中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 9 期: 1093～1109
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Young 表与 $\mathrm{U}_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 的晶体基

刘军丽, 杨士林 *

北京工业大学应用数理学院, 北京 100124
E-mail: slyang@bjut.deu.cn

收稿日期: 2008-06-18; 接受日期: 2008-12-26; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10671016, 10771014) 和北京市自然科学基金 (批准号: 1062003) 资助项目

摘要 设 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 是对应 Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的量子包络超代数. 利用满足一定条件的半标准 Young 表, 给出有限维既约 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 模晶体图的实现. 建立晶体图张量积分解的广义 Littlewood-Richardson 法则.

关键词 量子群 晶体基 Young 图 Young 表

MSC(2000) 主题分类 **17B37, 81R50**

1 引言

量子群这一术语是由 Drinfeld 和 Jimbo 在研究量子 Yang-Baxter 方程 (产生于 2 维可解格模型) 时独立提出的. 量子群是一类 Hopf 代数, 它是 Kac-Moody Lie 代数泛包络代数的形变. 过去的二十年, 在数学及数学物理的许多分支中, 如 Kac-Moody 代数的表示论、代数表示论和几何表示论等领域, 量子群是基本的代数结构. 特别地, 由 Kashiwara[1] 和 Lusztig[2] 独立提出的晶体基或典范基理论为研究量子群的表示提供了强有力的组合和几何工具.

设 $U_q(\mathfrak{g})$ 是可对称化 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的量子包络代数. 对于每个可积 $U_q(\mathfrak{g})$- 模 M, 在 $q=0$ 时存在一组基, 称为晶体基, 它在算子 $\tilde{e}_i$ 和 $\tilde{f}_i$ 的作用下不变, 算子 $\tilde{e}_i$ 和 $\tilde{f}_i$ 通常称为 Kashiwara 算子, 其在张量积研究中具有很好的作用. 对于 A_n, B_n, C_n, D_n(参见文献 [3,4]) 和 G_2[5] 型 Lie 代数的量子包络代数, 其晶体基可精确得用 Young 表的语言给出. 对于上述几种类型的 Lie 代数, 利用文献 [3] 中的晶体结构 Nakashima 在文献中 [6] 证明张量积分解的广义 Littlewood-Richardson 法则. 一般地, Lie 超代数的表示不一定是完全可约的. 然而, Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 在超代数理论中非常特殊, 因为它是唯一的其有限维表示完全可约的 Lie 超代数 [7]. 之后, Musson 和 Zou 利用更为标准的晶体基的定义给出了关于正交辛型 Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的晶体基理论 [8], 然而在他们的工作中没有用到 Young 表的方法, 注意到既约 $\mathrm{osp}(1|2n)$- 模存在 Young 表基 [9,10], 因此是否可以利用文献 [9] 中的方法构造正交辛型 Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 张量表示的晶体基是一个有意义的问题.

众所周知, Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的量子包络代数 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 是 Hopf 超代数. 其基本表示与 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的基本表示类似. 本文考虑张量积下稳定的 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 表示. 一般地,

引用格式: 刘军丽, 杨士林. Young 表与 $\mathrm{U}_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 的晶体基. 中国科学 A, 2009, 39(9): 1093–1109
Liu J L, Yang S L. Young Tableaux and Crystal Base for $\mathrm{U}_q(\mathrm{osp}(1|2n))$. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0080-0

$U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模的张量积也是完全可约的. 本文目的是用广义 Young 表的语言来描述晶体图, 将证明最高权为 λ 的有限维不可约 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模 $L(\lambda)$ 对应一个 (广义)Young 图 Y. 精确些讲, 模 $L(\lambda)$ 的晶体基可由满足一定条件的型为 Y 的半标准表组成的集合 $B(Y)$ 来标定. 这里 $B(Y)$ 的晶体结构由 Far-Eastern 读法给出, 且它是连通的. 进一步, 我们精确地得到了张量积分解的广义 Littlewood-Richardson 法则.

本文结构如下: 第 2 节和第 3 节介绍一些关于 Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 及其量子包络代数 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 的基本结论并固定一些记号, 并给出 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模的晶体基和晶体图的定义; 第 4 节里我们建立 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模的晶体基与 Young 图以及 Young 表之间的对应关系; 本文最后一节讨论晶体图的张量积分解的广义 Littlewood-Richardson 法则.

无特殊声明, 本文基本域是复数域 $\mathbb{C}$. 向量空间与其对偶间的偶对记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2 量子超代数 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$

我们首先回顾本文将用到的一些基本事实及记号.

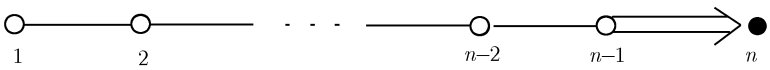
设 $\mathfrak{h}^*$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 具有一组基 $\{\varepsilon_i|1\leqslant i\leqslant n\}$, $(\cdot,\cdot):\mathfrak{h}^*\times\mathfrak{h}^*\to\mathbb{C}$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 上非退化双线性型, 其定义为 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$. $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的单根为

$$\begin{aligned}&\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\quad i=1,2,\ldots,n-1;\\&\alpha_n=\varepsilon_n,\end{aligned}\tag{1}$$

$\mathrm{osp}(1|2n)$ 的基本权为

$$\begin{aligned}&\omega_i=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_i,\qquad i=1,2,\ldots,n-1;\\&\omega_n=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n).\end{aligned}\tag{2}$$

其中 α_i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 是偶单根, α_n 是奇单根. $\mathrm{osp}(1|2n)$ 关于这一根系的 Dynkin 图是



Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的 Dynkin 图

记 Lie 超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的 Cartan 矩阵为 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$. 设 $\Pi=\{\alpha_i|i=1,2,\ldots,n\}$, $\Pi^\vee=\{\alpha_i^\vee|i=1,2,\ldots,n\}\subset\mathfrak{h}$ 是两个线性无关集, 它们满足: 对所有的 $1\leqslant i,j\leqslant n$, $\langle\alpha_j,\alpha_i^\vee\rangle=a_{ji}$. 令

$$\begin{aligned}&P=\mathbb{Z}\omega_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\omega_n,\\&P^\vee=\mathbb{Z}\alpha_1^\vee\oplus\mathbb{Z}\alpha_2^\vee\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\alpha_n^\vee,\\&Q=\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\mathbb{Z}\alpha_2\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\alpha_n.\end{aligned}$$

易知

$$P=\{\lambda\in\mathfrak{h}^*|\lambda(h)\in\mathbb{Z},\,h\in P^\vee\}.$$

设 q 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的未定元, $\mathscr{A}=\mathbb{C}[\sqrt{q},\sqrt{q}^{-1}]$, $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 的商域. 对于 $n\in\mathbb{Z}$, 设

$$[n]_q=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}},$$

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 令

$$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [2]_q[1]_q.$$

李超代数 $\mathrm{osp}(1|2n)$ 的量子包络超代数定义如下.

