

动态 copula 模型及在金融中的应用

献给严加安院士 80 华诞

李平^{1,2*}, 李杰^{1,2}, 韩颖薇³

1. 北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100191;
 2. 北京航空航天大学复杂系统分析与管理决策教育部重点实验室, 北京 100191;
 3. 中国地质大学(北京)经济管理学院, 北京 100083
- E-mail: liping124@buaa.edu.cn, lijie0915@btbu.edu.cn, hanyingwei0517@163.com

收稿日期: 2020-12-14; 接受日期: 2021-02-27; 网络出版日期: 2021-12-08; * 通信作者
国家自然科学基金(批准号: 72033001, 71571008 和 71901198) 和湖北文化产业经济研究中心开放基金(批准号:
HBCIR2018Z001) 资助项目

摘要 copula 模型因为能全面和灵活地刻画变量之间复杂的相依结构, 因此被广泛应用于金融领域。金融市场的动态发展导致金融变量之间的相关性随时间变化而变化, 这种动态相关性可以通过使 copula 函数或其参数随时间变化进行建模。本文介绍了动态 copula 模型的引入和发展、目前常见的几种动态 copula 模型、动态 copula 模型在金融中的应用现状等几方面, 最后给出研究展望。

关键词 动态 copula 模型 金融市场 相依结构 衍生品定价 风险管理

MSC (2020) 主题分类 91G70, 97K80, 97M30

1 引言

相关性分析是金融计量学中建模工作的核心问题之一, 风险管理、投资组合分析及多元衍生产品定价等问题都涉及金融变量之间的相关性分析。与 Pearson 线性相关系数相比, copula 函数能更好地刻画变量之间复杂的非对称相依结构。从实际应用的角度来看, copula 方法的优势在于, 可以灵活地选择多元变量的边际分布, 然后通过合适的 copula 函数进行连接。因此, 可以独立于变量的边际分布进而对它们之间的相依结构进行建模。由于 copula 函数本身的结构特点, 使其优于传统模型的线性和对称相依结构, 可以刻画变量之间非线性和不对称的相关性。copula 的概念早在 1959 年就由 Sklar^[1] 提出, 但直到 1999 年 Embrechts 等^[2] 才首次将 copula 理论引入金融领域, 使得越来越多的学者应用 copula 方法研究金融问题。

在初期的应用中, 学者们采用 copula 方法刻画变量之间的相依结构时, 大多假设 copula 函数的参数是常数。随着研究的发展, 许多实证研究表明, 金融变量间的相依结构是随时间发生变化的(参

英文引用格式: Li P, Li J, Han Y. Dynamic copulas and applications in finance (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1769–1790,
doi: 10.1360/SSM-2020-0342

见文献 [3–5]), 动态 copula 模型也应运而生. 最初一些学者利用动态条件相关性 (dynamic conditional correlation, DCC) 模型 (参见文献 [5, 6]) 来刻画 copula 函数中线性相关系数的动态性, 从而建立了 DCC copula 模型 (参见文献 [7]). 另外两类近年来比较流行的动态 copula 模型分别基于观测值驱动 (observation-driven) 及参数驱动 (parameter-driven), 这两类模型允许参数随着数据的更新而平滑地 (smoothly) 变化.

相对于 copula 参数的平滑变化模型, Bernardi 和 Petrella^[8] 及 Bernardi 等^[9] 在研究金融危机及其他罕见事件的过程中, 发现金融变量之间的相依结构还存在结构变点 (structural breaks). 在处理相依结构变点的方法中, Markov 转换 (switching) 模型已经被证明是一种能有效捕捉波动率和相关性动态非平滑变化的模型. 例如, Jondreau 和 Rockinger^[10]、Rodriguez^[11] 和 Chollete 等^[12] 是最早采用具有静态机制依赖参数的 Markov 机制转换 copula 来分析金融传染的学者. 由于静态依赖机制无法刻画相关参数在每个状态下的持续变化, 部分学者将已有的 copula 参数动态模型应用于刻画 Markov 机制的动态特征 (参见文献 [13, 14]). 此外, copula 的动态特征不仅包括 copula 的参数, 部分学者还考虑了 copula 类型也可能随时间发生变化 (参见文献 [15–17]). 这类模型的主要思想是, 结合一定的变点判定规则, 采用二元分割法将整个样本区间分为若干个具有不同相关特征的小区间.

虽然以上所介绍的研究中均为二元 copula 函数的动态模型, 但多元变量的相依结构的动态特征也可以在二元动态基础上进行构建. 一些学者将已有的参数更新过程应用于多元 copula 模型中 (参见文献 [18, 19]), 但早期的多元 copula 函数具有一定的局限性. 后来在刻画多变量相依结构时, 一些学者逐渐关注 Joe^[20]、Bedford 和 Cooke^[21, 22]、Kurowicka 和 Cooke^[23]、Aas 等^[24] 所提出并完善的藤 (vine) copula 或成对 (pair) copula 结构. 该结构是在二元 copula 基础上, 构建起来的一种可以刻画多变量之间条件相依结构的 copula 模型. 因此, 以已有的动态二元 copula 为基础, 通过藤结构进行整合, 可以构建出能刻画多个变量之间动态相依结构的高维模型 (参见文献 [25–28]). 另一个流行的研究方向是将成对 copula 的结构与机制转换模型相结合, 构建机制转换藤 copula 模型 (参见文献 [12, 29]). 从本质上讲, 此类模型假设一个隐藏的潜在过程 (可以理解为金融中的经济状况) 会影响时间序列的发展. 藤 copula 虽然在处理多元变量相依结构时具有很强的灵活性, 但一旦变量维度较高时 (如大于 50, 被称为超高维), 藤 copula 则需要估计过多的参数, 从而产生巨大的计算负担. 处理超高维金融变量动态相依结构的模型主要涉及因子模型, 如 Creal 和 Tsay^[30] 的基于因子结构的随机 copula 模型, 以及 Oh 和 Patton^[31] 在文献 [32] 的因子 copula 模型的基础上, 采用 Creal 等^[33] 的广义自回归得分 (generalized autoregressive score, GAS) 模型来描述其中参数的动态特征, 从而构建的时变因子 copula 模型.

本文余下部分结构如下: 第 2 节详细介绍几种主流的动态 copula 模型, 第 3 节介绍动态 copula 模型在一些主要金融领域中的应用, 第 4 节对本文内容进行简要总结并对未来研究方向进行展望.

2 动态 copula 模型介绍

本节简要介绍几种应用最为广泛的动态 copula 模型, 其他大部分动态 copula 模型均是在此基础上进行扩展或综合而成. 这些主要的动态 copula 模型包括最早的 DCC copula 模型、应用较多的时变 (time-varying) copula 模型、随机自回归 (stochastic copula autoregressive, SCAR) copula 模型、机制转换 (regime-switching) copula 模型、变结构 copula 模型以及近年来较为流行的 GAS copula 模

型等.

