SCIENTIA SINICA Mathematica

### 综述



# 弹性力学方程解的整体适定性

献给齐民友教授 90 华诞

# 王科研1、雷震2\*

- 1. 上海立信会计金融学院统计与数学学院, 上海 201209;
- 2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: wangky@sfu.edu.cn, zlei@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-04-05; 接受日期: 2017-05-17; 网络出版日期: 2017-06-19; \* 通信作者 国家自然科学基金 (批准号: 11421061, 11222107 和 11301338)、上海市教委科研创新项目 (批准号: 15ZZ098)、"万人计划"青年 拔尖人才和上海市"曙光计划"资助项目

**摘要** 本文为一篇综述文章, 主要回顾中外数学家在可压缩和不可压缩弹性力学方程平衡态附近经典解的整体适定性方面所取得的关键研究成果. 由于这里所涉及的研究思想和方法与研究拟线性波动方程相应问题的思想和方法密切相关, 因此也将回顾拟线性波动方程的一些相应问题的理论和研究方法. 本文将尽可能简单明了地指出各研究课题的关键困难及克服它们的基本想法, 并对其中大部分关键成果给予更为直截了当的证明. 本文还将提出几个公开问题并简单讨论其困难所在, 以期向更年轻的专家学者抛砖引玉.

关键词 弹性力学方程 整体解 不可压缩 可压缩

MSC (2010) 主题分类 35Q35

#### 1 引言

本文是一篇综述文章, 主要关注可压缩和不可压缩弹性力学方程解的整体适定性理论 (参见文献 [1–5]), 也将回顾拟线性波动方程的一些相应问题的理论和研究方法 [6–8].

众所周知,连续介质力学方程可以从 Lagrange 力学的角度通过变分的方法推导出力的平衡方程. 当 Lagrange 泛函的密度函数仅仅为动能时,人们得到的 Euler-Lagrange 方程即为 Euler 方程—最简单的流体力学方程. 如果人们希望研究比 Euler 方程稍微复杂一些的流体力学方程,那么最简单的情形就是在 Lagrange 泛函的密度函数中再加入势能项,而此时所得到的 Euler-Lagrange 方程即为弹性力学方程. 因此,从 Lagrange 力学的角度,可以认为弹性力学方程是最基本的力学方程之一. Navier-Stokes 方程是在 Euler 方程的基础上在适当的假设条件之下考虑黏性后的描述黏性 Newton 流体运动的方程,而黏弹性流体力学方程是在弹性力学方程的基础上在同样的假设条件之下考虑黏性后的描述非

英文引用格式: Wang K Y, Lei Z. Global well-posedness for systems of elasticity (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 201–218, doi: 10.1360/N012017-00060

Newton 流体运动的方程. 由于 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程在整个偏微分方程及相关学科理论研究中的核心地位, 弹性力学方程和黏弹性流体力学方程数学理论研究的重要性不言而喻. 本文将聚焦于可压和不可压的弹性力学方程. 相应的黏弹性流体力学方程方面的研究成果, 读者可参见林芳华教授的综述文章 [9] 或者最近的文献 [10] 及其参考文献. 为了叙述上的方便, 也为了更直截了当地刻画问题的本质, 在不可压缩情形, 本文将只考虑 Lagrange 泛函的密度函数中势能项为 Hooke 弹性势能这一情形<sup>1)</sup>. 在可压缩情形, 我们将只考虑非线性项截断到平方项的情形. 需要指出的是, 这些情形包含了该问题的所有本质的数学困难 (参见文献 [1,5]).

将弹性力学方程在平衡态附近线性化后,人们可以发现 $^2$ )其线性化方程为二阶双曲型方程组(其典型代表是波动方程)。因此,该类问题的研究不可避免地要用到相对较成熟的波动方程理论。由于弹性力学方程为拟线性方程,下面将首先简单回顾拟线性波动方程的几项最相关的研究成果,而关于Hormander、John、李大潜和周忆等的成果读者可参见专著 [13],在此不再赘述。建立在三维线性波动方程具有  $\frac{1}{1+t}$  的临界的时间衰减的基础上(几乎是可积的),Christodoulou  $^{[7]}$  和 Klainerman  $^{[6]}$  于 1986年在非线性项满足零条件的假设下各自独立地证明了具单个传播速度的三维拟线性波动方程(组)小初值解的整体存在性。Klainerman 所使用的向量场理论及广义能量积分方法(参见文献  $^{[6,14]}$ )在随后的相关问题的研究中被广泛应用,成为相关研究的基石。由于二维线性波动方程仅具有  $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$  的衰减速度,相应的非线性问题要困难得多,直到 2001年才被 Alinhac  $^{[8]}$  通过引入所谓的"幽灵权函数"解决。需要强调的是,以上工作中均用到了线性波动方程的 Lorentz 不变性,而且在二维情形的初始值需要有紧支集的限制条件。

可压缩弹性力学方程的线性化方程为

$$Y_{tt} - c_2^2 \Delta Y - (c_1^2 - c_2^2) \nabla \nabla \cdot Y = 0,$$

其中 Y 为位移函数,  $c_1^2 > \frac{4c_2^2}{3}$  均为正常数 ( $c_1$  和  $c_2$  分别表示压力波和剪切波的传播速度). 该方程组是不满足 Lorentz 不变性的. 在三维情形, 由于其"临界"的特性, 人们可以证明 Lorentz 不变性和紧支集的条件均可以去掉. 在可压缩情形, Agemi [2] 和 Sideris [1,15] 于 2000 年左右各自独立地证明了平衡态附近经典解的整体存在性. 随后, Sideris 和 Thomases [3,4,16] 建立了相应的三维不可压缩情形解的整体存在性. 文献 [17] 给出了一个更为简短的证明并得到了高阶能量的 Sobolev 范数的一致有界性的估计.

同样地,二维情形的弹性力学方程要困难得多.由于其"超临界"的特性,Lorentz不变性的缺失和紧支集的限制均成为该领域相关研究所面临的本质上的巨大困难.2016年,文献 [5] 通过引入强零条件的概念,在发现不可压缩弹性力学方程自然满足强零条件的基础上,最终克服了二维不可压缩弹性力学方程不满足 Lorentz 不变性及不具有紧支集的困难并证明了解的整体存在性 (也可参见随后的文献 [18] 中在 Euler 坐标下对整体解给出的一个新的证明及稍早一些的文献 [19] 中给出的几乎整体存在性结果).但到目前为止,满足零条件的可压缩情形二维弹性力学方程解的整体存在性问题基本上仍然没有进展.更多关于解的奇性的文献读者可参见文献 [20–26],或者关于长时间适定性的文献可参见文献 [27–34].

最后介绍一下本文的组织结构. 首先, 第 2 节将对 Klainerman 和 Alinhac 关于三维及二维单个拟线性波动方程解的整体存在性结果给出更为直截了当的统一的证明, 期间还给出我们的关于零条件的数学表达. 然后, 在第 3 节回顾 Sideris 三维可压缩弹性力学方程解的整体存在性的证明. 在第 4 节,

<sup>1)</sup> 由于不可压缩条件的限制, 此时的弹性力学方程仍然是非线性的.

<sup>2)</sup> 在不可压缩情形时需要用到文献 [11,12] 中发现的恒等式.

我们介绍雷震强零条件的数学表达及其关于二维不可压缩弹性力学方程解的整体存在性的证明. 我们强调, 这里第 4 节所用到的方法完全可以用来解决三维情形的相应问题, 同时相应的运算会更为简洁、结果也更强. 由于使用了文献 [5] 中的思想和方法, 这里的大多证明比原始论文中的证明要简单和直接.

# 2 拟线性波动方程解的整体存在性

本节回顾单个拟线性波动方程解的整体存在性理论, 其中三维情形是基于 Klainerman 的工作 [6], 二维情形是基于 Alinhac 的工作 [8]. 我们将在统一的框架下给出一个直截了当的证明.

#### 2.1 问题、零条件、记号及结果

考察如下拟线性波动方程:

$$v_{tt} - \Delta v = \mathcal{Q}(\partial v, \partial^2 v), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad v_t(0, x) = v_1(x),$$
 (2.1)

其中

$$\mathcal{Q}(\partial v, \partial^2 v) = C_{ijk} \partial_i v \partial_{ik}^2 v,$$

这里使用了 Einstein 约定: 重复指标表示作和, 其中 i、j 和 k 均取值于<sup>3)</sup>  $\{1,2,\ldots,n\}$ , n 表示空间维数. 首先作对称双曲的假定:

$$C_{ijk} = C_{ikj}. (2.2)$$

John 所定义的零条件为

$$C_{ijk}\omega_i\omega_i\omega_k = 0, \quad \forall \, \omega \in \mathcal{S}^{n-1}.$$
 (2.3)

这里注意到一个事实是, 对线性方程的简单波解  $v(t,x) = \phi(t+\omega \cdot x)$ , 成立  $C_{ijk}\partial_i v\partial_{jk}^2 v = 0$ . 这也正是零条件的物理解释: 在简单波中没有相互作用. 我们的问题是, 对适当的 Sobolev 空间中的初始值、二维和三维拟线性波动方程 (2.1) 的初值问题是否存在整体的经典解?