定义 2.1 量子超代数 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 是由 E_i, F_i, K_i 和 $K_i^{-1}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 生成的, 且满足生成关系:

$$\begin{aligned}
&K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1,\\
&K_iK_j = K_jK_i,\\
&K_iE_jK_i^{-1} = q^{(\alpha_i,\alpha_j)}E_j, \quad K_iF_jK_i = q^{-(\alpha_i,\alpha_j)}F_j,\\
&E_iF_j - (-1)^{[E_i][F_j]}F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},\\
&\sum_{s=0}^{1-a_{ij}}(-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_q E_i^{1-a_{ij}}E_jE_i^s = 0, \qquad i \neq j \text{ 且 } (i,j) \neq (n, n-1),\\
&\sum_{s=0}^{1-a_{ij}}(-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_q F_i^{1-a_{ij}}F_jF_i^s = 0, \qquad i \neq j \text{ 且 } (i,j) \neq (n, n-1),\\
&E_n^3E_{n-1} - (q-1+q^{-1})E_n^2E_{n-1}E_n - (q-1+q^{-1})E_nE_{n-1}E_n^2 + E_{n-1}E_n^3 = 0,\\
&F_n^3F_{n-1} - (q-1+q^{-1})F_n^2F_{n-1}F_n - (q-1+q^{-1})F_nF_{n-1}F_n^2 + F_{n-1}F_n^3 = 0,
\end{aligned}$$

其中 $[E_i]$, $[F_j]$ 分别表示 E_i, F_j 的分次次数. 除了生成元 E_n 和 F_n 是奇分次的以外, 其他生成元都是偶分次的.

3 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 的晶体基

对于 Kac-Moody 超代数, 其可积表示的晶体基存在且唯一的 [8,11]. 为进一步讨论 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 的有限维可积表示的晶体图, 我们还需要以下记号. 对于 $\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n \in P$, 记 $L(\lambda)$ 是权为 λ 的不可约最高权模. 设

$$\Sigma = \Big\{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant i \leqslant n-1 \text{ 且 } \lambda(\alpha_n^\vee) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\Big\}$$

及

$$\Sigma^+ = \{\lambda \in \Sigma | \lambda(\alpha_i^\vee) \geqslant 0,\, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

则可把 Σ 和 Σ^+ 写成

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_0, \quad \Sigma^+ = \Sigma_1^+ \cup \Sigma_0^+,$$

其中

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant n\},\\
&\Sigma_0 = \Big\{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant i \leqslant n-1 \text{ 且 } \lambda(\alpha_n^\vee) \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\Big\},\\
&\Sigma_1^+ = \{\lambda \in \Sigma^+ | \lambda(\alpha_n^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\},\\
&\Sigma_0^+ = \Big\{\lambda \in \Sigma^+ | \lambda(\alpha_n^\vee) \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Big\}.
\end{aligned}$$

对于 $\mathbb{Z}_2$- 分次的 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模 $L(\lambda)$, 设 Φ 是 $\mathbb{Z}_2$- 分次向量空间分次转换映射, 众所周知, 作为 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模 $\Phi L(\lambda) \cong L(\lambda)$. 为简便起见, 我们不考虑分次, 注意到利用文献 [8] 中的方法我们可以恢复其分次结构.

设 $R^+ = 2\mathbb{Z}_+\alpha_n + \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha_i$.

注记 3.1[8] $L(\lambda)_0$ 的权包含在 $\lambda - R^+$ 中, $L(\lambda)_1$ 的权包含在 $\lambda - \alpha_n - R^+$ 中. 因此, $L(\mu)$ 表示偶分次部分, $\Phi L(\mu)$ 表示奇分次部分.

本文用到了文献 [8, 11] 中的如下结果. 对任意 $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 令 $t = \sqrt{q}\,\mathbf{i}$, 定义

$$F_i^{(m)} = \begin{cases} F_i^m/[m]_q!, & \text{如果 } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ F_n^m/[m]_t!, & \text{如果 } i = n, \end{cases}$$

和

$$E_i^{(m)} = \begin{cases} E_i^m/[m]_q!, & \text{如果 } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ E_n^m/[m]_t!, & \text{如果 } i = n. \end{cases}$$

命题 3.2 ([11, 命题 4.1]) 设 M 是可积模. 固定 $i \in I$, 并设 $u \in M_\lambda$. 则 u 可以唯一的表达为

$$u = \sum_{k=0}^{N} F_i^{(k)} u_k$$

其中 $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 对任意 k, $u_k \in M_{\lambda + k\alpha_i} \cap \ker E_i$.

相应地, 在 M 上定义 Kashiwara 算子 $\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$,

$$\tilde{f}_i u = \sum_{k=0}^{N} F_i^{(k+1)} u_k, \qquad \tilde{e}_i u = \sum_{k=1}^{N} F_i^{(k-1)} u_k.$$

设 A_0 是 $\mathscr{F}$ 在 $q = 0$ 处的局部化.

定义 3.3 ([11, 定义 4.1]) 可积模 M 的晶体基是满足如下条件的派对 (L, B),

(1) L 是 M 的自由 A_0- 子模, 作为 $\mathscr{F}$ 上的向量空间 L 生成 M.

(2) $L = \oplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$, 其中 $L_\lambda = M_\lambda \cap L$.

(3) 对于任意 $i \in I$, 有 $\tilde{f}_i L \subset L$, $\tilde{e}_i L \subset L$.

(4) $B = \sqcup B_\lambda$ 是域 $\mathbb{C}$ 上向量空间 L/qL 的一组基, 其中 $B_\lambda = B \cap (L_\lambda/qL_\lambda)$.

(5) 对于任意 $i \in I$, $\tilde{f}_i B \subset B \cup \{0\}$, $\tilde{e}_i B \subset B \cup \{0\}$.

(6) 对于 $b, b' \in B$, 有 $b = \tilde{f}_i b'$ 当且仅当 $b' = \tilde{e}_i b$.

对于一个晶体基 (L, B), 根据条件 (6) 可画图:

$$b \xrightarrow{\ i\ } b' \quad \text{当且仅当} \quad \tilde{f}_i b = b' \quad (i \in I).$$

对于 $b \in B$, 定义

$$\varphi_i(b) = \max\{k | \tilde{f}_i^{\,k} b \neq 0\} \quad \text{和} \quad \tau_i(b) = \max\{k | \tilde{e}_i^{\,k} b \neq 0\}.$$

如果 $b \in B_\lambda$, 则设 $\mathrm{wt}(b) = \lambda$ 并称之为 b 的权. 此时 B 叫做 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 晶体.