为了方便说明, 假设一个 d 维样本 y_t 的数据生成过程 (data generating process, DGP) 为

$$\begin{aligned} y_t &= (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{d,t})^T, \\ y_{i,t} &= \mu_{i,t}(\phi_i) + \varepsilon_{i,t}(\phi_i), \quad i = 1, \dots, d, \\ \varepsilon_{i,t}(\phi_i) &= \sigma_{i,t}(\phi_i)e_{i,t}(\phi_i), \\ e_{i,t} &\sim F_{i,t}(0, 1; \phi_i), \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 ϕ_i 为第 i 个变量边际分布的参数集, $\mu_{i,t}$ 和 $\sigma_{i,t}$ 分别为条件均值和条件方差过程, $e_{i,t}$ 为服从标准分布 $F_{i,t}$ 的标准残差过程. 因此可以通过概率积分变换得到服从均匀分布的变量

$$u_{i,t} = F_{i,t}(e_{i,t}; \phi_i) = F_{i,t}\left(\frac{y_{i,t} - \mu_{i,t}(\phi_i)}{\sigma_{i,t}(\phi_i)}; \phi_i\right), \quad i = 1, \dots, d. \tag{2.2}$$

进而根据 Sklar 定理^[1] 可知, 样本 y_t 的联合分布函数就等于 u_t 的 copula 函数

$$\begin{aligned} F_t^y(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{d,t}) &= F_t^e(e_{1,t}, e_{2,t}, \dots, e_{d,t}) \\ &= C_t(F_{1,t}(e_{1,t}), \dots, F_{d,t}(e_{d,t}); \theta_t) \\ &= C_t(u_{1,t}, \dots, u_{d,t}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 θ_t 为 copula 函数在 t 时刻的参数.

2.1 DCC copula 模型

Engle^[5] 提出了一种带有 DCC 的多元广义自回归条件异方差 (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, GARCH) 模型, 其中线性相关系数矩阵由各变量标准残差的交叉乘积和自回归项所驱动. 首先估计各变量的一元 GARCH 模型的参数, 再估计相关系数矩阵过程的参数. 这种对于相关系数矩阵的更新过程同样可以用于 copula 函数中参数的更新, 尤其是具有线性相关系数矩阵的 Gaussian copula 和 t copula. DCC 模型中对于相关系数矩阵 R_t 的动态性刻画如下:

$$R_t = \text{diag}Q_t^{-1/2}Q_t\text{diag}Q_t^{-1/2}, \tag{2.4}$$

$$Q_t = \tilde{Q}(1 - \alpha - \beta) + \alpha e_{t-1}e'_{t-1} + \beta Q_{t-1}, \tag{2.5}$$

其中 $e_t = (e_{1,t}, \dots, e_{d,t})^T$ 为各变量的标准残差所构成的向量; \tilde{Q} 为样本的无条件相关矩阵; α 和 β 为标量参数, 可以通过极大化 copula 的似然函数来估计.

2.2 时变 copula 模型

Patton^[34] 提出了一种观测值驱动的时变参数的二元 copula 模型, 其参数通过包含过去数据和自回归项的含参方程进行更新, 对于 Gaussian copula 和 t copula 中的线性相关系数 ρ_t 的更新过程如下:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \Lambda\left(\omega + \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\Phi^{-1}(u_{1,t-1})\Phi^{-1}(u_{2,t-1})) + \beta \rho_{t-1}\right), \\ \Lambda(x) &= \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $\Lambda(\cdot)$ 是用于保证相关系数处于 $(-1, 1)$ 区间的变换函数; $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数; m 为滞后阶数, 表示用来预测未来相关系数所用到的过去信息的长度 (例如, 文献 [34] 设定 $m = 10$). 等式中的驱动项为过去 m 期的观测值乘积的均值, 即线性相关系数的样本估计值. 此外, 等式中的 ρ_{t-1} 可用 $\Lambda^{-1}(\rho_{t-1})$ 来代替, 表示原参数先经过逆变换函数 $\Lambda^{-1}(\cdot)$ 将取值范围变为 $(-\infty, +\infty)$, 再对变换后的参数 $\Lambda^{-1}(\rho_t)$ 利用自回归过程进行更新. 实际上, 在之后的对于该类观测值驱动的自回归参数更新过程的文献中, 大部分学者均采用后者. 对于 Archimedean copula 而言, 其参数 (以尾部相关系数 τ_t 为对象) 的更新过程为

$$\begin{aligned}\tau_t &= \tilde{\Lambda}\left(\omega + \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |u_{1,t-i} - u_{2,t-i}| + \beta \tau_{t-1}\right), \\ \tilde{\Lambda}(x) &= \frac{1}{1 + e^{-x}},\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中 $\tilde{\Lambda}(\cdot)$ 是用于保证尾部参数处于 $(0, 1)$ 区间内的变换函数. 类似地, 等式中的 τ_{t-1} 也可以用 $\tilde{\Lambda}^{-1}(\rho_t)$ 来代替. 等式中的驱动项为过去 m 期两变量 $u_{1,t}$ 和 $u_{2,t}$ 距离的均值, 即两者同向变化或反向变化会影响到 copula 函数的一致性 (concordance) 排序, 从而影响其尾部相关参数.

2.3 随机自回归 copula 模型

相对于 DCC 和 Patton^[34] 的观测值驱动模型, Hafner 和 Manner^[35] 提出了一种参数驱动的更新模型, 即更新过程中的驱动变量不是观测值, 而是一种独立的随机过程. 类似等式 (2.6) 和 (2.7), 首先将 copula 参数 θ_t 进行适合的逻辑变换, 如 $\theta_t = \hat{\Lambda}(\lambda_t)$, $\hat{\Lambda} : \mathbf{R} \rightarrow \Theta$, 保证其始终处于自身的定义域 Θ 内, 再将变换后的变量 λ_t 用于更新过程. 在 SCAR 模型中 λ_t 是一个隐含过程, 并假设其服从如下一阶 Gauss 自回归过程:

$$\lambda_t = \omega + \alpha \eta_t + \beta \lambda_{t-1},\tag{2.8}$$

其中 η_t 是独立同分布且服从标准正态分布的更新变量, $|\beta| < 1$ 保证了 λ_t 的平稳性. 对于不同的 copula 函数, 其参数的取值范围不同, 对应的逻辑变换函数也不同. 此外, 由于 $\{\lambda_t\}$ 是不可观测的, 因此无法直接对于更新过程中的参数进行估计, 可首先将其作为变量对于 copula 的似然函数求积分, 得到只包含参数 (ω, α, β) 以及观测值 (u_1, u_2) 的似然函数; 再进行极大似然估计. 具体介绍可参见文献 [35, 36].

2.4 机制转换 copula 模型

应用于 copula 模型中的另一种动态明确形式允许 copula 函数在事前确定数量的几种状态中, 随时间进行变化. 这里 copula 函数的变化, 可以是在 copula 类型不变的情形下, 其参数在几种状态之间变化; 也可以是 copula 函数类型发生变化, 从而刻画不同时间的不同相关结构, 而不仅仅是相关性的大小. 为了简要说明, 下面将以只考虑 copula 参数变化而类型不变的情形为例, 对于机制转换模型进行介绍.