Klainerman 定义了如下的向量:

$$\Omega_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i, \quad S = t \partial_t + x_j \partial_j, \quad L_j = t \partial_j + x_j \partial_t.$$
 (2.4)

它们分别表示旋转变换、尺度变换和 Lorentz 变换的无穷小生成元. 可以验证  $\partial_t$ 、 $\partial_i$ 、S-1、 $\Omega_{ij}$  和  $L_j$  均与方程可交换 $^4$ ). 因此, 定义

$$\Gamma = \{ (\partial_t, \nabla, \Omega_{ij}, S - 1, L_j) \}$$
(2.5)

为算子值向量, 我们有

$$(\Gamma^{\alpha}v)_{tt} - \Delta\Gamma^{\alpha}v = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{ijk}\partial_{i}\Gamma^{\beta}v\partial_{jk}^{2}\Gamma^{\gamma}v.$$
 (2.6)

Klainerman 的广义能量定义为

$$\mathcal{E}_s = \sum_{|\alpha| \le s-1} \|\partial \Gamma^{\alpha} v\|_{L^2}^2.$$

我们有如下定理 (Klainerman 当初证明的定理弱于如下形式):

<sup>3</sup>) i、j 和 k 也可以取值于  $\{0,1,2,\ldots,n\}$ ,  $\partial_0=\partial_t$ . 请读者自行对证明作适当的改动.

<sup>4)</sup> 这里对尺度变换算子作了少许改动以使后面的陈述及运算更简便.

**定理 2.1** 令  $s \ge 9$ , 存在  $\epsilon_0 \ll 1$  使得, 如果初始值具有紧支集, 那么满足条件 (2.2) 和 (2.3) 的 二维及三维拟线性波动方程 (2.1) 满足

$$\begin{cases} \mathcal{E}_s(t) \lesssim \mathcal{E}_s \mid_{t=0} \leqslant \epsilon_0, & n = 3, \\ \mathcal{E}_s(t) \lesssim \mathcal{E}_s(0)(1+t)^{\frac{1}{10}}, & \mathcal{E}_{s-2}(t) \lesssim \mathcal{E}_{s-2}(0) \leqslant \epsilon_0, & n = 2, \end{cases} \forall t \geqslant 0.$$

特别地, 经典解是整体存在的.

**注 2.2** 定理中的  $\frac{1}{10}$  可以换成其他较小的数, 且二维情形的  $\mathcal{E}_s(0)$  可以为一个给定的有界数.  $\epsilon_0$  的小依赖于这两个数.

注 2.2 对后面几节中的定理也同样适用.

#### 2.2 定理的证明思想

下面用 Lei [5] 建立在 Klainerman 的向量场理论和 Alinhac [8] 所提出的幽灵权函数的基础之上的方法对如上定理给出统一而简洁的证明. 首先, 在方程 (2.6) 的两边同时乘以  $e^{\arctan\sigma}(\Gamma^{\alpha}v)_{t}$ , 我们有

$$\begin{split} &\frac{1}{2}\partial_{t}[\mathrm{e}^{\arctan\sigma}(|\partial_{t}\Gamma^{\alpha}v|^{2}+|\nabla\Gamma^{\alpha}v|^{2})] - \frac{\mathrm{e}^{\arctan\sigma}\partial_{t}\sigma}{2(1+\sigma^{2})}(|\partial_{t}\Gamma^{\alpha}v|^{2}+|\nabla\Gamma^{\alpha}v|^{2}) + \frac{\mathrm{e}^{\arctan\sigma}\nabla\sigma}{1+\sigma^{2}}\cdot\nabla\Gamma^{\alpha}v\partial_{t}\Gamma^{\alpha}v \\ &= \nabla\cdot(\mathrm{e}^{\arctan\sigma}\nabla\Gamma^{\alpha}v\partial_{t}\Gamma^{\alpha}v) + \sum_{\beta+\gamma=\alpha}C_{ijk}\mathrm{e}^{\arctan\sigma}\partial_{i}\Gamma^{\beta}v\partial_{jk}^{2}\Gamma^{\gamma}v\partial_{t}\Gamma^{\alpha}v. \end{split}$$

取

$$\sigma = r - t$$

然后将上式在全空间上积分可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left[ e^{\arctan \sigma} (|\partial_t \Gamma^{\alpha} v|^2 + |\nabla \Gamma^{\alpha} v|^2) \right] dx + \int \frac{e^{\arctan \sigma}}{2(1+\sigma^2)} (|\omega \partial_t \Gamma^{\alpha} v + \nabla \Gamma^{\alpha} v|^2) dx$$

$$= \sum_{\beta + \gamma - \alpha} C_{ijk} \int e^{\arctan \sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx. \tag{2.7}$$

为了得到一个封闭的能量估计, 我们需要估计 (2.7) 的右边项. 对远离特征锥的区域

$$\left\{x: r \leqslant \frac{t}{2} + 1\right\},\,$$

这里最典型的一项是

$$C_{ijk} \int_{r \leqslant \frac{t}{2}+1} e^{\arctan \sigma} \partial_i \Gamma^{\alpha} v \partial_{jk}^2 v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx,$$

其他项的处理过程中均不再具有本质不同的困难 (详细的论证可以参见文献 [5]). 不妨假定初始值的紧支集是单位球. 我们可以作如下估计:

$$\int_{r\leqslant \frac{t}{2}+1} |\partial_i \Gamma^\alpha v \partial_{jk}^2 v \partial_t \Gamma^\alpha v| dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_s \|(|t-r|+1)\partial_{jk}^2 v\|_{L^\infty(r\leqslant \frac{t}{2}+1)}}{1+t}, \tag{2.8}$$

这里限定

$$|\alpha| \leqslant s - 1.$$

注意到如下两个恒等式:

$$(t-r)(\partial_t - \partial_r) = Sv - \omega_j L_j v,$$
  

$$(t+r)(\partial_t + \partial_r)v = Sv + \omega_j L_j v,$$
(2.9)

我们有

$$|\partial f| \lesssim \frac{|Sf| + |Lf|}{|t - r|}. (2.10)$$

因此, 当  $s \ge 9$  和  $|t-r| \ge 1$  时, 我们可以将 (2.8) 改进为

$$\int_{r \leqslant \frac{t}{2}+1} |\partial_i \Gamma^\alpha v \partial_{jk}^2 \Gamma^\gamma v \partial_t \Gamma^\alpha v| dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}}}{(1+t)^{\frac{n}{2}+1}}, \tag{2.11}$$

这里在  $\{x: r \leq \frac{t}{2} + 1\}$  的条件下用到了 Klainerman 的如下不等式:

$$|\partial v(t,x)| \lesssim \frac{\sqrt{\mathcal{E}_3}}{(1+t+r)^{\frac{n-1}{2}}(1+|t-r|)^{\frac{1}{2}}}.$$
 (2.12)

为了估计  $\{x: r > \frac{t}{2} + 1\}$  的包含特征锥的区域, 定义

$$g_i(v) = \omega_i v_t + \partial_i v.$$

直接计算可得

$$C_{ijk}\partial_{i}\Gamma^{\beta}v\partial_{jk}^{2}\Gamma^{\gamma}v = C_{ijk}g_{i}(\Gamma^{\beta}v)\partial_{jk}^{2}\Gamma^{\gamma}v - C_{ijk}\omega_{i}\partial_{t}\Gamma^{\beta}vg_{j}(\partial_{k}\Gamma^{\gamma}v)$$

$$+ C_{ijk}\omega_{i}\partial_{t}\Gamma^{\beta}v\omega_{j}\partial_{t}q_{k}(\Gamma^{\gamma}v) - C_{ijk}\omega_{i}\partial_{t}\Gamma^{\beta}v\omega_{j}\omega_{k}\partial_{t}^{2}\Gamma^{\gamma}v.$$