定理 3.4 ([8, 定理 4.1]) 设 M_1, M_2 是有限维可积模. 如果 (L_i, B_i) 是 M_i, $i = 1, 2$ 的

晶体基, 则 $(L_1\otimes L_2, B_1\otimes B_2)$ 是 $M_1\otimes M_2$ 的晶体基, 且对任意的 $i\in I$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$, 有

$$\tilde{f}_i(b_1\otimes b_2)=\begin{cases}\tilde{f}_ib_1\otimes b_2, & \text{如果}\quad \varphi_i(b_1)>\tau_i(b_2),\\ b_1\otimes \tilde{f}_ib_2, & \text{如果}\quad \varphi_i(b_1)\leqslant \tau_i(b_2),\end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_1\otimes b_2)=\begin{cases}\tilde{e}_ib_1\otimes b_2, & \text{如果}\quad \varphi_i(b_1)\geqslant \tau_i(b_2),\\ b_1\otimes \tilde{e}_ib_2, & \text{如果}\quad \varphi_i(b_1)<\tau_i(b_2),\end{cases}$$

这里, 把 $(b_1,b_2)\in B_1\times B_2$ 写成 $b_1\otimes b_2$, 并认为 $b_1\otimes 0=0\otimes b_2=0$.

下面介绍两类重要的既约 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模 [8]. 设

$$V=\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbb{C}(q)v_j\right)\oplus\mathbb{C}(q)v_0\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbb{C}(q)v_{\bar{j}}\right)$$

指标集 $\mathbf{I}=\{1,2,\ldots,n,0,\bar{n},\ldots,\bar{1}\}$. 固定 $\mathbf{I}$ 的一个序如下:

$$1\prec 2\prec\ldots\prec n\prec 0\prec\bar{n}\prec\ldots\prec\bar{1}.$$

V 的 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 既约模结构为:

$$K_iv_j=q^{(\alpha_i,\varepsilon_j)}v_j;$$

当 $i\neq n$ 时,

$$F_iv_j=\begin{cases}v_{i+1}, & j=i,\\ v_{\bar{i}}, & j=\overline{i+1},\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad E_iv_j=\begin{cases}v_i, & j=i+1,\\ v_{\overline{i+1}}, & j=\bar{i},\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

当 $i=n$ 时,

$$F_nv_j=\begin{cases}v_0, & j=n,\\ v_{\bar{n}}, & j=0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad E_nv_j=\begin{cases}-v_0, & j=\bar{n},\\ v_n, & j=0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\mathrm{wt}(v_j)=\varepsilon_j$, $\mathrm{wt}(v_0)=0$, $\mathrm{wt}(v_{\bar{j}})=-\varepsilon_j$, $j=1,2,\ldots,n$. 此时, 我们称 V 为 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 的向量表示.

设 $\mathbf{L}=\bigoplus_{j\in I}A_0v_j$, $\mathbf{B}=\{\boxed{j}=v_j+qL|j\in I\}$. 易证 $(\mathbf{L},\mathbf{B})$ 是 V 的晶体基 [8], 其晶体图为

$$\boxed{1}\xrightarrow{1}\boxed{2}\xrightarrow{2}\cdots\xrightarrow{n-1}\boxed{n}\xrightarrow{n}\boxed{0}\xrightarrow{n}\boxed{\bar{n}}\xrightarrow{n-1}\cdots\xrightarrow{2}\boxed{\bar{2}}\xrightarrow{1}\boxed{\bar{1}}.$$

设

$$V_{\mathrm{sp}}=\bigoplus_{s_i=\pm}\mathbb{C}(q)(s_1,s_2,\ldots,s_n)$$

是 2^n- 维向量空间. $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 在 V_{sp} 上的作用定义为

$$K_i(s_1,s_2,\ldots,s_n)=q^{(\alpha_i,wt(s_1,s_2,\ldots,s_n))}(s_1,s_2,\ldots,s_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$K_n(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\mathbf{i}q^{(\alpha_n,wt(s_1,s_2,\ldots,s_n))}(s_1,s_2,\ldots,s_n),$$

$$F_i(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\begin{cases}(s_1,\ldots,s_{i-1},-,+,s_{i+2},\ldots,s_n), & \text{如果}\quad i\neq n,(s_i,s_{i+1})=(+,-),\\ (s_1,\ldots,s_{n-1},-), & \text{如果}\quad i=n,s_n=+,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$E_i(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\begin{cases}(s_1,\ldots,s_{i-1},+,-,s_{i+2},\ldots,s_n), & \text{如果}\quad i\neq n,(s_i,s_{i+1})=(-,+),\\ -\frac{1}{[2]_t}\mathbf{i}(s_1,\ldots,s_{n-1},+), & \text{如果}\quad i=n,s_n=-,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

元素 $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ 的权定义为

$$\mathrm{wt}(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\frac{1}{2}(s_1\varepsilon_1+s_2\varepsilon_2+\cdots+s_n\varepsilon_n).$$

V_{sp} 称为 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 的旋转表示. 易证 V_{sp} 同构于 $V(\omega_n)$, 并且具有晶体基 $(L_{\mathrm{sp}},B_{\mathrm{sp}})$, 其中

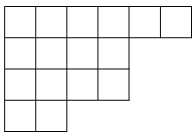
$$L_{\mathrm{sp}}=\bigoplus_{s_i=\pm}A_0(s_1,s_2,\ldots,s_n),$$

$$B_{\mathrm{sp}}=\{\overline{(s_1,s_2,\ldots,s_n)}=(s_1,s_2,\ldots,s_n)+qL_{\mathrm{sp}}\mid s_i=\pm\}.$$

4 Young 表与晶体基

首先回顾一下基本概念.

(1) Young 图是一些格子的全体, 这些格子按照左对齐且每行的格子数弱减的方式放置. 写出每行的格子数, 这就得到整数 n 的一个划分, 其中 n 是 Young 图中格子的总数. 反过来, n 的每个划分都对应一个 Young 图. 例如, 16 的划分 $6+4+4+2$ 对应的 Young 图是

$Y=$ 

(2) 如果 Young 图中的格子满足没有格子在它的右边和下方, 则称这样的格子是可移除的角. 一个 Young 图去掉这个可移除的角后仍是一个 Young 图.