定义一个隐含变量 k_t , 其离散地从给定的 K 状态 (机制) 中取值, 如 $k = \{1, 2, \dots, K\}$. 则在当前状态为 $k_t = k$ 时,

$$(u_{1,t}, u_{2,t} \mid k_t = k) \sim C(u_{1,t}, u_{2,t}; \theta_k)\tag{2.9}$$

且假设 k_t 服从一阶 Markov 过程, 其在 $t-1$ 期为状态 i 的条件下, 第 t 期转移到状态 j 的转移概率为 π_{ij} . 由于 $K=2$ 为金融研究中最常用的情形, 因此下面以两机制的情形为例进行说明, 并由此定义转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \pi_{11} & 1 - \pi_{11} \\ 1 - \pi_{22} & \pi_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

令 $\hat{\xi}_{t|s}$ 为在已知 $s \sim t$ 时刻信息条件下, 分布函数分别处于两种状态的概率向量的估计. 因此, 该系统可以描述为

$$\hat{\xi}_{t|s} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes c_t}{\mathbf{1}'(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes c_t)}, \quad \hat{\xi}_{t+1|t} = P' \hat{\xi}_{t|t}, \quad c_t = \begin{pmatrix} c(u_{1,t}, u_{2,t}; \theta_1) \\ c(u_{1,t}, u_{2,t}; \theta_2) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

其中 $\mathbf{1}$ 为单位向量; 运算符 \otimes 表示 Hadamard 乘积, 即等长度的向量对应元素相乘. 从而可得到机制转换假设下 copula 函数对应的似然函数

$$\log L(\theta_1, \theta_2, \pi_{11}, \pi_{22}; u_1, u_2) = \sum_{t=1}^T \log(\mathbf{1}^T(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes c_t)), \quad (2.12)$$

且可通过给定各参数的初始值, 利用期望 - 最大 (expectation-maximization, EM) 算法迭代地对参数进行估计, EM 算法过程可参见文献 [37].

2.5 变结构 copula 模型

除了机制转换 copula 外, 另一种考虑了 copula 类型变化的动态模型是变结构 copula, 即在整个样本区间上, 假设样本所服从的相关结构或 copula 类型并不是不变的, 而是存在一些变点, 在变点前后, copula 的类型也是不同的. Guégan 和 Zhang^[15] 首次引入了 copula 模型变点分析的思路, 通过一定的判别条件来寻找整个样本区间上的结构变点. 假设 X_{1t} 和 X_{2t} 为两个随机变量, 其对应的变结构 copula 的主要模型如下所示:

$$\begin{aligned} (X_{1t}, X_{2t}) &\sim C_1(F_{1t}(x_{1t}), F_{2t}(x_{2t}); \theta_1), \quad t = 1, \dots, s_1, \\ (X_{1t}, X_{2t}) &\sim C_2(F_{1t}(x_{1t}), F_{2t}(x_{2t}); \theta_2), \quad t = s_1 + 1, \dots, s_2, \\ &\dots \\ (X_{1t}, X_{2t}) &\sim C_k(F_{1t}(x_{1t}), F_{2t}(x_{2t}); \theta_k), \quad t = s_{k-1} + 1, \dots, s_k = T, \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 T 是样本规模, $C_k(\dots; \theta_k)$ 是以 θ_k 为参数的二元 copula 函数, s_j 对应于 copula 函数的第 j 个变点. 根据文献 [15], 可以用二元分割法寻找变点: 首先在整个样本区间上判断是否存在结构变点, 如果存在, 则在两个子区间上分别寻找各自的结构变点, 以此类推, 直到所有的子区间上均不存在结构变点为止. 而对于变点在某个区间上是否存在, 可以由拟合优度检验 (goodness-of-fit test) 来确定. 首先根据 Akaike 信息准则 (Akaike information criterion, AIC) 选择区间 $[1, m]$ 上的拟合最优的 copula C_{θ_m} , 然后构建 Cramér-von Mises 统计量:

$$\begin{aligned} S_m &= \int_{[0,1]^2} \mathbf{C}_m(u_1, u_2)^2 dC_m(u_1, u_2), \\ \mathbf{C}_m(u_1, u_2) &= \sqrt{m}|C_m(u_1, u_2) - C_{\theta_m}(u_1, u_2)|, \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中 C_m 为经验 copula 函数. 当 S_m 值较大时, 会拒绝区间上不存在变点的原假设, 对应的渐近的 p 值可由参数引导过程来确定 (参见文献 [38]). 一旦确定该区间上存在变点, 则可由二元分割过程来确定变点的位置和数量. 例如, 在判断 s 是否为变点时, 构建如下统计量:

$$Z_m = \max_{1 \leq j \leq s} \left\{ 2 \left(\sum_{1 \leq j \leq s} \log c(u_{1j}, u_{2j}) + \sum_{s \leq j \leq m} \log c(u_{1j}, u_{2j}) - \sum_{1 \leq j \leq m} \log c(u_{1,j}, u_{2,j}) \right) \right\}. \quad (2.15)$$

如果 Z_m 值较大, 则拒绝存在变点. 否则可确定变点为

$$s_m = \min\{1 \leq s \leq m : Z_m\}.$$

渐近 p 值的计算参见文献 [39].

2.6 GAS copula 模型

近年来较为流行的一种可用于 copula 函数参数的动态刻画的模型为 Creal 等^[33] 提出的 GAS 模型. 该模型类似 DCC 和 Patton^[34] 的时变模型, 也是一种观测值驱动的模型, 相对于 Patton^[34] 的时变模型来说, 该模型最大的贡献是对于驱动项的设定, 即通过参数的得分函数来驱动参数本身的更新. 通过对于其中某些成分 (如分布函数、参数) 进行假设, 可以得到一些已有的其他同类模型, 属于一种较为广义的模型. GAS 模型对于参数向量 θ_{t+1} 更新方程的设定如下:

$$\theta_{t+1} = \omega + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j \theta_{t-j+1} \quad (2.16)$$

以及

$$\begin{aligned} s_t &= S_t \cdot \nabla_t, \\ \nabla_t &= \frac{\partial \ln c_t(u_1, u_2; \theta_t)}{\partial \theta_t}, \\ S_t &= \Gamma(\theta_t)^{-\zeta}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中 ω 为参数向量, A 和 B 为参数矩阵. 驱动项 s_t 为规模化的参数得分向量 (scaled score), S_t 为规模矩阵 (scaling matrix), 由参数向量的 Fisher 信息矩阵 $\Gamma(\cdot)$ 的负次幂表示, 且 $\zeta \in \{0, 1/2, 1\}$. 对应于不同的 copula 类型和不同的 ζ 取值, GAS 模型可得到不同的更新过程, 如 GARCH^[40]、ADC^[41] 等模型, 具体设定参见文献 [33].

GAS 模型对于驱动项的设定是以得分函数为基础的, 这种设定具有明显的含义和意义. 首先, 相对于参数的得分函数向量为其对应似然函数的最大上升方向, 沿此方向对于参数进行更新可提高当前时刻模型的局部拟合程度. 其次, 得分函数依赖于完全的密度函数, 而不仅仅是观测值的一阶矩和二阶矩, 因此可以充分利用观测数据和密度函数的信息来更新参数.