这里的第一个关键之处是, 由零条件 (2.3) 知, 上式最后一项为 0. 因此可得

$$\mathcal{Q}(\partial \Gamma^{\beta} v, \partial^{2} \Gamma^{\gamma} v) = \mathcal{O}(g(\Gamma^{\beta} v) \partial^{2} \Gamma^{\gamma} v) + \mathcal{O}(\partial \Gamma^{\beta} v \partial g(\Gamma^{\gamma} v)) + \frac{1}{r} \mathcal{O}(\partial \Gamma^{\beta} v \partial \Gamma^{\gamma} v). \tag{2.13}$$

这就是我们在引言所说的零条件的数学表达, 其中 g 称为好的未知量 (good unknowns). 现在可以对包含特征锥的区域  $\{x: r>\frac{t}{2}+1\}$  进行估计. 下面仅对最典型的两项

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} e^{\arctan\sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx$$

和

$$C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} e^{\arctan\sigma} \partial_i \Gamma^{\alpha} v \partial_{jk}^2 v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx$$

作估计. 首先, 由 (2.13) 有

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} e^{\arctan \sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx$$

$$\lesssim \sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} \|g(\Gamma^{\beta} v)\|_{L^{\infty}(r>\frac{t}{2}+1)} \|\partial^2 \Gamma^{\gamma} v\|_{L^2} \sqrt{\mathcal{E}_s}$$

$$+ \sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} \left( \|\partial \Gamma^{\beta} v\|_{L^{\infty}} \|\partial g(\Gamma^{\gamma} v)\|_{L^{2}} \sqrt{\mathcal{E}_{s}} + \frac{\mathcal{E}_{s} \|\partial \Gamma^{\beta} v\|_{L^{\infty}}}{1+t} \right).$$

由 (2.9) 的第二个不等式可得

$$\|\partial g(\Gamma^{\gamma}v)\|_{L^{2}} \lesssim \frac{\sqrt{\mathcal{E}_{|\gamma|+2}}}{1+t}.$$
 (2.14)

此外,由于

$$r^{n-1}g^{2} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \int_{r}^{\infty} \int [(\Omega^{\alpha}g)^{2}]_{\rho} \rho^{n-1} d\rho d\sigma$$
  
$$\lesssim \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \|\Omega^{\alpha}g\|_{L^{2}} \|\nabla \Omega^{\alpha}g\|_{L^{2}},$$

再注意到 (2.14), 我们有

$$||g(\Gamma^{\beta}v)||_{L^{\infty}(r>\frac{t}{2}+1)} \lesssim \frac{\sqrt{\mathcal{E}_{s-2}}}{(1+t)^{\frac{n}{2}}}.$$
 (2.15)

于是,由(2.15)、(2.12)和(2.14)可以得到

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} e^{\arctan \sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}}}{(1+t)^{\frac{n}{2}}}.$$
 (2.16)

接下来, 利用 (2.10), 我们作如下估计:

$$C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} e^{\arctan \sigma} \partial_i \Gamma^{\alpha} v \partial_{jk}^2 v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx$$

$$\lesssim \|\langle \sigma \rangle^{-1} g(\Gamma^{\alpha} v)\|_{L^2} \|(1+|\sigma|) \partial^2 v\|_{L^{\infty}(r>\frac{t}{2}+1)} \sqrt{\mathcal{E}_s}$$

$$+ \|\partial \Gamma^{\alpha} v\|_{L^2} \|\partial g(v)\|_{L^{\infty}} \sqrt{\mathcal{E}_s} + \frac{\mathcal{E}_s \|\partial^2 v\|_{L^{\infty}}}{1+t}$$

$$\lesssim \delta \|\langle \sigma \rangle^{-1} g(\Gamma^{\alpha} v)\|_{L^2}^2 + \delta^{-1} \|\partial \Gamma v\|_{L^{\infty}(r>\frac{t}{2}+1)}^2 \mathcal{E}_s$$

$$+ \|\partial g(v)\|_{L^{\infty}} \mathcal{E}_s + \frac{\mathcal{E}_s \|\partial^2 v\|_{L^{\infty}}}{1+t}.$$

从现在开始, 我们经常地使用如下记号:

$$\langle \sigma \rangle = \sqrt{1 + \sigma^2}.$$

由 (2.15)、(2.12) 和 (2.14), 有

$$C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} e^{\arctan \sigma} \partial_i \Gamma^{\alpha} v \partial_{jk}^2 v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx$$

$$\lesssim \delta \|\langle \sigma \rangle^{-1} g(\Gamma^{\alpha} v)\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^{-1} \mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}} (1 + \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}})}{(1+t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}}}{(1+t)^{\frac{n+1}{2}}}.$$
(2.17)

由 (2.11)、(2.16) 和 (2.17), 有

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{ijk} \int e^{\arctan\sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx$$

$$\lesssim \delta \|\langle \sigma \rangle^{-1} g(\Gamma^{\alpha} v)\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^{-1} \mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}} (1 + \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}})}{(1+t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}}}{(1+t)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

将上式代入 (2.7) 并通过取一个适当小的  $\delta$  可得

$$\frac{d}{dt} \int \left[e^{\arctan\sigma} (|\partial_t \Gamma^{\alpha} v|^2 + |\nabla \Gamma^{\alpha} v|^2)\right] dx + \int \frac{|\omega \partial_t \Gamma^{\alpha} v + \nabla \Gamma^{\alpha} v|^2}{1 + \sigma^2} dx$$

$$\lesssim \frac{\mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}} (1 + \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}})}{(1 + t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mathcal{E}_s \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}}}{(1 + t)^{\frac{n+1}{2}}}.$$
(2.18)

在三维情形, (2.18) 意味着

$$\mathcal{E}_s \lesssim \mathcal{E}_s(0) + \int_0^t (1+s)^{-\frac{3}{2}} (\mathcal{E}_s^{\frac{3}{2}} + \mathcal{E}_s^2) ds.$$

由 Gronwall 不等式知, 这就足以保证解的整体存在性及解的 (最高阶) Sobolev 范数关于时间的一致有界性估计 (参见文献 [35]). 因此, 我们就证明了 Klainerman 的结论.

下面来证明 Alinhac 关于 n=2 时的结果. 此时 (2.18) 是不够的, 我们还需要作一个低阶的能量估计. 在 (2.7) 中限定  $|\alpha| \le s-3$ , 我们有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left[ e^{\arctan \sigma} (|\partial_t \Gamma^{\alpha} v|^2 + |\nabla \Gamma^{\alpha} v|^2) \right] dx + \int \frac{e^{\arctan \sigma}}{2(1+\sigma^2)} (|\omega \partial_t \Gamma^{\alpha} v + \nabla \Gamma^{\alpha} v|^2) dx$$

$$= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{ijk} \int e^{\arctan \sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx. \tag{2.19}$$

在远离特征锥的区域  $\{x: r \leq \frac{t}{2} + 1\}$ , (2.11) 变为

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} \int_{r\leqslant \frac{t}{2}+1} |\partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v| dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_{s-2}^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^2}.$$
 (2.20)

在包含特征锥的区域  $\{x: r > \frac{t}{2} + 1\}$ , 我们作如下估计:

$$\begin{split} & \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} \mathrm{e}^{\arctan\sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx \\ & \lesssim \| \langle \sigma \rangle^{-1} g(\Gamma^{\beta} v) \|_{L^2} \| (1+|\sigma|) \partial^2 \Gamma^{\gamma} v \|_{L^{\infty}(r\geqslant \frac{t}{2}+1)} \sqrt{\mathcal{E}_{s-2}} \\ & \lesssim \frac{\| \langle \sigma \rangle^{-1} g(\Gamma^{\beta} v) \|_{L^2} \sqrt{\mathcal{E}_{s} \mathcal{E}_{s-2}}}{\sqrt{1+t}}. \end{split}$$

利用解的紧支集性质,有

$$\begin{split} \|\langle\sigma\rangle^{-1}g(\Gamma^{\beta}v)\|_{L^{2}}^{2} &\lesssim \int d\sigma \int_{0}^{\infty} \frac{\rho g^{2}(\Gamma^{\beta}v)}{(2+t-\rho)^{2}} d\rho \\ &= \int d\sigma \int_{0}^{\infty} \rho g^{2}(\Gamma^{\beta}v) \frac{d\frac{1}{2+t-\rho}}{d\rho} d\rho \\ &= -\int d\sigma \int_{0}^{\infty} \frac{2g(\Gamma^{\beta}v)}{2+t-\rho} g_{\rho}(\Gamma^{\beta}v) \rho d\rho - \int d\sigma \int_{0}^{\infty} \frac{g^{2}(\Gamma^{\beta}v)}{2+t-\rho} d\rho \\ &\lesssim \|\langle\sigma\rangle^{-1}g(\Gamma^{\beta}v)\|_{L^{2}} \|\nabla g(\Gamma^{\beta}v)\|_{L^{2}}, \end{split}$$