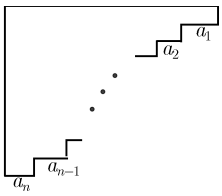
(3) Young 图中可添加格子的位置, 如果添加格子后得到的仍是 Young 图, 则称为余角, 且添加的格子是新 Young 图的可移除角.

一个划分 λ 或 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ 是一个弱减的正整数序列 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m$. 通常用小写希腊字母表示一个划分. 划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ 可以用 Young 图来描述. 划分 λ 称为 Young 图的型, 其中这个 Young 图的第 j 行有 λ_j 个格子. 例如, 上面的 Young 图 Y 具有型 $\lambda=(6,4,4,2)$. 有时也写成 $Y=(6,4,4,2)$.

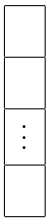
任意一个支配整权 $\lambda=a_1\omega_1+a_2\omega_2+\cdots+a_{n-1}\omega_{n-1}+2a_n\omega_n$, $a_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 根据 (2) 都可写成 $\lambda=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\cdots+\lambda_{n-1}\varepsilon_{n-1}+\lambda_n\varepsilon_n$, 其中

$$\lambda_1=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad \lambda_2=a_2+a_3+\cdots+a_n,\quad \ldots,\quad \lambda_n=a_n.$$

因此, 我们得到一个型为 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 的 Young 图 Y.

$Y=$ 

我们希望存在一个图与支配整权 ω_n 的对应. 为此我们引入广义 Young 图.

$Y_{\mathrm{sp}} =$ 

它由半个格子组成 (宽是方格子的一半), 并考虑型为 Y_{sp} 的广义 Young 表, 它中所填的数字来自 $\mathbf{I}_{\mathrm{sp}} = \{1, 2, \ldots, n, \bar{n}, \ldots, \bar{2}, \bar{1}\}$ 且

$$1 \prec 2 \prec \cdots \prec n \prec \bar{n} \prec \cdots \prec \bar{2} \prec \bar{1}.$$

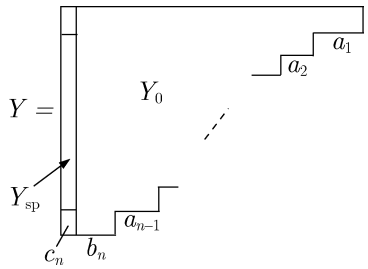
现在, 我们按如下方式建立型为 Y_{sp} 的广义 Young 表与 B_{sp} 中元 $\overline{(s_1, \ldots, s_n)}$ 之间的关系, 如果第 i 个分量是 $+$ $(-)$, 对应写出数字 i $(\bar{i})$, 然后把这些数字按照 $\mathbf{I}_{\mathrm{sp}}$ 中的关系填入 Y_{sp} 的格子中. 例, 设 $n = 3$, 则 $(-, -, +)$ 对应的广义 Young 表是 $\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline \bar{2} \\ \hline \bar{1} \\ \hline\end{array}$. 因此, B_{sp} 的晶体图可以看作是下面的集合,

$$\left\{ \begin{array}{|c|}\hline t_1 \\ \hline t_2 \\ \hline \vdots \\ \hline t_n \\ \hline\end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_i \in I_{\mathrm{sp}}, t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_n \\ i \text{ 和 } \bar{i} \text{ 不同时出现} \end{array} \right\}.$$

Kashiwara 算子的作用是

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline i \\ \hline \vdots \\ \hline \overline{i+1} \\ \hline\end{array} \xrightarrow{i} \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline i+1 \\ \hline \vdots \\ \hline \bar{i} \\ \hline\end{array} \quad (i \neq n), \qquad \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline n \\ \hline \\ \hline\end{array} \xrightarrow{n} \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \bar{n} \\ \hline \\ \hline\end{array}.$$

对任意的支配整权 $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n$ $(a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, 我们得到一个 (广义) Young 图 $Y = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$,



其中 $\lambda_i = \sum_{j=i}^{n-1} a_j + \frac{1}{2}a_n$, $a_n = 2b_n + c_n$, $c_n = 1$ 或 0. 即每个支配整权 $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n$ $(a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 都与一个 (广义) Young 图对应. 因此, 我们可以把 $B(\lambda)$ 看成是 $\mathbf{B}^{\otimes N} \otimes B_{\mathrm{sp}}$ 的含有权为 λ 的极大向量的连通分支, 其中, $N = \sum_{i=1}^{n-1} ia_i + nb_n$.

设 Y 是关于 λ 的 (广义) Young 图.

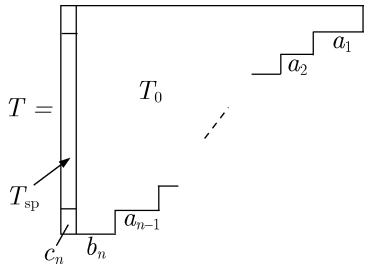
定义 4.1 设 Y 是至多有 n 行的 (广义) Young 图. 型为 Y 的 (广义) 表是指 Y_0 部分填的数字取自 $\mathbf{I}$, Y_{sp} 中填的数字取自 $\mathbf{I}_{\mathrm{sp}}$. 这样的 (广义) 表称为是半标准的如果所填数字还满足

(1) 行若增, 但零不重复出现;

(2) 列严格增, 允许零重复出现;

(3) Y_{sp} 中严格增, 且 i 和 $\bar{i}$ 不同时出现.

对于表 T, 我们记成



定义 T 的权为

$$\mathrm{wt}(T) = \sum_i (k_i - \bar{k_i})\varepsilon_i + \frac{1}{2}\sum_i (l_i - \bar{l_i})\varepsilon_i,$$

其中 k_i $(\bar{k_i})$ 表示在 T_0 中 i $(\bar{i})$ 出现的次数, l_i $(\bar{l_i})$ 表示 i $(\bar{i})$ 在 T_{sp} 中出现的次数. 注意 $l_i, \bar{l_i} = 0$ 或 1, 且不同时为 1.

为了建立 Young 表 T 与 $\mathbf{B}^{\otimes N}$ 之间的关系, 其中 N 是 T 中格子的总数, 我们引入 Far-Eastern 读法.

定义 4.2 Far-Eastern 读法是列按从右到左, 每列按从上到下的顺序读出 Young 表 T 中的数字.

例如

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 0 & \bar{1} \\ \cline{1-3} 3 & 0 \\ \cline{1-2}\end{array} = \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{\bar{1}} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{0} \otimes \boxed{0} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3}$$

Far-Eastern 读法

我们希望按照这一读法, 所有 (广义) 半标准表组成的集合具有 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 晶体结构. 为此, 我们需要附加条件来保证 $B(\lambda)$ 的晶体图连通.