2.7 动态藤 copula 模型

为了处理多元变量之间的动态相关结构, 有的学者考虑构建动态藤 copula 模型. 藤 copula 或成对 copula 结构由 Joe^[20] 提出, 并由 Bedford 和 Cooke^[21, 22]、Kurowicka 和 Cooke^[23]、Aas 等^[24] 所完善. 在此基础之上, Almeida 等^[26] 通过将藤结构与 SCAR 和 GAS 模型相结合来构建高维时变 D- 藤 copula 模型.

一方面，根据 Sklar^[1] 定理可知，多元联合分布的密度函数可以表示为多元 copula 密度函数与各变量边际分布密度函数的乘积：

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1, \dots, n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n), \quad (2.18)$$

其中 $c_{1, \dots, n}$ 为 n 元 copula 的密度函数。另一方面，联合密度函数可以通过条件分布进行分解：

$$\begin{aligned} & f_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= f_1(x_1) \times f_{2|1}(x_2 | x_1) \times f_{3|12}(x_3 | x_1, x_2) \times \cdots \times f_{n|1, \dots, n-1}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中条件分布密度也可以表示为（条件）二元 copula 密度的形式：

$$f(x | \mathbf{v}) = c_{x v_j | \mathbf{v}_{-j}}(F(x | \mathbf{v}_{-j}), F(v_j | \mathbf{v}_{-j})) \cdot f(x | \mathbf{v}_{-j}), \quad (2.20)$$

其中 \mathbf{v} 为条件变量所构成的向量， v_j 为 \mathbf{v} 中任意变量， \mathbf{v}_{-j} 为 \mathbf{v} 向量中去掉变量 v_j 后剩下的部分。对应的（条件）边际分布 $F(x | \mathbf{v})$ 可通过下式计算：

$$F(x | \mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x v_j | \mathbf{v}_{-j}}(F(x | \mathbf{v}_{-j}), F(v_j | \mathbf{v}_{-j}))}{\partial F(v_j | \mathbf{v}_{-j})}, \quad (2.21)$$

其中 $C_{ij|k}$ 为二元 copula 分布函数。因此，(2.19) 可表示为

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f_1 \cdots f_n \\ &\cdot c_{21} \\ &\cdot c_{32|1} \cdot c_{31} \\ &\cdot c_{43|12} \cdot c_{42|1} \cdot c_{41} \\ &\cdots \\ &\cdot c_{n,n-1|1,\dots,n-2} \cdot c_{n,n-2|1,\dots,n-3} \cdots c_{n,2|1} \cdot c_{n1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

比较 (2.18) 和 (2.22)，则可以得到多元 copula 联合密度的藤（或成对）copula 结构表达式

$$c_{1, \dots, n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j+i,j|1,\dots,j-1}(F(x_{j+i} | x_1, \dots, x_{j-1}), F(x_j | x_1, \dots, x_{j-1})). \quad (2.23)$$

对于高维联合分布而言，成对 copula 结构的形式并不是唯一的。其中两种特殊的形式在实际的金融研究中得到了广泛应用，即 Kurowicka 和 Cooke^[23] 所提出的 C- 藤（canonical vine）和 D- 藤（drawable vine）。为了更直观地理解藤 copula 结构，每种成对 copula 的构成形式均可以对应于一种树的集合。图 1 给出了 5 个变量所构成 C- 藤和 D- 藤结构对应的树的形式。

在树结构中，每条边对应一个 copula 密度，如边 $14|23$ 对应于 $c_{14|23}$ ，对应的变量即为该条边邻接的两个结点。C- 藤结构通常适用于在多个变量中存在某个核心变量的情形，而 D- 藤结构中各个变量处于等价的地位。

由于藤 copula 结构是由多个二元 copula 模型在刻画两两变量之间的无条件相关性或条件相关性的基础之上所构建的，因此绝大多数动态（二元）copula 模型（包括前面部分所介绍的几种）均可以应用到藤结构中，从而建立起具有不同时变特征的动态藤 copula 模型。

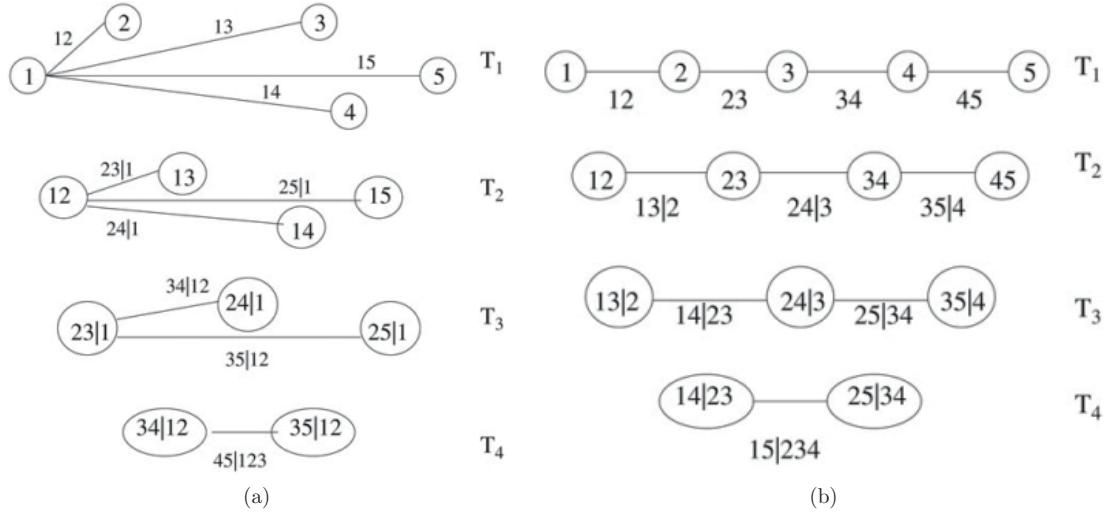


图 1 5 维 C- 藤 (a) 和 D- 藤 (b) 的树结构

3 动态 copula 模型在金融中的应用

copula 函数的含义为联结函数, 其本身属于一种含参的联合分布, 是一种多元模型. 在多元金融时间序列研究中, 通常需要刻画序列之间的相关结构, 加之传统的线性相关系数被证明不适用于大多数情形, 而 copula 函数中的参数与自变量之间的非线性、非对称性(尾部)相关系数一一对应, 因此近年来受到学者们的广泛关注. 随着 copula 函数研究的发展, 动态 copula 能够很好地刻画变量之间随时间变化的相关性, 被逐渐应用于金融时间序列的各方面研究中. 接下来介绍动态 copula 模型在金融中 4 种具体的应用, 包括金融市场间的相关性分析、金融风险分析、多资产衍生品定价以及投资组合选择.