上式意味着

$$\|\langle \sigma \rangle^{-1} g(\Gamma^{\beta} v)\|_{L^2} \lesssim \|\nabla g(\Gamma^{\beta} v)\|_{L^2}. \tag{2.21}$$

这是一个"意想不到"的 Hardy 型不等式5). 因此,

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{ijk} \int_{r>\frac{t}{2}+1} e^{\arctan\sigma} \partial_i \Gamma^{\beta} v \partial_{jk}^2 \Gamma^{\gamma} v \partial_t \Gamma^{\alpha} v dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_{s-2} \sqrt{\mathcal{E}_s}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$
 (2.22)

将 (2.20) 和 (2.22) 代入 (2.19), 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int [e^{\arctan\sigma}(|\partial_t\Gamma^{\alpha}v|^2+|\nabla\Gamma^{\alpha}v|^2)]dx + \int \frac{e^{\arctan\sigma}}{2(1+\sigma^2)}(|\omega\partial_t\Gamma^{\alpha}v+\nabla\Gamma^{\alpha}v|^2)dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_{s-2}\sqrt{\mathcal{E}_s}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

上式与 (2.18) 联合即可得到结论. 这里指出  $\mathcal{E}_s(t)|_{t=0}$  实际上可以不需要小的限制.

**注 2.3** (公开问题) 这里可以注意到, 在三维情形, 解在最高阶的 Sobolev 空间中的范数关于时间是一致有界的, 而二维情形却增长  $(1+t)^{\delta}$  (对某个  $\delta > 0$ ). Alinhac 在其专著 [36] 中提出了如下问题: 这个关于时间的增长是否是最优的? Alinhac 猜想该增长确实是最优的, 即存在整体的解, 其高阶 Sobolev 范数确实有一个增长的下界. Alinhac 还猜想这一可能同样适用于其他类似的问题, 例如, 三维可压缩弹性力学方程 (见下面的第 3 节) 和二维不可压缩弹性力学方程 (见下面的第 4 节) 等.

# 3 三维可压缩的非线性弹性力学方程

本节回顾 Sideris [1] 关于三维可压缩弹性力学方程解的整体存在性的证明, 所研究的方程为截断到平方阶非线性的如下二阶拟线性双曲型方程组:

$$\partial_t^2 Y_i - c_2^2 \Delta Y_i - (c_1^2 - c_2^2) \nabla_i \nabla \cdot Y = C_{lmn}^{ijk} \partial_m Y_i \partial_{ln}^2 Y_k.$$

方程中的所有下标均取值于  $\{1,2,3\}$ ,  $c_1$  和  $c_2$  为压力波和剪切波的传播速度,  $c_1^2 > \frac{4c_2^2}{3}$ . 方程应该满足的零条件为

$$\begin{cases}
C_{lmn}^{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l\omega_m\omega_n = 0, & \forall \omega \in \mathcal{S}^2, \\
C_{lmn}^{ijk}\eta_i^{(1)}\eta_i^{(2)}\eta_k^{(3)}\omega_l\omega_m\omega_n = 0, & \forall \eta^{(p)}, \omega \in \mathcal{S}^2, & \eta^{(p)} \cdot \omega = 0.
\end{cases}$$
(3.1)

由于材料的各项同性及标架不变性,上式中的第二个条件是自然满足的<sup>6)</sup>. 此外, 我们也需要如下对称性条件:

$$C_{lmn}^{ijk} = C_{nml}^{kji}. (3.2)$$

由于此时没有 Lorentz 不变性, 该问题曾一度是非常困难的公开问题. 下文中完成准备工作后, 我们将直接开始证明主要定理, 并在遇到困难时介绍 Sideris 的贡献及其解决问题的方法.

首先, 我们定义如下的向量:

$$\Omega_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i, \quad S = t \partial_t + x_j \partial_j.$$
 (3.3)

<sup>5)</sup> 众所周知, 二维情形 Hardy 不等式  $\|r^{-1}f\|_{L^2} \lesssim \|\nabla f\|_{L^2}$  是不成立的.

<sup>6)</sup> 系数  $C_{lmn}^{ijk}$  中的指标一定是成对出现的.

 $\diamondsuit A_{ij} = -A_{ji}, \perp$ 

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义

$$\Gamma = \{ (\partial_t, \nabla, I\Omega_{ij} + A_{ij}, S - 1) \}$$
(3.4)

为算子值向量, 我们有

$$(\Gamma^{\alpha}Y_{i})_{tt} - c_{2}^{2}\Delta\Gamma^{\alpha}Y_{i} - (c_{1}^{2} - c_{2}^{2})\nabla_{i}\nabla \cdot \Gamma^{\alpha}Y = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{lmn}^{ijk} \partial_{m}\Gamma^{\beta}Y_{j}\partial_{ln}^{2}\Gamma^{\gamma}Y_{k}.$$

$$(3.5)$$

定义广义能量为

$$\mathcal{E}_s = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|\partial \Gamma^{\alpha} Y\|_{L^2}^2.$$

我们有如下定理 (由 Sideris 和 Agemi 各自独立证明):

**定理 3.1** 令  $s \ge 9$ , 存在  $\epsilon_0 \ll 1$  使得

$$\mathcal{E}_s(t) \lesssim \mathcal{E}_s(0)(1+t)^{\frac{1}{10}}, \quad \mathcal{E}_{s-2}(t) \lesssim \mathcal{E}_{s-2}(0) = \epsilon_0, \quad \forall \ t \geqslant 0.$$

下面简要介绍一下证明的关键之处. 首先, 在 (3.5) 的基础上作能量估计可得

$$\frac{d}{dt} \int (|\partial_t \Gamma^{\alpha} Y|^2 + c_2^2 |\nabla \Gamma^{\alpha} Y|^2 + (c_1^2 - c_2^2) |\nabla \cdot \Gamma^{\alpha} Y|^2) dx$$

$$= \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{lmn}^{ijk} \int \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx. \tag{3.6}$$

在远离最大的特征锥的区域  $\{x:r\leqslant \frac{c_2t}{2}+1\}$ , 为了估计 (3.6) 的右端项, 我们需要利用其中多余的一个导数 $^{7}$ ) 来得到  $\frac{1}{1+t}$  的衰减. 然而, 第 2 节中的不等式 (2.9) 和 (2.10) 都不再自然地或者无条件地满足了. 为此, 我们需要定义加权的广义能量  $\mathcal{X}_{\kappa}$ . 令  $\omega=\frac{r}{r}$ ,  $P_1=\omega\otimes\omega$ ,  $P_2=I-P_1$ . 令

$$\mathcal{X}_{\kappa}(t) = \sum_{l=0}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{a=1}^{2} \sum_{|\alpha| \leqslant \kappa - 2} \|\langle c_a t - r \rangle P_a \partial_l \nabla_j \Gamma^{\alpha} Y\|_{L^2}. \tag{3.7}$$

我们有如下引理:

引理 3.2<sup>[1]</sup> (Sideris 1) 成立如下估计:

$$\begin{cases} \langle r \rangle \langle c_a t - r \rangle^{\frac{1}{2}} | P_a \partial Y | \lesssim \sqrt{\mathcal{E}_2} + \mathcal{X}_2, \\ \langle r \rangle \langle c_a t - r \rangle | P_a \partial \nabla Y | \lesssim \mathcal{X}_2. \end{cases}$$
(3.8)

经过一番艰苦的运算, 我们还可以证明如下引理:

<sup>7)</sup> 在广义能量 Es 的定义中只需要一个时空导数.