设 $B(Y)$ 是有满足如下条件的 (广义) 半标准表 T 组成的集合:

(1) 如果 T 含有下面这样的列,

$$\begin{array}{c|c|}
 & \\ \hline
p \longrightarrow & i \\ \hline
 & \\
 & \\
q \longrightarrow & \bar{i} \\ \hline
 & \\ \hline
\end{array}$$

则 $(q-p)+i>m$, 其中 m 是这列中格子的总数.

(2) 如果 T 中相邻两列具有下面前两种的形式之一, $p \leqslant q < r \leqslant s$ 且 $a \leqslant b < n$:

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|c}
p \longrightarrow & a & & a & & a & a & a & \\
q \longrightarrow & & b & b & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
r \longrightarrow & & \bar{b} & \bar{b} & & & & & \\
s \longrightarrow & & \bar{a}, & & \bar{a}, & & \bar{a}, & \bar{a} & \bar{a},
\end{array}$$

则 $(q-p)+(s-r)<(b-a)$. 显然, 具有后两种形式之一的表不属于 $B(Y)$.

(3) 如果 T 中相邻两列具有下面的形式之一, $p \leqslant q < r = q+1 \leqslant s$ 且 $a < n$:

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|c}
p \longrightarrow & a & & a & & a & & a & & \\
 & & & & & & & & & \\
q \longrightarrow & & n & & n & & 0 & & 0 & \\
r \longrightarrow & & \bar{n} & & 0 & & 0 & & \bar{n} & \\
 & & & & & & & & & \\
s \longrightarrow & & \bar{a}, & & \bar{a}, & & \bar{a}, & & \bar{a}, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|c}
p \longrightarrow & a & & a & & a & & a & & \\
 & & & & & & & & & \\
q \longrightarrow & n & & n & & 0 & & 0 & & \\
r \longrightarrow & \bar{n} & & 0 & & 0 & & \bar{n} & & \\
 & & & & & & & & & \\
s \longrightarrow & & \bar{a}, & & \bar{a}, & & \bar{a}, & & \bar{a}, &
\end{array}$$

则 $(q-p)+(s-r)=s-p-1<n-a$.

(4) T 中不含有下面情形的相邻两列, $p<s$:

$$\begin{array}{ccc|c|c|c|c|}
p\longrightarrow & & n & & n & & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
s\longrightarrow & & & \bar{n}, & & 0, & & 0, & \bar{n}.
\end{array}$$

命题 4.3 设 $\Psi: B(Y)\longrightarrow \mathbf{B}^{\otimes N}$ ($\otimes B_{\mathrm{sp}}$ 如果 Y 是广义 Young 图) 是由 Far-Eastern 读法确定的映射, 则 $\Psi(B(Y))\cup\{0\}$ 在 Kashiwara 算子 $\tilde{e}_i$ 和 $\tilde{f}_i$ 作用下不变. 从而, 这一读法在 $B(Y)$ 上定义了一个晶体结构.

证明 设 $T\in B(Y)$, 首先证明 $i\neq n$ 时, $\tilde{f}_iT\in B(Y)\cup\{0\}$. 假设 $\tilde{f}_iT=T'\neq 0$. $\tilde{f}_i$ 将 T 中某个格子 $b=\boxed{i}$ 变成 $\boxed{i+1}$ 或把 $b=\boxed{\overline{i+1}}$ 变成 $\boxed{\bar{i}}$. 我们仅考虑第一种情况, 第二种情况可类似证明. 设 $\tilde{f}_i$ 将 T 中格子 $b=\boxed{i}$ 变成 $\boxed{i+1}$, 即

$$T=\begin{array}{c|c|c}
 & A & \\ \hline
B & i & D \\ \hline
 & C &
\end{array}\quad\xrightarrow{i}\quad \tilde{f}_iT=\begin{array}{c|c|c}
 & A & \\ \hline
B & i+1 & D \\ \hline
 & C &
\end{array}$$

设 $b'=\boxed{j}$ 是位于 A,B,C,D 位置处的格子, 如果 b' 位于位置 A 或 B, 则 $j\preceq i$ 因为 T (广义) 半标准的. 如果 b' 位于位置 C, 易知 $j\succeq i+1$. 如果 $j=i+1$, 则根据 Kashiwara 算子在张量积上的运算法则, $\tilde{f}_i$ 不会作用在 b 上, 从而 $j\geqslant i+2$. 如果 b' 位于位置 D, 则 $j\geqslant i$. 如果 $j=i$, 则 $\tilde{f}_i$ 作用在 b' 上, 这是不可能的, 从而 $j\geqslant i+1$. 因此, $\tilde{f}_iT$ 仍是 (广义) 半标准的. 由于 T 满足条件 (4), 易知 T' 也满足 (4).

下面验证 T' 满足条件 (1)–(3).

(1) 再设 $\boxed{\overline{i+1}}$ 与 $\boxed{i+1}$ 出现在 T' 的同一列如图:

$$\begin{array}{c}
\\ \hline
i \\ \hline
\vdots \\ \hline
\overline{i+1} \\ \hline
\\ \hline
\end{array}\quad\xrightarrow{i}\quad
\begin{array}{c}
\\ \hline
i+1 \\ \hline
\vdots \\ \hline
\overline{i+1} \\ \hline
\\ \hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \longleftarrow p \\ \\ \longleftarrow q, \\ \\ \\
\end{array}$$

即证 $q-p+i+1>m$.

设 $j=\max\{j|j<i, j$ 和 $\bar{j}$ 出现在同时含有 i 和 $\overline{i+1}$ 的列$\}$. 设 j ($\bar{j}$) 出现在第 k 行 (l

行). 若不存在这样的数字, 则易知 $q-p+i+1>m$. 若存在这样的数字 j,

$$
\begin{array}{c|c|}
 & j \\ \hline
\longrightarrow k & A \\ \hline
 & i \\ \hline
\longrightarrow p & \\
 & \vdots \\
 & \\ \hline
\longrightarrow q & \overline{i+1} \\ \hline
 & B \\ \hline
\longrightarrow l & \bar{j} \\ \hline
 & \\ \hline
\end{array}
$$

则没有数字 x 出现在 A 且 $\bar{x}$ 出现在 B 处. 所以 $p-k+l-q\leqslant i+1-j$. 从而 $q-p+i+1\geqslant l-k+j$. 因为 T 满足 (1), 所以 $l-k+j>m$. 即 $q-p+i+1>m$. 故 T' 满足条件 (1).