3.1 金融市场间的动态相关性分析

在外汇市场方面, Patton^[34] 在提出时变 copula 的基础上, 研究了德国马克和日元相对于美元汇率在欧元产生前后的动态相关结构, 尤其首次考虑了其不对称的相关性. 通过实证比较, 发现时变 copula 比静态 copula 更能准确刻画汇率之间的相关结构. 在此基础上, Boero 等^[42] 通过改进 copula 参数的更新方程, 构建了半参数动态 copula 模型, 并用于刻画欧元在发行之后与其他 3 种货币汇率之间的动态相关结构. 龚朴和黄荣兵^[43] 利用时变 t copula 模型研究了人民币与美元、日元和欧元汇率之间在汇率改革前后相关结构的变化情形. 类似地, 吴恒煜等^[44] 利用带有机制转换的藤 copula 模型以人民币两次汇率改革和金融危机为时点, 研究了人民币与其他 6 种货币汇率之间的动态不对称相关结构的变化特征. Albulescu 等^[45] 用 Patton^[34] 提出的时变 copula 模型研究全球金融危机前后, 世界主要货币汇率之间动态(尾部)相关性. Stöber 和 Czado^[29] 采用机制转换 R (regular)- 藤 copula 模型构建了 9 种货币相对于美元的汇率之间的相关结构, 试图分析该多元相关结构是否存在不同的相关机制. Liu 等^[46] 利用时变的 C- 藤 copula 模型研究了一带一路政策出台前后, 人民币与东南亚国家货币汇率之间的相关结构的变化. 实证显示, 在一带一路政策出台时, 人民币与东南亚国家货币汇率之间的相关性有明显上升, 尤其是尾部相关性.

在股票市场方面, Okimoto^[47] 首次将 Markov 机制转换模型与二元 copula 模型相结合, 并研究了美国与英国以及其他 G7 国家股市之间的相关性. 通过实证研究发现, 在熊市机制下, 各国股市之间存在明显下尾相关性. 类似地, Chollete 等^[12] 构建了带有机制转换的 C- 藤 copula 模型, 并用于 G5 和拉美国家股市之间的动态相关结构刻画. 此外, Wang 等^[48] 通过将多种时变和静态二元 copula 应用到中国股市和 6 种其他权益市场之间相关性的刻画, 证明动态 copula 比静态 copula 更能准确捕捉股市之间的动态相关结构. 类似地, Hammoudeh 等^[49] 采用时变 copula 模型研究了伊斯兰国家股市之间的动态相关性. 张旭等^[50] 用该模型以中美股市主要行业指标为研究对象, 研究了不同行业之间的联动效应. 闫世军和李从文^[51] 采用具有 DCC 时变特征的 t copula 模型研究了中国和金砖国家股市之间的相关性, 实证发现在峰会期间, 中国与其他金砖国家的相关性有显著增强. Maneejuk 和 Yamaka^[52] 采用时变 copula 模型, 结合谷歌趋势 (Google Trends) 数据, 研究了金融危机前中后美国股市与其他发达国家和发展中国家之间的相关结构的变化特征.

在债券市场方面, Philippas 和 Siriopoulos^[53] 构建了时变 copula 模型, 并用于刻画欧债危机前后希腊国债与欧元区其他国家国债市场的相关性变化, 发现希腊国债危机发生之后, 与欧元区其他国家的相关性显著增加. 类似地, Bekiros 等^[54] 通过比较 DCC 条件下的多种二元 copula, 发现 Joe-Clayton copula 更适用于欧洲各国主权债务和希腊国债之间的相关性刻画, 并以此分析了金融危机和欧债危机前后这种相关结构的动态变化.

此外, 对于不同市场之间相关性的研究包括, Garcia 和 Tsafack^[55] 在考虑了对称和不对称两种机制的前提下, 利用机制转换 copula 模型研究了全球多个国家的股市与债市之间的动态相关结构, 并发现同一类市场的内部的 (尾部) 相关性在两种机制下均较强, 而不同市场之间的相关性则较弱. Fei 等^[13] 采用带有机制转换的时变 copula 模型研究了欧洲信用违约互换 (credit default swap, CDS) 市场与股市之间的动态相关性. Li 和 Li^[17] 在构建了一种变结构 copula 模型的基础上, 研究了国际原油价格与中国能源股市之间的相关结构, 实证研究发现不同时期, 两市场间相关性的强度和类型均会发生变化. Liu 等^[56] 采用时变混合 copula 研究了美国股票、国债和国债期货 3 个市场之间的相关特征, 通过实证发现金融危期间股市和国债市场以及股市和国债期货市场的相关性增强, 而国债市场和国债期货市场的相关性有所减弱. 此外, 江红莉等^[57] 以及钟明和郭文伟^[58] 利用 Patton^[34] 提出的对称 SJC (symmetrized Joe-Clayton) copula 模型研究了我国银行业与房地产业之间的非线性和非对称相关结构.

3.2 金融风险分析和管理

金融风险分析和管理一直以来都是学者、市场参与者和监管机构所关注的很重要的方面, 因此动态 copula 模型也在该领域得到了广泛应用, 所涉及的金融风险主要包括系统性风险、市场风险以及信用风险.

3.2.1 系统性金融风险分析

近年来所发生的金融事件不断强化对于准确预测系统性金融风险的需求. 这种在金融领域的系统性事件主要是指某个或某些金融机构极端状况下的金融损失会对大部分机构的财务健康状况造成巨大影响, 甚至使得整个国家或地区的经济环境形成不利的局面. 随着经济体、市场和机构之间的内在关联水平不断加强, 近年来发生的金融危机均显示着共同的特征. 具体而言, 2007–2008 年的全球金融危机以及 2010–2011 年的欧洲主权债务危机均始于银行业的危机, 进而传播至整个经济体, 导致国家

或地区的经济状况出现剧烈下滑和衰退。之后大量有关其传播机制的实证研究发现, 在危机期间, 以银行为首的金融机构一旦出现严重损失, 会通过资产负债表及其他流动渠道引起非金融机构出现财务状况, 从而威胁到实体经济的稳定 (参见文献 [59–61]).

为了具体地度量系统性风险的大小, 近年来学者逐渐提出了一些较为合理和方便的风险测度. 其中应用最广泛的是 Adrian 和 Brunnermeier^[62] 提出的条件在险价值 (conditional value at risk, CoVaR), 利用在某个机构的处于危机的条件下市场的在险价值来衡量该机构对于市场整体的系统性贡献或重要程度. 另外一个常用的测度是 Acharya 等^[63] 提出的边际期望损失 (marginal expected shortfall, MES), 通过估计在整个市场处于危机的条件下, 某个体机构的期望损失, 来衡量该机构在整个系统中的重要性. 其他的度量还包括系统性风险 (systemic risk, SRISK) 指数^[64]、成分期望损失 (expected shortfall, ES)^[65]、困境保险溢价 (distress insurance premium, DIP)^[66, 67]、金融系统巨灾指数 (catastrophic financial risk, CATFIN)^[68] 以及大量机构同时违约的概率 (参见文献 [18, 31, 69, 70]) 等.

用于刻画整个金融系统的负面状态或极端危机事件的计量模型往往依赖于其是否能够灵活刻画多个金融收益序列之间高度非线性的不对称的相关结构. 尽管线性相关系数长久以来对于相关结构的刻画做出了巨大贡献, 然而它却无法捕捉联合概率分布中重要的尾部相关特征 (参见文献 [71]). 近年来, 尤其在两次巨大的金融危机之后, 学者们开始逐渐将目光转向对于金融资产之间的尾部相关性和不对称相关性的建模, 其中一种应用较为广泛的模型就是 copula 函数. copula 函数不仅可以刻画多变量之间的非线性、尾部、不对称相关结构, 还可以将边际分布和联合分布进行分离, 在结构上也有着巨大的灵活性, 从而克服了多元椭球分布只能刻画线性相关性以及要求边际分布正态性的限制 (参见文献 [72]).