引理 3.3 [1] (Sideris 2) 令  $\kappa \geq 9$ . 如果  $E_{\kappa-2} \ll 1$ , 那么成立如下估计:

$$\mathcal{X}_{\kappa-2}^2 \lesssim \mathcal{E}_{\kappa-2}, \quad \mathcal{X}_{\kappa}^2 \lesssim \mathcal{E}_{\kappa}.$$
 (3.9)

关于以上两个引理的证明参见文献 [1]. 结合以上两个引理可以看出, 在远离最大的特征锥的区域  $\{x:r\leqslant \frac{c_2t}{2}+1\}, \partial Y$  在  $L^\infty$  范数的意义下仅具有  $\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$  的衰减, 而  $\partial^2 Y$  在  $L^\infty$  范数的意义下也仅具有  $\frac{1}{1+t}$  的衰减, 这与波动方程的情形相比均损失了  $\frac{1}{1+t}$  的衰减. 下面将利用上述两个引理来处理 (3.6) 右端的最典型的两项

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} C_{lmn}^{ijk} \int \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx$$

和

$$C_{lmn}^{ijk} \int \partial_m \Gamma^\alpha Y_j \partial_{ln}^2 Y_k \partial_t \Gamma^\alpha Y_i dx.$$

首先, 对  $|\alpha| \le \kappa - 1$ , 我们作如下估计:

$$\begin{split} &\sum_{\beta+\gamma=\alpha,|\beta|=1} C_{lmn}^{ijk} \int_{r\leqslant \frac{c_2t}{2}+1} \partial_m \Gamma^\beta Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^\gamma Y_k \partial_t \Gamma^\alpha Y_i dx \\ &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha,|\beta|=1} \sum_{a,b,e=1}^2 C_{lmn}^{\mu\nu} \int_{r\leqslant \frac{c_2t}{2}+1} P_b^{\mu j} \partial_m \Gamma^\beta Y_j P_e^{\nu k} \partial_{ln}^2 \Gamma^\gamma Y_k P_a^{\eta i} \partial_t \Gamma^\alpha Y_i dx \\ &\lesssim \sum_{\beta+\gamma=\alpha,|\beta|=1} \sum_{l,m,n=1}^3 \sum_{a,b,e=1}^2 \left\| \frac{\partial_t \Gamma^\alpha Y}{\langle c_b t - r \rangle^{\frac{1}{2}} \langle c_e t - r \rangle} \right\|_{L^2(r\leqslant \frac{c_2t}{2}+1)} \\ &\times \|\langle c_b t - r \rangle^{\frac{1}{2}} P_b \partial_m \Gamma^\beta Y \|_{L^\infty} \|\langle c_e t - r \rangle P_e \partial_{ln}^2 \Gamma^\gamma Y \|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{\mathcal{E}_\kappa \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa-2}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}. \end{split}$$

其次, 我们有

$$\begin{split} C_{lmn}^{ijk} \int_{r \leqslant \frac{c_2 t}{2} + 1} \partial_m \Gamma^{\alpha} Y_j \partial_{ln}^2 Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \\ &= \sum_{a,b,e=1}^2 C_{lmn}^{\eta \mu \nu} \int_{r \leqslant \frac{c_2 t}{2} + 1} P_b^{\mu j} \partial_m \Gamma^{\alpha} Y_j P_e^{\nu k} \partial_{ln}^2 Y_k P_a^{\eta i} \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \\ &\lesssim \sum_{l,m,n=1}^3 \sum_{a,b,e=1}^2 \frac{\|\partial_t \Gamma^{\alpha} Y\|_{L^2} \|P_b \partial_m \Gamma^{\alpha} Y\|_{L^2} \|\langle c_e t - r \rangle P_e \partial_{ln}^2 Y\|_{L^\infty}}{\langle t \rangle} \\ &\lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa-2}}}{1 + t}. \end{split}$$

由引理 3.2 知, 上面两个估计对  $r \geqslant \frac{c_2 t}{2} + 1$  时仅要求  $\frac{1}{1+t}$  的衰减显然也是成立的. 因此,

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} C_{lmn}^{ijk} \int \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa-2}}}{1+t}.$$
 (3.10)

需要指出的是,当  $|\alpha| \le \kappa - 3$  时,由于我们不担心导数损失,所以,在远离最大的特征锥的区域  $\{x: r \le \frac{c+1}{2} + 1\}$  时,总成立

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|=1} C_{lmn}^{ijk} \int_{r\leqslant \frac{c_2t}{2}+1} \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa-2} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$
 (3.11)

下面考察当  $|\alpha| \le \kappa - 3$  时包含最大的特征锥的区域  $\{x: r \ge \frac{c_2t}{2} + 1\}$  的情形. 我们作如下估计:

$$\begin{split} & \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{lmn}^{ijk} \int_{r>\frac{c_2t}{2}+1} \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \\ & = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_{a,b,e=1}^2 C_{lmn}^{\eta\mu\nu} \int_{r>\frac{c_2t}{2}+1} P_b^{\mu j} \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j P_e^{\nu k} \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k P_a^{\eta i} \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx. \end{split}$$

如果 (a,b,e)=(1,1,1), 则由于零条件 (3.1), 上式中  $\partial_l$ 、 $\partial_m$  和  $\partial_n$  至少有一项含有  $\nabla-\omega\partial_r$ ,也就是多了一个  $\frac{1}{1+t}$  的衰减,因此是容易处理的. 同理, 如果 (a,b,e)=(2,2,2),情形是一样的. 故下面仅讨论 (a,b,e)=(1,1,1) 和 (a,b,e)=(2,2,2) 的情形.

如果  $b \neq e$ , 则我们作如下估计:

$$\begin{split} &\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_{b\neq e,\ a,b,e=1}^{2} C_{lmn}^{\eta\mu\nu} \int_{r>\frac{c_2t}{2}+1} P_b^{\mu j} \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j P_e^{\nu k} \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k P_a^{\eta i} \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \\ &\lesssim \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_{l,m,n=1}^{3} \sum_{a,b,e=1}^{2} \left\| \frac{\partial_t \Gamma^{\alpha} Y}{\langle c_b t - r \rangle^{\frac{1}{2}} \langle c_e t - r \rangle (1+t)} \right\|_{L^2} \\ &\qquad \times \| \langle r \rangle \langle c_b t - r \rangle^{\frac{1}{2}} P_b \partial_m \Gamma^{\beta} Y \|_{L^{\infty}} \| \langle c_e t - r \rangle P_e \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y \|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa-2} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}. \end{split}$$

如果  $a \neq e$ , 则我们作如下估计:

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_{a\neq e, \ a,b,e=1}^{2} C_{lmn}^{\eta\mu\nu} \int_{r>\frac{c_2t}{2}+1} P_b^{\mu j} \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j P_e^{\nu k} \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k P_a^{\eta i} \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx$$

$$\lesssim \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_{l,m,n=1}^{3} \sum_{a,b,e=1}^{2} \left\| \frac{P_b \partial_m \Gamma^{\beta} Y}{\langle c_a t - r \rangle^{\frac{1}{2}} \langle c_e t - r \rangle (1+t)} \right\|_{L^2}$$

$$\times \|\langle r \rangle \langle c_a t - r \rangle^{\frac{1}{2}} \partial_t P_a \Gamma^{\alpha} Y \|_{L^{\infty}} \|\langle c_e t - r \rangle P_e \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y \|_{L^2}$$

$$\lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa-2} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

因此, 总有

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{lmn}^{ijk} \int_{r>\frac{c_2t}{2}+1} \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa-2} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

注意到 (3.11), 我们已经证明了下式:

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{lmn}^{ijk} \int \partial_m \Gamma^{\beta} Y_j \partial_{ln}^2 \Gamma^{\gamma} Y_k \partial_t \Gamma^{\alpha} Y_i dx \lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa-2} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

由 (3.6) 和 (3.10), 有

$$\mathcal{E}'_{\kappa} \lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa} \sqrt{\mathcal{E}_{\kappa-2}}}{1+t}.$$

由 (3.6) 和 (3.11), 有

$$\mathcal{E}'_{\kappa-2} \lesssim \frac{\mathcal{E}_{\kappa-2}\sqrt{\mathcal{E}_{\kappa}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

结合此二式即可证明本节的定理.

**注 3.4** (公开问题) 在二维情形,在满足零条件的情形下,"可压缩的弹性力学方程的解是否一定是整体存在的"这一问题至今仍然没有本质进展.问题的困难之一是,得到一个临界型的高阶能量估计如下:

 $\mathcal{E}'_s \lesssim \frac{\mathcal{E}^{\alpha}_s}{1+t}, \quad \alpha > 1.$ 

由于此时的线性化方程具有两个特征锥, 如果使用 Alinhac 的幽灵权函数方法, 则其权必然是  $c_2r-t$  的函数, 但方程的非线性项未必总是含有好的未知量  $\omega \partial_t Y + c_2 \nabla Y$ .

## 4 二维不可压缩的弹性力学方程

本节回顾雷震关于二维不可压缩弹性力学方程组解的整体存在性定理 (参见文献 [5]). 以下的证明同样适用于三维情形. 事实上, 按照如下方法, 三维情形的证明会简单得多而且结果更强 (低阶能量估计不再需要了, 因此解的高阶 Sobolev 范数是一致有界的, 参见文献 [17]). 由于解的不可压缩性质,解将不再具有紧支集, 且方程不满足 Lorentz 不变性. 即便在单个拟线性波动方程的情形, Alinhac [8] 的方法在此二维情形也不再直接适用. 其中的一个技术性的困难是, Hardy 型不等式 (2.21) 不再成立,而这在二维情形是本质的困难.

