1986, 83: 153–166
118 Münzner H F. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. Math Ann, 1980, 251: 57–71
119 Münzner H F. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. II. Über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel. Math Ann, 1981, 256: 215–232
120 Mutō H. The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric minimal hypersurface in a unit sphere. Math Z, 1988, 197: 531–549
121 Mutō H, Ohnita Y, Urakawa H. Homogeneous minimal hypersurfaces in the unit spheres and the first eigenvalues of their Laplacian. Tohoku Math J (2), 1984, 36: 253–267
122 Nie C X, Ma X, Wang C P. Conformal CMC-surfaces in Lorentzian space forms. Chin Ann Math Ser B, 2007, 28: 299–310
123 Nomizu K. Some results in E. Cartan's theory of isoparametric families of hypersurfaces. Bull Amer Math Soc (NS), 1973, 79: 1184–1188
124 Nomizu K. Élie Cartan's work on isoparametric families of hypersurfaces. Proc Sympos Pure Math, 1975, 27: 191–200
125 Ozeki H, Takeuchi M. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, I. Tohoku Math J (2), 1975, 27: 515–559
126 Ozeki H, Takeuchi M. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, II. Tohoku Math J (2), 1976, 28: 7–55
127 Palais R S, Terng C L. A general theory of canonical forms. Trans Amer Math Soc, 1987, 300: 771–789
128 Palais R S, Terng C L. Critical Point Theory and Submanifold Geometry. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1353. Berlin: Springer-Verlag, 1988
129 Pelayo A, Peralta-Salas D. A geometric approach to the classification of the equilibrium shapes of self-gravitating fluids. Comm Math Phys, 2006, 267: 93–115
130 Peng C K, Hou Z X. A remark on the isoparametric polynomials of degree 6. In: Differential Geometry and Topology (Tianjin, 1986–87). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1369. Berlin-New York: Springer, 1989, 222–224
131 Peng C K, Qian C. Homogeneous Einstein-like metrics on spheres and projective spaces. Differential Geom Appl, 2016, 44: 63–76
132 Peng C K, Qian C. Ricci curvature of double manifolds via isoparametric foliations. Adv Math, 2017, 311: 469–480
133 Peng C K, Tang Z Z. Brouwer degrees of gradient maps of isoparametric functions. Sci China Ser A, 1996, 39: 1131–1139
134 Peng C K, Tang Z Z. On representing homotopy classes of spheres by harmonic maps. Topology, 1997, 36: 867–879
135 Peng C K, Tang Z Z. Harmonic maps from spheres to spheres. Topology, 1998, 37: 39–43
136 Peng C K, Terng C L. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in spheres. Math Ann, 1983, 266: 105–113
137 Peng C K, Terng C L. Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature. In: Seminar on Minimal Submanifolds. Annals of Mathematics Studies, vol. 103. Princeton: Princeton Univ Press, 1983, 177–198
138 Pinkall U. Dupin hypersurfaces. Math Ann, 1985, 270: 427–440
139 Pinkall U, Thorbergsson G. Deformations of Dupin hypersurfaces. Proc Amer Math Soc, 1989, 107: 1037–1043
140 Qian C, Tang Z Z. Isoparametric functions on exotic spheres. Adv Math, 2015, 272: 611–629
141 Qian C, Tang Z Z. Isoparametric foliations, a problem of Eells-Lemaire and conjectures of Leung. Proc Lond Math Soc (3), 2016, 112: 979–1001
142 Qian C, Tang Z Z, Yan W J. New examples of Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions, II. Ann Global Anal Geom, 2013, 43: 47–62
143 Qian C, Tang Z Z, Yan W J. Extrinsic geometry of the Gromoll-Meyer sphere. Differential Geom Appl, 2020, 71: 101638
144 Qian C, Tang Z Z, Yan W J. Clifford systems, harmonic maps and metrics with nonnegative curvature. Pacific J