对于系统性金融风险的研究所涉及的方面主要包括金融业、能源行业、股市指数和国债市场等.

金融业内部系统性风险的研究包括, Engle 等^[73] 采用 DCC copula 模型刻画欧洲 194 家金融机构之间的相关结构, 并在此基础之上计算了系统性风险测度 MES. Jin 和 de Simone^[74] 采用 DCC copula 模型研究了欧洲银行和投资公司之间的系统性风险. 李从文和闫世军^[75] 以 CoVaR 为风险测度, 采用 DCC t copula 研究了我国包括信托业、证券业和民间信贷业在内的影子银行对于我国商业银行的系统性风险溢出效应. 类似地, 韩超和周兵^[76] 采用 DCC t copula 模型, 以 CoVaR 为风险测度, 研究了 6 家股份制商业银行对于我国银行业的系统性风险传染和贡献度. 韩超等^[77] 采用 DCC R- 藤 copula 模型研究了我国 6 家股份制银行之间的系统性风险. Reboredo 和 Ugolini^[78] 采用动态藤 copula 模型研究了西班牙上市银行对于其他欧洲国家的上市银行以及欧洲金融系统的系统性金融风险传染. 王书华和高宇璇^[79] 采用时变的 SJC copula 刻画我国各上市商业银行两两之间的动态相关性变化, 并以此衡量我国商业银行业内部的系统性风险. Denkowska 和 Wanat^[80] 采用 DCC copula 研究了世界 8 家主要保险公司之间的系统性风险. Oh 和 Patton^[31] 构建了可以处理超高维变量的 GAS 时变因子 copula 模型, 将其应用于刻画 100 家美国公司的 CDS 数据之间的相关结构, 并在此基础上度量了次贷危机的前后的系统性风险. 王培辉和袁薇^[81] 采用该模型研究了我国 26 家金融公司内部的系统性金融风险的时变的特征.

能源金融系统性风险方面的研究包括, Mensi 等^[82] 利用时变 copula 模型研究了能源和股市之间的系统性风险. Liu 和 Gronwald^[83] 采用时变 copula 模型, 应用于各国石油、天然气公司的股价和石油价格数据, 研究了各国石油、天然气行业的系统性风险. Ji 等^[84] 采用时变 copula 模型研究了金砖五国的油价和股市之间的系统性风险传染. Ji 等^[85] 采用 6 种时变 copula 模型测量的 Δ CoVaR 分析了不确定性对能源价格的影响. Shahzad 等^[86] 采用时变 copula 模型研究了 WTI (west Texas intermediate crude oil) 油价和世界农业商品指数之间的系统性风险传染. Ji 等^[87] 采用机制转换混合 copula 模型

研究了能源市场对农产品的下行风险溢出. Ji 等^[88] 采用变结构的 copula 模型研究了 WTI 原油对美元和人民币汇率的风险溢出效应. Nevrla^[89] 采用 GAS 动态因子 copula 模型研究了欧洲金融和能源行业之间的系统性风险.

股市指数之间系统性风险的研究包括, Jin^[90] 采用时变 copula 模型研究了中国与其他 10 个亚洲国家股市之间的系统性风险传染. Shahzad 等^[91] 采用时变藤 copula 模型分析了道琼斯世界伊斯兰指数与道琼斯伊斯兰金融指数和来自日本、美国、英国的 3 个伊斯兰权益指数之间的上行和下行系统性风险溢出效应. Tansuchat 等^[92] 采用带有机制转换的时变 copula 模型研究了 6 个东南亚国家股市之间的系统性金融风险. Ji 等^[93] 应用带有 Markov 机制转换的时变 copula 模型研究了美国和其余 G7 国家股市之间的系统性风险溢出效应. Bernardi 和 Catania^[14] 构建了机制转换广义自回归得分 copula 模型, 并将该二元动态 copula 函数应用于刻画 1999–2015 年间欧洲 11 个国家的系统性风险大小及其对于整个欧洲的系统性风险的贡献. 刘慧敏等^[94] 采用 Almeida 等^[26] 所构建的具有 SCAR 和 GAS 动态的高维 D- 藤 copula 计算了上证综指和 5 个上证行业指数之间的相依结构, 并以 CoVaR 为度量研究了各行业对于上证综指的系统性风险贡献程度. 叶五一等^[95] 同样采用该模型研究了我国 28 个行业指数之间的系统性风险. 叶五一和缪柏其^[96] 采用具有变点的 Gumbel copula 研究了美国次级债危机期间, 美国股市对于其他股市的风险传染. 叶五一等^[97] 采用非参数时变的 copula 模型研究了次贷危机期间, 美国股市对于其他股市的风险溢出效应. 叶五一等^[98] 根据 Aielli^[99] 构建 cDCC (consistency DCC) 的思想, 考虑了 Patton^[34] 的时变 copula 模型中参数更新过程中截距项存在变点的情形, 采用旋转 Gumbel copula 研究了 5 个国家或地区股市与美国股市之间的相关结构, 并以尾部相关系数作为风险传染的度量.

各国国债市场的系统性风险研究包括, Omachel 和 Rudolf^[100] 采用动态 copula 模型研究了欧元区主权违约和汇率之间的系统性风险. 对于 Patton^[34] 的时变 copula 模型在系统性风险中应用做出了重要贡献的是 Reboredo 和 Ugolini^[101], 他们建立了二元 copula 函数与系统性风险的测度 CoVaR 之间的关系, 通过 Patton^[34] 的时变模型刻画 copula 参数的动态性, 并应用于欧洲 8 个国家和 1 个债务指数数据, 来研究 2000–2012 年间欧洲主权债务市场中的系统性风险. Reboredo 和 Ugolini^[102] 以时变二元 copula 为基础构建动态藤 copula 模型, 并研究了希腊国债与欧洲金融系统之间的风险传染. BenSaïda^[103] 基于 SJC copula 构建了 Markov 机制转换 C- 藤和 D- 藤模型, 并将该模型应用于分析欧元区与美国主权债务市场之间的传染效应. Lange 等^[104] 将 GAS 动态 copula 模型应用于国债收益率数据和 CDS 数据, 以联合违约概率为测度研究了整个欧洲经济体系的系统性风险. Yang 等^[105] 采用 GAS 动态 copula 模型研究了中东欧三国和德国国债收益率之间的相关结构, 并以此刻画了各国之间的系统性风险溢出效应.

3.2.2 市场风险分析

动态 copula 模型在金融领域的主要应用是市场风险评估. 市场风险通常通过在险价值 (value at risk, VaR) 或 ES 来度量. 这两种测度都是为了估计重大损失的概率, 估计的关键是资产市场收益的分布函数, 从而导致需要像动态 copula 这样能灵活地刻画动态相依结构的模型.