我们首先提出了强零条件的概念, 然后在适当意义下证明了不可压缩的弹性力学方程满足强零条件而非仅仅满足零条件. 在此基础上, 结合 Klainerman 的广义向量场理论和 Alinhac 的幽灵权函数方法最终得到了解的整体存在性定理. 称拟线性项  $Q(\partial Y, \partial^2 Y)$  满足强零条件, 如果下式成立:

$$\mathcal{Q}(\partial Y, \partial^2 Y) = \mathcal{O}(\partial Y \partial g(Y)) + \frac{1}{r} \mathcal{O}(\partial Y)^2, \tag{4.1}$$

其中

$$q(Y) = \omega Y_t + \nabla Y_t$$

这就是所谓的强零条件的数学表达. 我们强调, 这里  $\mathcal{O}(\partial Y \partial g(Y))$  可以是  $\mathcal{R}(\partial Y \partial g(Y))$  这种含有零阶 微分算子  $\mathcal{R}$  的形式.

为了简化问题的陈述, 考虑 Hooke 弹性情形的方程如下:

$$\begin{cases} \partial_t^2 Y - \Delta Y = -(\nabla X)^{-\top} \nabla p, \\ \nabla \cdot Y = -\det(\nabla Y). \end{cases}$$
 (4.2)

这是 Lagrange 坐标下的方程. 在 Euler 坐标下, 方程的形式为

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \nabla \cdot F F^\top, \\ \partial_t F + u \cdot \nabla F = \nabla u F, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases}$$

很多流体力学方程如磁流体、液晶和相场方程等均与上面的这个方程组具有类似的非线性. 定义如下的向量场:

$$\begin{cases} \widetilde{\Omega}Y \triangleq \partial_{\theta}Y + AY, & \widetilde{\Omega}p \triangleq \partial_{\theta}p, & \widetilde{\Omega}Y^{j} = (\widetilde{\Omega}Y)^{j}, \\ \widetilde{S}Y \triangleq (S-1)Y, & \widetilde{S}p \triangleq Sp, & \widetilde{S}Y^{j} = (\widetilde{S}Y)^{j}, \end{cases}$$

其中 A 为常数矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$\Gamma = \{(\partial_t, \partial_1, \partial_2, \widetilde{\Omega}, \widetilde{S})\},\$$

则可以证明 (参见文献 [5])

$$\partial_t^2 \Gamma^\alpha Y - \Delta \Gamma^\alpha Y = -(\nabla X)^{-\top} \nabla \Gamma^\alpha p - \sum_{\beta + \gamma = \alpha, \ \gamma \neq \alpha} C_\alpha^\beta (\nabla X)^{-\top} (\nabla \Gamma^\beta Y)^\top (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^\gamma Y \tag{4.3}$$

和

$$\nabla \cdot \Gamma^{\alpha} Y = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{\alpha}^{\beta} (\partial_{1} \Gamma^{\beta} Y^{2} \partial_{2} \Gamma^{\gamma} Y^{1} - \partial_{1} \Gamma^{\gamma} Y^{1} \partial_{2} \Gamma^{\beta} Y^{2}). \tag{4.4}$$

类似地, 定义广义能量如下:

$$\mathcal{E}_{\kappa} = \sum_{|\alpha| \leqslant \kappa - 1} \|D\Gamma^{\alpha} Y\|_{L^{2}}^{2}.$$

Lei<sup>[5]</sup> 证明了如下定理:

定理 **4.1** [5] 令  $\kappa \geq 10$ , 存在  $\epsilon_0 \ll 1$  使得

$$\mathcal{E}_{\kappa}(t) \lesssim \mathcal{E}_{\kappa}(0)(1+t)^{\frac{1}{10}}, \quad \mathcal{E}_{\kappa-2}(t) \lesssim \mathcal{E}_{\kappa-2}(0) = \epsilon_0, \quad \forall \ t \geqslant 0.$$

由于方程的非局部性, 非线性项中存在与 r 在  $L^2$  意义下不交换的零阶微分算子. 因此, 我们需要改变加权能量的定义:

$$\mathcal{X}_{\kappa} = \sum_{|\alpha| \leq \kappa - 2} \left( \int_{r \leq 2\langle t \rangle} \langle t - r \rangle^2 |D^2 \Gamma^{\alpha} Y|^2 dy + \int_{r > 2\langle t \rangle} \langle t \rangle^2 |D^2 \Gamma^{\alpha} Y|^2 dy \right). \tag{4.5}$$

这将为我们的证明带来一些额外的技术困难. 经过复杂的证明, 我们有下面的引理:

引理 **4.2** [5] 令  $\kappa \ge 10$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得如果  $\mathcal{E}_{\kappa-2} \le \delta$ , 那么,

$$\mathcal{X}_{\kappa-2} \lesssim \mathcal{E}_{\kappa-2}, \quad \mathcal{X}_{\kappa} \lesssim \mathcal{E}_{\kappa}.$$

此外, 我们还需要一系列的引理 (其中 D 表示时间或者空间导数):

引理 **4.3** [5] 令  $t \ge 4$ , 则成立

$$\langle r \rangle^{\frac{1}{2}} |D\Gamma^{\alpha} Y| \lesssim \|D\Gamma^{\leqslant 2} \Gamma^{\alpha} Y\|_{L^{2}} \leqslant \mathcal{E}_{|\alpha|+3}^{\frac{1}{2}}.$$
 (4.6)

此外, 对  $r \leq 2\langle t \rangle/3$  或者  $r \geq 5\langle t \rangle/4$ , 有

$$t|D\Gamma^{\alpha}Y| \lesssim (\mathcal{E}_{|\alpha|+1}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{X}_{|\alpha|+3}^{\frac{1}{2}}) \ln^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e} + t). \tag{4.7}$$

对  $\langle t \rangle / 3 \leq r \leq 5 \langle t \rangle / 2$ , 有

$$\langle r \rangle^{\frac{1}{2}} \langle t - r \rangle^{\frac{1}{2}} |D\Gamma^{\alpha} Y| \lesssim \mathcal{E}_{|\alpha|+2}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{X}_{|\alpha|+3}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.8}$$

引理 **4.4** [5] 令  $t \ge 4$ , 则当  $r \le 2\langle t \rangle/3$  或者  $r \ge 5\langle t \rangle/4$  时, 有

$$t|D^2\Gamma^{\alpha}Y| \lesssim \mathcal{X}_{|\alpha|+4}^{\frac{1}{2}}.\tag{4.9}$$

当  $r \leqslant \frac{5\langle t \rangle}{2}$  时, 有

$$\langle r \rangle^{\frac{1}{2}} \langle t - r \rangle | D^2 \Gamma^{\alpha} Y | \lesssim \mathcal{X}_{|\alpha|+4}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{E}_{|\alpha|+3}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.10}$$

引理 4.5 [5] 我们有

$$\mathcal{X}_{2}^{\frac{1}{2}} \lesssim \mathcal{E}_{2}^{\frac{1}{2}} + \langle t \rangle \|(\partial_{t}^{2} - \Delta)Y\|_{L^{2}}.$$

引理 **4.6** [5] 当  $\frac{\langle t \rangle}{3} \leqslant r \leqslant \frac{5\langle t \rangle}{2}$  时,有

$$\langle t \rangle |\omega_i \partial_t DY + \partial_i DY| \lesssim |DY| + |D\Gamma Y| + t|(\partial_t^2 - \Delta)Y|.$$

下面来作高阶能量估计. 令

$$|\alpha| \le \kappa - 1$$
,  $q(\sigma) = \arctan \sigma$ .