Math, 2022, 320: 391–424
145 Qian C, Tang Z Z, Yan W J. On two questions of James. arXiv:2202.03729, 2022
146 Qian C, Tang Z Z, Yan W J. Topology and curvature of isoparametric families in spheres. Commun Math Stat, 2023, 11: 439–475
147 Radeschi M. Clifford algebras and new singular Riemannian foliations in spheres. Geom Funct Anal, 2014, 24: 1660–1682
148 Rodrigues L A, Tenenblat K. A characterization of Moebius isoparametric hypersurfaces of the sphere. Monatsh Math, 2009, 158: 321–327
149 Savo A. Heat flow, heat content and the isoparametric property. Math Ann, 2016, 366: 1089–1136
150 Savo A. Geometric rigidity of constant heat flow. Calc Var Partial Differential Equations, 2018, 57: 156
151 Savo A. On the heat content functional and its critical domains. Calc Var Partial Differential Equations, 2021, 60: 167
152 Scherfner M, Vrancken L, Weiss S. On closed minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in $\mathbb{S}^7$. Geom Dedicata, 2012, 161: 409–416
153 Scherfner M, Weiss S, Yau S T. A review of the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres. In: Advances in Geometric Analysis. Advanced Lectures in Mathematics (ALM), vol. 21. Somerville: Int Press, 2012, 175–187
154 Segre B. Una proprietá caratteristica di tre sistemi ∞^1 di superficie. Atti Acc Sc Torino, 1924, 59: 666–671
155 Segre B. Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni. Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Natur (6), 1938, 27: 203–207
156 Shen Z M. Lectures on Finsler Geometry. Singapore: World Scientific, 2001
157 Shklover V E. Schiffer problem and isoparametric hypersurfaces. Rev Mat Iberoam, 2000, 16: 529–569
158 Smith R T. Harmonic mappings of spheres. Amer J Math, 1975, 97: 364385
159 Solomon B. The harmonic analysis of cubic isoparametric minimal hypersurfaces I: Dimensions 3 and 6. Amer J Math, 1990, 112: 151–203
160 Solomon B. The harmonic analysis of cubic isoparametric minimal hypersurfaces II: Dimensions 12 and 24. Amer J Math, 1990, 112: 205–241
161 Solomon B. Quartic isoparametric hypersurfaces and quadratic forms. Math Ann, 1992, 293: 387–398
162 Somigliana C. Sulle relazione fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica. Atti Accad Sci Torino Cl Sci Fis Mat Natur, 1918–1919, 24: 974–979
163 Stolz S. Multiplicities of Dupin hypersurfaces. Invent Math, 1999, 138: 253–279
164 Suh Y J, Yang H Y. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in a unit sphere. Commun Contemp Math, 2007, 9: 183–200
165 Takagi R, Takahashi T. On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere. In: Differential Geometry in Honor of Kentaro Yano. Tokyo: Kinokuniya, 1972, 469–481
166 Tang Z Z. Isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures. Chin Sci Bull, 1991, 36: 1237–1240
167 Tang Z Z. Multiplicities of equifocal hypersurfaces in symmetric spaces. Asian J Math, 1998, 2: 181–214
168 Tang Z Z, Wei D Y, Yan W J. A sufficient condition for a hypersurface to be isoparametric. Tohoku Math J (2), 2020, 72: 493–505
169 Tang Z Z, Xie Y Q, Yan W J. Schoen-Yau-Gromov-Lawson theory and isoparametric foliations. Comm Anal Geom, 2012, 20: 989–1018
170 Tang Z Z, Xie Y Q, Yan W J. Isoparametric foliation and Yau conjecture on the first eigenvalue, II. J Funct Anal, 2014, 266: 6174–6199
171 Tang Z Z, Yan W J. New examples of Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions. Ann Global Anal Geom, 2012, 42: 403–410
172 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliation and Yau conjecture on the first eigenvalue. J Differential Geom, 2013, 94: 521–540
173 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliation and a problem of Besse on generalizations of Einstein condition. Adv Math, 2015, 285: 1970–2000
174 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliations and critical sets of eigenfunctions. Math Z, 2017, 286: 1217–1226
175 Tang Z Z, Yan W J. Yau's first eigenvalue conjecture in the isoparametric case (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 819–826 [唐梓洲, 彦文娇. 等参情形的丘成桐第一特征值猜想. 中国科学: 数学, 2018, 48: 819–826]
176 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric hypersurfaces and complex structures. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2022, 42: 2223–2229
177 Tang Z Z, Yan W J. On the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces. Sci China Math, 2023, 66: 143–162
178 Tang Z Z, Yan W J. Orthogonal almost complex structure and its Nijenhuis tensor. arXiv:2401.14213, 2024
179 Tang Z Z, Zhang W P. η-invariant and a problem of Bérard-Bergery on the existence of closed geodesics. Adv Math, 2014, 254: 41–48
180 Tang Z Z, Zhang Y S. Minimizing cones associated with isoparametric foliations. J Differential Geom, 2020, 115:

367–393
181 Terng C L. Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups. J Differential Geom, 1985, 21: 79–107
182 Terng C L. Convexity theorem for isoparametric submanifolds. Invent Math, 1986, 85: 487–492
183 Terng C L, Thorbergsson G. Submanifold geometry in symmetric spaces. J Differential Geom, 1995, 42: 665–718
184 Thorbergsson G. Dupin hypersurfaces. Bull Lond Math Soc, 1983, 15: 493–498
185 Thorbergsson G. Isoparametric foliations and their buildings. Ann of Math (2), 1991, 133: 429–446
186 Thorbergsson G. A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations. In: Handbook of Differential Geometry, vol. I. Amsterdam: North-Holland, 2000, 963–995
187 Thorbergsson G. Singular Riemannian foliations and isoparametric submanifolds. Milan J Math, 2010, 78: 355–370
188 Wang C P, Xie Z X. Classification of Möbius homogenous surfaces in $\mathbb{S}^4$. Ann Global Anal Geom, 2014, 46: 241–257
189 Wang Q M. Isoparametric hypersurfaces in complex projective spaces. In: Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, vols. 1, 2, 3. Beijing: Science Press, 1982, 1509–1523
190 Wang Q M. Isoparametric maps of Riemannian manifolds and their applications. In: Advances in Science of China, Mathematics, 2. New York: Wiley-Intersci, 1986, 79–103
191 Wang Q M. Isoparametric functions on Riemannian manifolds. I. Math Ann, 1987, 277: 639–646
192 Wang Q M. On the topology of Clifford isoparametric hypersurfaces. J Differential Geom, 1988, 27: 55–66
193 Wang Q M, Sterling I. On a class of minimal hypersurfaces in R^n. Math Ann, 1994, 298: 207–251
194 West A. Isoparametric systems. In: Geometry and Topology of Submanifolds. Singapore: World Scientific, 1989, 222–230
195 Xie Y Q. Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions. Acta Math Sin (Engl Ser), 2015, 31: 1963–1969
196 Xu H W, Xu Z Y. The Chern conjecture for minimal hypersurfaces in a sphere and its related problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1723–1734 [许洪伟, 许智源. 球面中极小超曲面的陈省身猜想及其相关问题. 中国科学: 数学, 2024, 54: 1723–1734]
197 Xu M. Isoparametric hypersurfaces in a Randers sphere of constant flag curvature. Ann Mat Pura Appl (4), 2018, 197: 703–720
198 Xu M. The Minkowski norm and Hessian isometry induced by an isoparametric foliation on the unit sphere. Sci China Math, 2022, 65: 1485–1516
199 Xu M, Tan J, Xu N. Isoparametric hypersurfaces induced by navigation in Lorentz Finsler geometry. Acta Math Sin (Engl Ser), 2023, 39: 1547–1564
200 Yang H C, Cheng Q M. Chern's conjecture on minimal hypersurfaces. Math Z, 1998, 227: 377–390
201 Yau S-T. Problem section. In: Seminar on Differential Geometry. Annals of Mathematics Studies, vol. 102. Princeton: Princeton Univ Press, 1982, 669–706
202 Yau S-T. Selected Expository Works of Shing-Tung Yau with Commentary, Volume 1. Advanced Lectures in Mathematics Series, vol. 28. Somerville: Int Press, 2014
203 Yin S-T, He Q. The maximum diam theorem on Finsler manifolds. J Geom Anal, 2021, 31: 12231–12249

An overview of the development of isoparametric theory

Jianquan Ge, Chao Qian, Zizhou Tang & Wenjiao Yan

Abstract Since Cartan pioneered the study of isoparametric hypersurfaces in real space forms, the field has experienced a century of intricate development. Isoparametric theory has formed close connections with various fields of mathematics and theoretical physics, leading to significant interdisciplinary integration. In this paper, we aim to provide a comprehensive overview of the development, generalization, and theoretical applications of isoparametric theory.

Keywords isoparametric hypersurface, isoparametric function, minimal submanifold

MSC(2020) 53C12, 53C20, 53C30, 53C40

doi: 10.1360/SSM-2024-0099