(2) 设 T' 有下面形式的相邻两列,

$$
(1)\quad \begin{array}{c|c|}
i+1 & \\
 & \\
 & b \\
 & \\
 & \bar{b} \\
 & \\
 & \overline{i+1}
\end{array}
\quad 或 \quad (2)\quad \begin{array}{c|c|}
a & \\
 & \\
 & i+1 \\
 & \\
 & \overline{i+1} \\
 & \\
 & \bar{a}\ .
\end{array}
$$

则 T 必含有

$$
(a)\quad \begin{array}{c|c|}
i & \\
 & \\
 & b \\
 & \\
 & \bar{b} \\
 & \\
 & \overline{i+1}
\end{array}
\quad 或 \quad (b)\quad \begin{array}{c|c|}
a & \\
 & \\
 & i \\
 & \\
 & \overline{i+1} \\
 & \\
 & \bar{a}\ .
\end{array}
$$

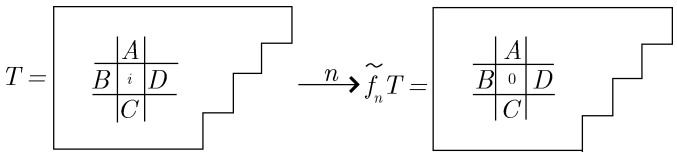
若 T 含有形如 (a) 的两列, 取 $j=\min\{s>i$ 且 $\bar{s}$ 出现在 s 所在列的右列$\}$, 且 j 和 i 在同

一列,

$$
\begin{array}{c|ll}
i & & \longleftarrow p \\
\boxed{A} & & \\
j & & \longleftarrow k \\
 & b & \longleftarrow q \\
 & \bar{b} & \longleftarrow r \\
 & \bar{j} & \longleftarrow l \\
 & \boxed{B} & \\
 & \overline{i+1} & \longleftarrow s.
\end{array}
$$

则没有数字 x 出现在 A 且 $\bar{x}$ 出现在 B 处. 从而 $k-p+s-l \leqslant j-(i+1)$. 又 T 满足条件 (2), 则 $l-r+q-k<b-j$, 即 $s-r+q-p<b-(i+1)$.
因此, 如果 T' 含有形如 (1) 的两列, 则 T' 满足条件 (2). 对于形式 (2), 可用类似的方法证明. 同理可证 T' 满足条件 (3).

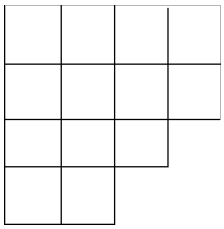
其次, 证明 $\tilde{f}_n T \in B(Y) \cup \{0\}$. 假设 $\tilde{f}_i T = T' \neq 0$. 此时 $\tilde{f}_n$ 把 T 中的某个格子 $b=\boxed{n}$ 变成 $\boxed{0}$ 或把 $b=\boxed{0}$ 变成 $\boxed{\bar{n}}$. 我们仅证第一种情况, 第二种情况证明类似. 设 $\tilde{f}_n$ 把 $b=\boxed{n}$ 变成 $\boxed{0}$, 即



设 $b'=\boxed{j}$ 是位于 A,B,C,D 位置处的格子, 如果 b' 位于位置 A 或 B, 则 $j \preceq n$ 因为 T (广义) 半标准的. 如果 b' 位于位置 C, 易知 $j \succeq 0$ 无需证明. 如果 b' 位于位置 D, 则 $j \succeq n$ 因为 $T \in B(Y)$. 如果 $j=n$ 或 $j=0$, 则 $\tilde{f}_n$ 将作用在 b' 上, 这是不可能的, 从而 $j \succ 0$, 且 $\tilde{f}_n T$ 是 (广义) 半标准的. 即对任意的 $T \in B(Y)$, $T'=\tilde{f}_i T \neq 0$ 都是 (广义) 半标准的. 又因为 T 满足条件 (1)–(4), 所以 T' 也满足条件 (1)–(4).

最后, 同理可证 $\tilde{e}_i T \in B(Y) \cup \{0\}$. 证毕.

例 4.4 设 $n=4$, $\lambda=\omega_2+\omega_3+3\omega_4$, 则



相应的广义表

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & \overline{3} \\ \hline 2 & 4 & 0 & \overline{1} \\ \hline 4 & \overline{4} & \overline{2} \\ \cline{1-3} \overline{3} & \overline{1} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

属于 $B(Y)$. 进而有

$$\tilde{e_3}T \in B(Y), \quad \tilde{f_3}T \in B(Y).$$

定理 4.5 设 $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n$ $(a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 是支配整权, $L(\lambda)$ 是最高权为 λ 的有限维既约 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 模. 设 Y 是型为 λ 的 (广义) Young 图, $B(Y)$ 是所有满足条件 (1)–(4) 的 (广义) 半标准表组成的集合. 则 $B(Y)$ 同构于 $L(\lambda)$ 的晶体图 $B(\lambda)$.

证明 设 $a_n = 2b_n + c_n$ ($c_n = 0$ 或 1), $\lambda_i = \sum_{j=i}^{n-1} a_j + \frac{1}{2}a_n$, $N = \sum_{i=1}^{n-1} ia_i + nb_n$. 根据完全可约性定理, 只需证明 $B(Y)$ 同构于 $\mathbf{B}^{\otimes N} \otimes B_{\mathrm{sp}}$ 的含有权为 λ 的极大向量的分支.

定义 T_Y 是下面的表, 它的第 i 行填的数字都是 i,

$$T_Y = \begin{array}{|c|c}\cline{1-1} 1 & 1 \quad \cdots \quad 1 \cdots 1 \\ \cline{1-1} 2 & 2 \quad \cdots \quad 2 \cdots 2 \\ \cline{1-1} \vdots & \vdots \\ \cline{1-1} n & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

a_1, a_2, a_{n-1}, c_n, b_n.

显然, $\mathrm{wt}(T_Y) = \lambda$. 我们断言 $B(Y)$ 与 $\mathbf{B}^{\otimes N} \otimes B_{\mathrm{sp}}$ 的含 T_Y 的分支同构. 根据 Far-Eastern 读法, T_Y 可以写成

$$T_Y = \underbrace{\boxed{1} \otimes \cdots \otimes \boxed{1}}_{a_1} \otimes \underbrace{\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \otimes \cdots \otimes \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}}_{a_2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array} \otimes \cdots \otimes \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}}_{b_n} \otimes T_{\mathrm{sp}}.$$

其中, 若 $c_n = 0$, T_{sp} 不出现, 若 $c_n = 1$,

$$T_{\mathrm{sp}} = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}$$

易证, 对任意 i, $\tilde{e}_i T_Y = 0$. 因此, 它是权为 λ 的极大向量.