对方程 (4.3) 的两边与  $e^{-q(\sigma)}\partial_t\Gamma^{\alpha}Y$  作  $L^2$  内积可得

$$\frac{d}{dt} \int e^{-q(\sigma)} (|\partial_t \Gamma^{\alpha} Y|^2 + |\nabla \Gamma^{\alpha} Y|^2) dy + \sum_j \int \frac{e^{-q(\sigma)}}{1 + \sigma^2} |(\omega_j \partial_t + \partial_j) \Gamma^{\alpha} Y|^2 dy$$

$$= -2 \int e^{-q(\sigma)} \partial_t \Gamma^{\alpha} Y \cdot [(\nabla X)^{-\top} \nabla \Gamma^{\alpha} p] dy$$

$$-2 \int e^{-q(\sigma)} \partial_t \Gamma^{\alpha} Y \cdot \sum_{\beta + \gamma = \alpha, \ \gamma \neq \alpha} C_{\alpha}^{\beta} (\nabla X)^{-\top} (\nabla \Gamma^{\beta} Y)^{\top} (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^{\gamma} Y dy$$

$$\lesssim \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}} \| (\nabla X)^{-\top} \|_{L^{\infty}} \left( \|\nabla \Gamma^{\alpha} p\|_{L^2} + \sum_{\beta + \gamma = \alpha, \ \gamma \neq \alpha} \| (\nabla \Gamma^{\beta} Y)^{\top} (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^{\gamma} Y \|_{L^2} \right),$$

我们将经常用到  $\|(\nabla X)^{-\top}\|_{L^{\infty}} \le 4$ . 初一看,由于  $\|\nabla \Gamma^{\alpha} p\|_{L^{2}}$ 中含有  $|\alpha|+2$  阶导数,而能量中仅有  $|\alpha|+1$  阶导数,我们似乎总是损失一个导数. 这是一个需要处理的技术问题,详细的分析参见文献 [5]. 我们可以得到如下估计:

$$\begin{split} \|\nabla \Gamma^{\alpha} p\|_{L^{2}} &\lesssim \sum_{\beta + \gamma = \alpha, \ \gamma \neq \alpha} \||\nabla \Gamma^{\beta} Y||(\partial_{t}^{2} - \Delta)\Gamma^{\gamma} Y|\|_{L^{2}} \\ &+ \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa - 2}^{\frac{1}{2}} \|\langle t - r \rangle^{-1} (\omega_{i} \partial_{t} + \partial_{i})\Gamma^{\beta} Y\|_{L^{2}} + \langle t \rangle^{-1} \mathcal{E}_{\kappa - 2}^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}}. \end{split}$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \int e^{-q(\sigma)} (|\partial_t \Gamma^{\alpha} Y|^2 + |\nabla \Gamma^{\alpha} Y|^2) dy + \int \frac{e^{-q(\sigma)}}{1 + \sigma^2} (|\omega \partial_t \Gamma^{\alpha} Y + \nabla \Gamma^{\alpha} Y|^2) dy$$

$$\lesssim \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}} \sum_{\beta + \gamma = \alpha, \ \gamma \neq \alpha} \|(\nabla \Gamma^{\beta} Y)^{\top} (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^{\gamma} Y\|_{L^2}$$

$$+ \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa - 2}^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}} \|\langle t - r \rangle^{-1} (\omega_j \partial_t + \partial_j) \Gamma^{\beta} Y\|_{L^2} + \langle t \rangle^{-1} \mathcal{E}_{\kappa - 2}^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa}. \tag{4.11}$$

我们可以利用前面的引理作如下估计:

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha,\ \gamma\neq\alpha} \|(\nabla\Gamma^{\beta}Y)^{\top}(\partial_t^2 - \Delta)\Gamma^{\gamma}Y\|_{L^2}$$

$$\begin{split} &\lesssim \sum_{\beta+\gamma=\alpha,\ |\gamma|\leqslant [|\alpha|/2]} \|\nabla\Gamma^{\beta}Y\|_{L^{2}} \|(\partial_{t}^{2}-\Delta)\Gamma^{\gamma}Y\|_{L^{\infty}} \\ &+ \sum_{\beta+\gamma=\alpha,\ |\beta|\leqslant [|\alpha|/2],\gamma\neq\alpha} \|\nabla\Gamma^{\beta}Y\|_{L^{\infty}} \|(\partial_{t}^{2}-\Delta)\Gamma^{\gamma}Y\|_{L^{2}} \\ &\lesssim \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}} \|(\partial_{t}^{2}-\Delta)\Gamma^{\leqslant\kappa-4}Y\|_{L^{2}} + \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa-2}^{\frac{1}{2}} \|(\partial_{t}^{2}-\Delta)\Gamma^{\leqslant\kappa-2}Y\|_{L} \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-1} \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa-2}. \end{split}$$

将上式代入 (4.11) 并利用 Cauchy 不等式可得

$$\frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq \kappa - 1} \int e^{-q(\sigma)} (|\partial_t \Gamma^{\alpha} Y|^2 + |\nabla \Gamma^{\alpha} Y|^2) dy \lesssim \langle t \rangle^{-1} \mathcal{E}_{\kappa} \mathcal{E}_{\kappa - 2}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.12}$$

这里用到了  $\mathcal{E}_{\kappa-2} \ll 1$ . 这就是我们所需要的高阶能量估计.

至于低阶能量估计, 我们将 (4.3) 改写为

$$(\nabla X)^\top (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^\alpha Y + \nabla \Gamma^\alpha p = -\sum_{\beta + \gamma = \alpha, \gamma \neq \alpha} C_\alpha^\beta (\nabla \Gamma^\beta Y)^\top (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^\gamma Y.$$

将旋度算子作用到上面的方程并求负一阶导数可得

$$(\partial_t^2 - \Delta)(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla^{\perp} \cdot \Gamma^{\alpha} Y = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{\alpha}^{\beta} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla^{\perp} \cdot [(\nabla \Gamma^{\beta} Y)^{\top} (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^{\gamma} Y]. \tag{4.13}$$

经过如此过程, 我们发现变换后的方程满足强零条件 (4.1), 条件是  $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla^{\perp} \cdot \Gamma^{\alpha}Y$  所对应的能量能够在总能量中起主导作用.

上式两边同时乘以  $\partial_t(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla^{\perp}\cdot\Gamma^{\alpha}Y$ , 然后在  $\mathbb{R}^2$  积分, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (|\partial_t (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla^{\perp} \cdot \Gamma^{\alpha} Y|^2 + |\nabla (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla^{\perp} \cdot \Gamma^{\alpha} Y|^2) dy 
\lesssim \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \|\partial_t (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla^{\perp} \cdot \Gamma^{\alpha} Y\|_{L^2} \||\nabla \Gamma^{\beta} Y|| (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^{\gamma} Y|\|_{L^2} 
\lesssim \mathcal{E}_{\kappa - 2}^{\frac{1}{2}} \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \||\nabla \Gamma^{\beta} Y|| (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma^{\gamma} Y|\|_{L^2}.$$

我们可以应用前面的引理作如下估计:

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|\leqslant [|\alpha|/2]} |||\nabla \Gamma^{\beta}Y||(\partial_{t}^{2}-\Delta)\Gamma^{\gamma}Y|||_{L^{2}}$$

$$\lesssim ||\nabla \Gamma^{\leqslant [|\alpha|/2]}Y||_{L^{\infty}} ||(\partial_{t}^{2}-\Delta)\Gamma^{\leqslant |\alpha|}Y||_{L^{2}}$$

$$\lesssim \langle t \rangle^{-3/2} \mathcal{E}_{\kappa-2}^{\frac{1}{2}} ||\langle t \rangle(\partial_{t}^{2}-\Delta)\Gamma^{\leqslant \kappa-2}Y||_{L^{2}}$$

$$\lesssim \langle t \rangle^{-3/2} \mathcal{E}_{\kappa-2} \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}}.$$

类似地, 由  $[|\alpha|/2] + 4 \le \kappa - 2$  可得

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\gamma|\leqslant [|\alpha|/2]} |||\nabla \Gamma^{\beta}Y||(\partial_t^2-\Delta)\Gamma^{\gamma}Y|||_{L^2}$$

$$\lesssim \|(1-\varphi^t)\nabla\Gamma^{\leqslant \kappa-3}Y\|_{L^{\infty}}\|(1-\varphi^t)(\partial_t^2-\Delta)\Gamma^{\leqslant [|\alpha|/2]}Y\|_{L^2}$$

$$+\|\varphi^t\nabla\Gamma^{\leqslant \kappa-3}Y\|_{L^2}\|\varphi^t(\partial_t^2-\Delta)\Gamma^{\leqslant [|\alpha|/2]}Y\|_{L^{\infty}}$$

$$\lesssim \langle t\rangle^{-3/2}\mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}}\|\langle t\rangle(1-\varphi^t)(\partial_t^2-\Delta)\Gamma^{\leqslant [|\alpha|/2]}Y\|_{L^2}$$

$$+\langle t\rangle^{-3/2}\mathcal{E}_{\kappa-2}^{\frac{1}{2}}\|\langle t\rangle\varphi^t(\partial_t^2-\Delta)\Gamma^{\leqslant [|\alpha|/2]+2}Y\|_{L^2}$$

$$\lesssim \langle t\rangle^{-3/2}\mathcal{E}_{\kappa-2}\mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}}.$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq \kappa - 3} \int |D(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla^{\perp} \cdot \Gamma^{\alpha} Y|^2 dy \lesssim \langle t \rangle^{-3/2} \mathcal{E}_{\kappa}^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\kappa - 2}. \tag{4.14}$$