在股票市场, Fantazzini^[106] 采用动态正态 copula 和 t copula 预测股票市场二元投资组合的 VaR. Luo 等^[107] 基于二元动态机制转换 copula 模型分析中国股票市场和国际股票市场之间的金融风险传染. Heinen 和 Valdesogo^[7] 采用 C- 藤自回归 (canonical vine autoregressive, CAVA) 模型刻画美国股票市场多元资产之间的动态相关性, 该模型可以看作是资本资产定价模型 (capital asset pricing model,

CAPM) 的扩展, 它可以捕捉到资产收益的非线性、非 Gauss 和时变的特征。实证表明, CAVA 模型在 VaR 预测方面好于 DCC 模型。Bartels 和 Ziegelmann^[108] 采用 Oh 和 Patton^[31] 的 GAS 动态因子 copula 模型刻画巴西股票市场多维资产之间的动态相依结构。实证表明, 该动态 copula 模型在样本内拟合和样本外 VaR 和 ES 预测方面优于传统多元 copula 模型。BenSaïda 等^[109] 基于 t copula 构建了 Markov 机制转换 C- 藤和 D- 藤模型, 并将其应用于分析 G7 股市指数之间的传染风险。罗付岩和邓光明^[110] 采用时变 copula 模型估计了二元沪深股市的 VaR。高杰和付翼^[111] 采用时变混合 copula 方法估计了上证和恒生指数二元组合的 VaR。贺学强和易丹辉^[112] 结合 DCC 方法和椭球类 copula 函数刻画了中国股票市场多元资产之间的动态相关结构, 并将其应用于估计多元资产组合的 VaR。马锋等^[113] 采用滚动藤 copula 方法预测了国际多元股票市场的动态 VaR。

在信用市场, Fei 等^[13] 采用二元动态机制转换 copula 模型刻画了 CDS 价差和股票价格之间的动态相依结构。实证表明, 该动态 copula 模型在样本内拟合和样本外 VaR 预测方面优于机制内静态 copula 模型和没有进行机制转换的动态 copula 模型。

在能源市场, Lu 等^[114] 基于时变 copula-GARCH 模型估计了能源市场中二元资产原油期货和天然气期货的 VaR。Aepli 等^[115] 采用机制转换 copula 和时变 copula 模型刻画了商品期货之间的动态相关性, 实证发现, 动态 t-Clayton 混合 copula 在样本内拟合和样本外风险预测方面表现最好。Manner 等^[116] 把 Almeida 等^[26] 提出的 D- 藤 SCAR 模型应用于预测澳大利亚电价的联合分布。Tiwari 等^[117] 采用 copula-ADCC (asymmetric DCC)-EGARCH (exponential GARCH) 模型分析了 6 种加密货币与美国股票市场之间的时变相关性, 实证表明加密货币可以作为对冲美国股票市场风险的对冲资产。

在外汇市场, Wang 等^[118] 提出了新的机制转换 copula 模型来刻画 6 个主要工业国家股票市场和其外汇市场之间的尾部相依结构。Kumar 等^[119] 采用该机制转换 copula 模型刻画了金砖国家外汇市场和股票市场之间的动态相依结构, 并基于该模型预测了二元资产的 VaR。

3.2.3 信用风险分析

刻画不同公司的信用价差和违约强度之间的相关结构是信用风险管理的核心问题。从方法论的角度来看, 对信用风险的误解是导致 2008 年金融危机的主要原因 (参见文献 [120])。由于对于信贷投资组合的相关结构建模的传统方法是基于静态 Gauss copula 函数的, 其不具有刻画动态相关结构和尾部相关性的缺点, 因此在学界和业界均受到了诸多诟病 (参见文献 [121])。而近年来, 随着能刻画尾部特征 copula 的引入以及参数动态结构的发展, 学者们通过实证研究发现, 动态 copula 模型可以用来对信用风险相关性进行更准确和可靠的估计。Totouom 和 Armstrong^[122] 构建了随机多元 Clayton copula 模型并用于信用组合中各资产违约时间之间的相关结构的刻画。Bielecki 等^[123] 构建了具有 Markov 机制转换的动态 copula 模型, 并用于 CDS 合同中对手方信用风险的研究。类似地, Bielecki 等^[124] 将该动态 copula 模型用于对冲投资组合的信用风险。罗长青等^[125] 采用 Markov copula 模型描述了信用风险相关性的动态变化。此外, Crépey 和 Nguyen^[126] 将随机 Gauss copula 模型应用于信用衍生品对手方风险的研究。罗长青等^[127] 在跳跃 - 扩散条件下, 采用变结构 copula 模型描述了信用风险相关性的动态变化。

Cerrato 等^[128] 采用 GAS 动态的 copula 模型研究了英国所有的全球系统重要性银行的联合信用风险, 实证结果发现, CDS 价差的变化具有时变、不对称的特征, 且与多个银行的联合违约概率密切相关。Christoffersen 等^[129] 采用 Christoffersen 等^[19] 的非对称动态 copula 模型刻画了 CDS 收益之间

的动态相依结构. Lee 和 Yang^[130] 通过 DCC 和 Patton^[34] 的时变 t copula 研究了不同的贷款行业对于美国商业银行系统的信用风险溢出, 实证表明各贷款行业对整个银行系统的影响程度随着时间会发生变化. 周利国等^[131] 采用 Li 和 Kang^[132] 所提出的协变量 (covariate) copula 模型, 来刻画企业集团成员企业之间的动态违约相关结构和信用风险传染效应.

3.3 多标的衍生产品定价

当今经济活动中, 多元衍生品被视为一种对冲多资产风险的很好工具, 主要包括多资产期权 (multi-asset option)、一篮子违约互换 (basket default swap, BDS)、债务抵押债券 (collateralized debt obligation, CDO) 等. 对多元期权进行估值的重点在于准确估计标的资产之间的相关性, 由于标的资产之间的相关性可能随时间发生变化, 因此对于标的资产之间相关结构的动态刻画有利于对多元期权更为现实的估值.

3.3.1 多资产期权定价

copula 函数在期权定价中的应用是从静态模型开始的 (参见文献 [133–135]), 然而由于对于期权的定价通常是在风险中性测度下进行的, 而动态 copula 模型在现实测度和风险中性测度之间的转换存在一定争议 (参见文献 [136]), 因此动态 copula 模型并未广泛应用于多元资产期权定价模型中. 首次将动态 copula 模型应用到多元期权定价中的是 van den Goorbergh 等^[137], 他们同时考虑了多种 copula 类型, 如 Gauss、Frank、Galambos、Gumbel-Hougaard 和 Plackett copula 族, 允许相关系数 (或 copula 参数) 随着标的资产的条件波动率的变化而变化, 并将该模型应用于以标普 500 指数和纳斯达克指数为标的的二元期权定价. 该模型仅适用于单参数的 copula 函数, 另一种适用于多参数 copula 函数的动态 copula 模型是由 Zhang 和 Guégan^[138] 所提出的, 他们假设 copula 参数受两资产的标准差所驱动, 并以二元 t copula 为例构建了二元期权的定价模型. Guégan 和 Zang^[139] 将该模型应用于以上证综指和深证综指为标的的二元期权定价. 类似地, Li 和 Chu^[140] 将该动态 copula 模型应用于以纽约证券交易所 (New York Stock Exchange, NYSE) 综合指数和标普 500 指数为标的的二元期权定价模型中. Masala^[141] 采用 DCC copula 模型刻画两资产之间的动态相关结构, 并用于篮子棘轮期权 (basket cliquet option) 的定价. Bucio-Pacheco 等^[142] 将 Patton^[34] 的时变 copula 模型应用于以墨西哥股票指数和标普 500 指数为标的的二元期权定价. Nasri 等^[143] 将机制转换 copula 模型应用于两资产的欧式最大认沽期权 (put-on-max option) 的定价.