下证对每个半标准表 $T \in B(Y)$, 都存在 $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_r \leqslant n$ 使得 $\tilde{e_{i_1}}\tilde{e_{i_2}} \cdots \tilde{e_{i_r}} T = T_Y$. 等价地, 即证若对任意 i, 都有 $\tilde{e_i} T = 0$, 则 $T = T_Y$.

设 $T \in B(Y)$ 并假设对任意 i, $\tilde{e}_i T = 0$. 设 k 是最大的非负整数, 使得 T 的前 k 行与 T_Y 相同.

假设 $k < n$, $b = \boxed{x}$ 是第 $k+1$ 行最右边的格子, 则 $x \succ k+1$. T_1 表示位于 $b = \boxed{x}$ 的东北位置的子表, T_2 是 $b = \boxed{x}$ 正下方的列, T_3 是 $b = \boxed{x}$ 所在列左边的所有列, T_0 是 T_3 正上方的部分, 如下图. 则 T 可分解为

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ & & T_0 & \\ k & k & \cdots & k \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ 2 & \cdots & 2 \\ & T_1 & \\ k & & \end{matrix} \\ \hline T_3 & \begin{matrix} x \\ T_2 \end{matrix} \end{array}\right] = T_1 \otimes \boxed{x} \otimes T_2 \otimes T_0 \otimes T_3.$$

因为对所有 i, $\tilde{e}_i T = 0$, 所以 $\tilde{e}_i(T_1 \otimes \boxed{x}) = 0$. 这蕴含着 $\tilde{e}_i T_1 = 0$ 且 $\varphi_i(T_1) \geqslant \tau_i(\boxed{x})$. 特别地, 当 $i \succeq k+1$ 时, $\tau_i(\boxed{x}) = 0$. 从而 $x = 0$ 或 $x \succeq \bar{k}$.

另一方面, 如果 $x = 0$, 则 $\tilde{e_n}(T_1 \otimes \boxed{0}) \neq 0$. 所以 $x \succeq \bar{k}$. 设 $x = \bar{j}$, 如果 $\bar{j} \succ \bar{k}$, 则 $\tilde{e_j}(T_1 \otimes \boxed{\bar{j}}) \neq 0$; 如果 $\bar{j} = \bar{k}$, 则根据条件 (1), $k+1-k+k = k+1 > m$, 其中 m 是 b 所在列的格子总数. 矛盾. 所以 $k = n$. 证毕.

5 晶体基的张量积分解

本节我们给出有限维可积模张量积分解的组合法则, 这一法则与文献 [8] 中的命题 5.8 一致.

晶体图反映了有限维可积模的结构, 因此, 我们只需考虑把晶体图的张量积分解情况, 即分解成不相交的连通分支的并.

设 $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n$ $(a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, $\mu = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_n\omega_n$ $(k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 是支配整权, Y 和 Y' 是对应于 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 和 $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ 的 (广义) Young 图, 其中, $\lambda_i = \sum_{j=i}^{n-1} a_j + \frac{1}{2}a_n$, $\mu_i = \sum_{j=i}^{n-1} k_j + \frac{1}{2}k_n$.

设 $Y = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n)$ 是 (广义) Young 图, 定义

$$Y[j] = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$Y[\bar{j}] = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j - 1, \ldots, \lambda_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$Y[0] = \begin{cases} Y, & \text{如果 } \lambda_n > 0, \\ \emptyset, & \text{如果 } \lambda_n = 0. \end{cases}$$

注意 $Y[j]$ 在很多情况下都不是 (广义) Young 图. 特别地, 当 $\lambda_n = 0$ 时, $Y[0]$ 不是 (广义) Young 图. 如果 Y' 是图, 但不是 (广义) Young 图, 则认为 $B(Y')$ 是空集. 对 $\boxed{*} \in \mathbf{B}$, 把 $Y[b] = Y[\boxed{*}]$ 记成 $Y[*]$. 众所周知, 把 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$ 晶体 $B(Y) \otimes B(Y')$ 分解成连通分支的

并就是找 $B(Y)\otimes B(Y')$ 中的极大向量.

定理 5.1 设 $\lambda=a_1\omega_1+a_2\omega_2+\cdots+a_n\omega_n$ $(a_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, $\mu=k_1\omega_1+k_2\omega_2+\cdots+k_n\omega_n$ $(k_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 是支配整权, Y 和 Y' 是关于 λ 和 μ 的 (广义) Young 图, 则存在 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 晶体同构

$$B(Y)\otimes B(Y')\cong\bigoplus_{\boxed{x_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{x_N}\in B(\mu)}B(Y[x_1,\ldots,x_N]),$$

或

$$B(Y)\otimes B(Y')\cong\bigoplus_{\boxed{x_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{x_{N+1}}\in B(\mu)}B(Y[x_1,\ldots,x_{N+1}]),$$

其中 $\oplus$ 表示晶体的直和.

为了证明这一定理, 先给出两个命题

命题 5.2 设 $\lambda=a_1\omega_1+a_2\omega_2+\ldots+a_n\omega_n$ $(a_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 是支配整权, Y 是关于 λ 的 (广义) Young 图, 则存在 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 晶体同构

$$B(Y)\otimes\mathbf{B}\cong\bigoplus_{\boxed{x}\in\mathbf{B}}B(Y[x])$$

其中 $\oplus$ 表示晶体的直和.

证明 关键是找出 $B(Y)\otimes\mathbf{B}$ 中所有的极大向量. 而 $B(Y)\otimes\mathbf{B}$ 中的极大向量具有形式 $T_Y\otimes\boxed{x}$, 其权为 $\lambda+\mathrm{wt}(x)$, T_Y 是 $B(Y)$ 里的最高权向量, 且 $\boxed{x}$ 满足 $\tau(\boxed{x})\leqslant\lambda(\alpha_i^\vee)$ 对 $i=1,2,\ldots,n$ 成立.

当 $x=j$ 时, $\mathrm{wt}(T_Y\otimes\boxed{x})=\lambda+\varepsilon_j$ 且

$$\tau(\boxed{x})=\tau(\boxed{j})=\begin{cases}1, & j=i+1,\quad i\neq n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即 $\lambda(\alpha_{j-1}^\vee)>0$, 这蕴含着在 Y 的第 j 行存在一个余角. 在这个位置添加一个格子, 得到的新 (广义) Young 图记为 $Y[j]$. 易知 $T_{Y[j]}$ 的极大向量的权是 $\lambda+\varepsilon_j$.