现在研究  $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla^{\perp}\cdot\Gamma^{\alpha}Y$  所对应的能量的主导性. 利用 (4.4) 可得

$$\begin{split} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot D\Gamma^{\alpha} Y &= (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} D \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{\alpha}^{\beta} [\partial_{1} \Gamma^{\beta} Y^{2} \partial_{2} \Gamma^{\gamma} Y^{1} - \partial_{1} \Gamma^{\gamma} Y^{1} \partial_{2} \Gamma^{\beta} Y^{2}] \\ &= (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{\alpha}^{\beta} [\partial_{1} D \Gamma^{\beta} Y^{2} \partial_{2} \Gamma^{\gamma} Y^{1} - \partial_{1} \Gamma^{\gamma} Y^{1} \partial_{2} D \Gamma^{\beta} Y^{2}] \\ &\quad + (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{\alpha}^{\beta} [\partial_{1} \Gamma^{\beta} Y^{2} \partial_{2} D \Gamma^{\gamma} Y^{1} - \partial_{1} D \Gamma^{\gamma} Y^{1} \partial_{2} \Gamma^{\beta} Y^{2}] \\ &= (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla^{\perp} \cdot \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{\alpha}^{\beta} [D \Gamma^{\beta} Y^{2} \nabla \Gamma^{\gamma} Y^{1} - \nabla \Gamma^{\beta} Y^{2} D \Gamma^{\gamma} Y^{1}]. \end{split}$$

因此,

$$\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla \cdot D\Gamma^{\alpha}Y\|_{L^{2}} \lesssim \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \||D\Gamma^{\beta}Y||D\Gamma^{\gamma}Y|\|_{L^{2}}$$

$$\lesssim \|D\Gamma^{\leqslant |\alpha|}Y\|_{L^{2}} \|D\Gamma^{\leqslant [|\alpha|/2]}\|_{L^{\infty}}$$

$$\lesssim \mathcal{E}_{\kappa-2}.$$
(4.15)

这样,我们可以看到,由于

$$|\|D\Gamma^{\leqslant \kappa-3}Y\|_{L^2}^2 - \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla^{\perp} \cdot D\Gamma^{\leqslant \kappa-3}Y\|_{L^2}^2| \lesssim \mathcal{E}_{\kappa-3}^2 \lesssim \epsilon^2 \mathcal{E}_{\kappa-2},$$

所以,  $\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla^{\perp}\cdot D\Gamma^{\leqslant\kappa-3}Y\|_{L^2}$  与  $\|D\Gamma^{\leqslant\kappa-3}Y\|_{L^2}$  是等价的. 这就证明了  $\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla^{\perp}\cdot D\Gamma^{\leqslant\kappa-3}Y\|_{L^2}$  的主导性. 我们得到了想要的低阶能量估计, 进而证明了定理.

致谢 王科研、雷震感谢《中国科学: 数学》特约编辑陈化教授、洪家兴院士和张平教授的邀请, 这使他们得以共同为庆贺齐民友教授 90 华诞专辑撰稿表达对齐先生深深的敬意与祝福. 他们还非常感谢审稿人极为认真的审稿.

#### 参考文献 -

- 1 Sideris T C. Nonresonance and global existence of prestressed nonlinear elastic waves. Ann of Math (2), 2000, 151: 849–874
- 2 Agemi R. Global existence of nonlinear elastic waves. Invent Math, 2000, 142: 225-250
- 3 Sideris T C, Thomases B. Global existence for three-dimensional incompressible isotropic elastodynamics via the incompressible limit. Comm Pure Appl Math, 2005, 58: 750–788

- 4 Sideris T C, Thomases B. Global existence for three-dimensional incompressible isotropic elastodynamics. Comm Pure Appl Math, 2007, 60: 1707–1730
- 5 Lei Z. Global well-posedness of incompressible elastodynamics in two dimensions. Comm Pure Appl Math, 2016, 69: 2072–2106
- Klainerman S. The null condition and global existence to nonlinear wave equations. Lect Appl Math, 1986, 23: 293–326
- 7 Christodoulou D. Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data. Comm Pure Appl Math, 1986, 39: 267–282
- 8 Alinhac S. The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions, I. Invent Math, 2001, 145: 597–618
- 9 Lin F H. Some analytical issues for elastic complex fluids. Comm Pure Appl Math, 2012, 65: 893–919
- 10 Cai Y, Lei Z, Lin F, et al. Vanishing viscosity limit for the incompressible viscoelasticity in two dimensions. ArXiv:1703.01176, 2017
- 11 Lei Z, Liu C, Zhou Y. Global solutions for incompressible viscoelastic fluids. Arch Ration Mech Anal, 2008, 188: 371–398
- 12 Lei Z. Global existence and incompressible limit for systems of viscoelastic fluids. PhD Thesis. Shanghai: Fudan University, 2006
- 13 Li T T, Chen Y M. Global Classical Solutions for Nonlinear Evolution Equations. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 45. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1992
- 14 Klainerman S. Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation. Comm Pure Appl Math. 1985, 38: 321–332
- 15 Sideris T C. The null condition and global existence of nonlinear elastic waves. Invent Math, 1996, 123: 323–342
- 16 Sideris T C, Thomases B. Local energy decay for solutions of multi-dimensional isotropic symmetric hyperbolic systems. J Hyperbolic Differ Equ, 2006, 3: 673–690
- 17 Lei Z, Wang F. Uniform bound of the highest energy for the three dimensional incompressible elastodynamics. Arch Ration Mech Anal, 2015, 216: 593–622
- 18 Wang X. Global existence for the 2D incompressible isotropic elastodynamics for small initial data. Ann Henri Poincaré, 2017, 18: 1213–1267
- 19 Lei Z, Sideris T C, Zhou Y. Almost global existence for 2-D incompressible isotropic elastodynamics. Trans Amer Math Soc, 2015, 367: 8175–8197
- 20 Alinhac S. Blowup of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions, II. Acta Math, 1999, 182: 1–23
- 21 Alinhac S. Blowup of small data solutions for a quasilinear wave equation in two space dimensions. Ann of Math (2), 1999, 149: 97–127
- 22 Alinhac S. Rank 2 singular solutions for quasilinear wave equations. Int Math Res Not IMRN, 2000, 2000: 955-984
- 23 Alinhac S. The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions, II. Amer J Math, 2001, 123: 1071–1101
- 24 John F. Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimensions. Comm Pure Appl Math, 1981, 34: 29-51
- 25 John F. Formation of singularities in elastic waves. In: Lecture Notes in Physics, vol. 195. New York: Springer-Verlag, 1984, 194–210
- 26 John F. Almost global existence of elastic waves of finite amplitude arising from small initial disturbances. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 615–666
- 27 John F, Klainerman S. Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions. Comm Pure Appl Math, 1984, 37: 443–455
- 28 Katayama S. Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, II. Publ Res Inst Math Sci, 1995, 31: 645–665
- 29 Klainerman S, Sideris T C. On almost global existence for nonrelativistic wave equations in 3D. Comm Pure Appl Math, 1996, 49: 307–321
- 30 Ogden R. Nonlinear Elastic Deformations. Mathematics and Its Applications. New York: Halsted Press, 1984
- 31 Sideris T C, Tu S Y. Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds. SIAM J Math Anal, 2001, 33: 477–488
- 32 Tahvildar-Zadeh A S. Relativistic and nonrelativistic elastodynamics with small shear strains. Ann Inst H Poincaré Phys Théor, 1998, 69: 275–307
- 33 Yokoyama K. Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions. J Math Soc Japan, 2000, 52: 609–632
- 34 Yin S, Cui X. Long-time existence of nonlinear inhomogeneous compressible elastic waves. ArXiv:1707.00504, 2017

- 35 Wang F. Uniform bound of Sobolev norms of solutions to 3D nonlinear wave equations with null condition. J Differential Equations, 2014, 256: 4013–4032
- 36 Alinhac S. Geometric Analysis of Hyperbolic Differential Equations: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2010

# Global well-posedness for systems of elasticity

Keyan Wang & Zhen Lei

Abstract This is a survey paper. We mainly revisit those highlighted results on the global well-posedness of classical solutions near equilibrium for systems of compressible and incompressible elasticity. Due to the fact that the methods and ideas used for elasticity are closely related to those used for quasilinear wave equations, we will also revisit some corresponding highlighted results on quasilinear wave equations. We will try to pinpoint the key difficulties of those problems and the key methods to overcome them, and present direct and simple proofs as many as we can. We will also raise some open questions and make a few comments to attract the attention of young researchers.

Keywords elasticity, global well-posedness, incompressibility, compressibility MSC(2010) 35Q35

doi: 10.1360/N012017-00060