当 $x=\bar{j}$ 时, $\mathrm{wt}(T_Y\otimes\boxed{x})=\lambda-\varepsilon_j$ 且

$$\tau(\boxed{x})=\tau(\boxed{\bar{j}})=\begin{cases}1, & j=i,\quad i\neq n,\\ 2, & j=i=n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即 $\lambda_j=\lambda(\alpha_j^\vee)>0$, 这蕴含着在 Y 的第 j 行存在一个可移除角. 在这个位置的格子删掉, 得到的新 (广义) Young 图记为 $Y[\bar{j}]$, 从而得到一个连通分支 $B(Y[\bar{j}])$, 它的极大向量的权是 $\lambda-\varepsilon_j$.

当 $x=0$ 时, $\mathrm{wt}(T_Y\otimes\boxed{x})=\lambda$ 且

$$\tau(\boxed{x})=\tau(\boxed{0})=\begin{cases}1, & i=n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而 $\lambda_n=\lambda(\alpha_n^\vee)>0$. 此时我们取 $Y[0]$ 就是 Y.

因此, 我们得到了所有的连通分支 $B(Y[x])$, 它的极大向量的权为 $\lambda+\varepsilon_x$, 其中 ε_x 表示 x 的权. 证毕.

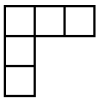
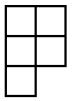
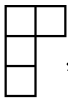
例 5.3 设 n=3, $\lambda=\omega_1+2\omega_3$, 则

$$Y=(2,\,1,\,1)=$$

相应的晶体 $\mathbf{B}$ 是

$$\mathbf{B}:\quad \boxed{1}\xrightarrow{1}\boxed{2}\xrightarrow{2}\boxed{3}\xrightarrow{3}\boxed{0}\xrightarrow{3}\boxed{\bar{3}}\xrightarrow{2}\boxed{\bar{2}}\xrightarrow{1}\boxed{\bar{1}}.$$

因此由 B 得到的新 Young 图如下:

$Y[1]=$  , $Y[2]=$  , $Y[3]=\times$, $Y[0]=$ 

$Y[\bar{3}]=$, $Y[\bar{2}]=\times$, $Y[\bar{1}]=$.

所以, $B(Y)\otimes\mathbf{B}\cong B(Y[1])\oplus B(Y[2])\oplus B(Y[0])\oplus B(Y[\bar{3}])\oplus B(Y[\bar{1}])$.

下面考虑 $B(Y)$ 与 B_{sp} 的张量积. 对于 $b=\overline{(s_1,s_2,\ldots,s_n)}\in B_{\mathrm{sp}}$, 定义

$$Y[b]=\left(\lambda_1+\frac{1}{2}s_1,\lambda_2+\frac{1}{2}s_2,\ldots,\lambda_n+\frac{1}{2}s_n\right).$$

如上如果 $Y[b]$ 不是 (广义) Young 图, 则认为 $B(Y[b])$ 是空集.

命题 5.4 设 $\lambda=a_1\omega_1+a_2\omega_2+\cdots+a_n\omega_n$ $(a_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 是支配整权, Y 是关于 λ 的 (广义) Young 图, 则存在 $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$- 晶体同构

$$B(Y)\otimes B_{\mathrm{sp}}\cong\bigoplus_{b\in B_{\mathrm{sp}}}B(Y[b])$$

证明 与命题 5.2 的证明过程类似.

定理 5.1 的证明 只需找出当 Y' 是一般情形时, $B(Y)\otimes B(Y')$ 的所有极大向量. 设 $\mu=k_1\omega_1+k_2\omega_2+\cdots+k_n\omega_n$ $(k_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, Y' 是相应的 (广义) Young 图, 则按照 Far-Eastern 读法, $B(Y')$ 可嵌入到 $\mathbf{B}^{\otimes N}$ 或 $\mathbf{B}^{\otimes N}\otimes B_{\mathrm{sp}}$, 其中 N 是 Y' 中各自的总数. 设 $T\otimes T'\in B(Y)\otimes B(Y')$ 是极大向量, 并写成 $T'=\boxed{x_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{x_N}$ 或 $T'=\boxed{x_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{x_N}\otimes\boxed{x_{N+1}}$, 其中 $x_i\in\mathbf{B}$ $(i=1,2,\ldots,N)$, $x_{N+1}\in B_{\mathrm{sp}}$. 则 $T=T_Y$, $T_Y\otimes\boxed{x_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{x_j}$ 是极大向量, 当 $j=1,2,\ldots,N$ 或 $N+1$ 时. 注意到 (广义) Young 图 $Y[x_1,x_2,\ldots,x_j]$ 是由 $Y[x_1,x_2,\ldots,x_{j-1}]\otimes\boxed{x_j}$ 得到的, 并设当 $k=1,2,\ldots,j$ 时, 若 $Y[x_1,x_2,\ldots,x_k]$ 不是 (广义) Young 图, 则 $B(Y[x_1,x_2,\ldots,x_j])=\Phi$.

根据命题 5.2 的证明过程知, $T_Y\otimes\boxed{x_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{x_N}$ 或 $T_Y\otimes\boxed{x_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{x_{N+1}}$ 是 $B(Y)\otimes B(Y')$ 的极大向量当且仅当 $k=1,2,\ldots,N$ 或 $N+1$ 时, $Y[x_1,x_2,\ldots,x_k]$ 是 (广义) Young 图. 证毕.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参考文献

1 Kashiwara M. On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math J*, **63**: 465–516 (1991)

2 Lusztig G. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. *J Amer Math Soc*, **3**: 447–498 (1990)

3 Kashiwara M, Nakashima T. Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras. *J Algebra*, **165**: 295–345 (1994)

4 Hong J, Kang S J. Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases. In: Graduate Studies in Mathematics, Vol. 42. Providence, RI: Amer Math Soc, 2002

5 Kang S J, Misra K C. Crystal bases and tensor product decompositions of $U_q(G_2)$-modules. *J Algebra*, **163**: 675–691 (1994)

6 Nakashima T. Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for classical Lie algebras. *Commun Math Phys*, **154**: 215–243 (1993)

7 Zou Y M. Integrable representations of $U_q(\mathrm{osp}(1|2n))$. *J Pure Appl Algebra*, **130**: 99–112 (1998)

8 Musson I M, Zou Y M. Crystal bases for $U_q(\mathrm{osp}(1,2r))$. *J Algebra*, **210**: 514–534 (1998)

9 Benkart G, Lee S C, Ram A. Tensor product representations for orthosymplectic Lie superalgebras. *J Pure Appl Algebra*, **130**: 1–48 (1998)

10 Lee S C. Representations for Lie superalgebra $\mathfrak{spo}(2m,1)$. *J Korean Math Soc*, **36**(3): 593–607 (1999)

11 Jeong K. Crystal bases for Kac-Moody superalgebras. *J Algebra*, **237**: 562–590 (2001)