3.3.2 多元信用衍生品定价

动态 copula 在其他金融衍生品定价中的应用包括, 李平等^[144] 采用 DCC t copula 模型刻画了 4 种外汇两两间的动态相关性, 在此基础上又对以该 4 种外汇为标的的抵押外汇契约 (collateralized foreign exchange obligation, CFXO) 进行定价. Wu 等^[145] 采用动态单因子 copula 构架了一篮子抵押贷款信用违约互换 (mortgage loan credit default swap, LCDS) 的定价模型. Hu 等^[146] 将动态因子 copula 模型用于人造 CDO (synthetic CDO) 的定价模型中. 此外, 王珺和梁冯珍^[147] 考虑了变结构的 copula 模型来刻画资产之间的违约相关性, 并用于债务抵押债券的定价模型. 类似地, Li 和 Li^[16] 构建了变结构的 copula 模型, 并用于包含 6 种资产在内 BDS 的定价. 而刘向华和肖雪平^[148] 采用带有 Markov 机制转换的 copula 函数构建了对于 BDS 的定价模型. Elouerkhaoui^[149] 将随机 copula 模型应用于 CDO 等多种信用衍生品的定价模型中.

3.4 投资组合选择

如何将财富合理地分配于各种资产以及如何平衡投资组合的风险与收益是市场投资者面临的主要问题. Markowitz^[150] 首次用方差来量化投资组合的风险, 提出了均值 - 方差模型, 奠定了现代金融学研究的理论基础. 均值 - 方差模型假设资产收益服从多元正态分布. 而许多实证表明 (参见文献 [4, 151, 152]), 金融市场的收益不服从正态分布, 且它们的相依结构具有尾部相依性、不对称性和时变性. 动态 copula 方法可以较好地解决这些问题. Lee^[153] 采用机制转换 Gumbel-Clayton copula 模型刻画农产品现货和期货收益之间的动态相依结构, 并在独立机制转换 GARCH 过程的假设下计算了最小方差套期保值比率. De Lira Salvatierra 和 Patton^[154] 在 GAS 模型的基础上, 加入高频测度, 提出了一类利用高频 (日内) 数据信息的动态 copula 广义实际自回归得分 (generalized realized autoregressive score, GRAS) 模型. 实证表明, 与 GAS 模型相比, GRAS 模型提高了美国股票收益率的样本内拟合和样本外密度预测, 基于这些密度预测构建的投资组合策略能获得较高的收益. Avdulaj 和 Barunik^[155] 结合高频数据和 GAS copula 模型刻画了捷克与德国股票市场之间的动态相关性, 并基于 Christoffersen 等^[19] 提出的条件分散化收益测度分析了国际多元化带来的好处, 研究发现该好处随着时间的变化而变化. 采用同样的方法, Avdulaj 和 Barunik^[156] 刻画了美国原油与美国股票市场之间的动态相关性, 研究发现原油与股票分散化带来的好处随着时间逐渐减少. Reboredo^[157] 采用时变 copula 模型刻画了绿色债券市场和股票、债券以及能源市场之间的动态相依结构, 并基于 Christoffersen 等^[19] 提出的条件分散化收益测度分析了绿色债券带来的分散化好处. Han 等^[158] 在最坏情形 CVaR (worst-case CVaR, WCVaR) 框架下, 采用 copula GARCH 和 DCC copula 模型来捕捉中国股票市场二元资产收益之间的时变相关性, 研究了时变的鲁棒投资策略. Ayala 和 Blazsek^[159] 采用 GAS copula 模型刻画二元资产之间的动态相关性, 实证发现, GAS t copula 在投资组合选择和 VaR 预测方面表现较好.

以上文献均是研究二元资产的动态投资组合选择问题, 而越来越多的投资者采用多元化投资组合来实现分散风险、提高收益的目的. 在研究多变量动态投资组合选择问题时, 动态椭球 copula 模型和动态藤 copula 模型是运用最多的 copula 模型. Al Janabi 等^[160] 采用 DCC t-copula 模型刻画了国际多元资产之间的时变相关性, 分析了考虑流动性风险 (liquidity-adjusted value at risk, LVaR) 和多元非线性相依结构的投资组合选择问题. Bernardi 和 Catania^[161] 基于动态 Markov 转换 t copula 模型刻画了资产收益的前四阶矩的时变性, 且该动态条件相依结构包含了影响资产收益之间关系的外生信息, 并在效用最大化框架下, 基于时变的高阶矩构建投资组合策略. 实证表明, 该动态模型能提高投资组合的表现. Christoffersen 等^[19] 结合偏 t copula 和 DCC 模型刻画了国际股票市场之间的动态相依结构, 并提出了考虑高阶矩和非线性相关性的动态分散化收益的新测度. 研究发现, 发达国家分散化带来的好处随着时间已大大减少, 新兴市场仍然提供了巨大的分散化优势, 尤其是在市场低迷时期. Christoffersen 和 Langlois^[162] 采用 Christoffersen 等^[19] 的方法刻画了股票市场 4 维因子的联合分布的动态性, 并基于常数相对风险厌恶 (constant relative risk aversion, CRRA) 效用最大化模型分析了考虑因子非线性相关性带来的好处. 王璐等^[163] 将动态 R- 藤 copula 模型应用于计算金砖国家与发达国家股票市场的最优投资组合. Gurgul 和 Machno^[164] 采用机制转换 R- 藤 copula 模型分别刻画了欧洲股票市场和亚太股票市场之间的动态相依结构, 并以预期损失为风险测度进行了有效的前沿分析. 研究发现, 欧洲市场的最优投资组合风险更大. Poignard 和 Fermanian^[165] 基于藤 GARCH 模型动态生成多元资产收益的条件相关矩阵, 并采用最小方差模型验证了该模型预测的相关矩阵的准确性. Han 等^[166] 在 WCVaR 框架下, 采用变结构的 copula 模型来捕捉中国市场多元资产收益之间的动态相关性, 研究了变结构的鲁棒投资策略.

4 结论

在关于金融时间序列的研究中,一旦涉及多个变量,准确刻画变量之间的相关性就是一个关键问题,也是 copula 绝大多数应用的基础。随着研究问题的复杂性不断增大,对于模型灵活性的要求也在不断提高:从最初的线性相关性,到后来的非线性、不对称和尾部相关性;从假设在整个时间区间上变量之间固定的相关系数,到随着时间发生变化的动态相关结构;从两个变量之间的二元模型,到能够刻画多变量相关结构的高维模型。为方便国内学者系统地了解动态 copula 模型在金融领域中应用的发展过程,本文首先介绍了在金融领域应用较为广泛的几种主流的动态 copula 模型的引入和发展,然后对近年来这些模型在金融各领域研究中得到成功应用的文献进行分类梳理和介绍。

通过梳理总结动态 copula 模型在金融领域中的应用可以发现:(1)由于 copula 函数本身具有的高灵活性,动态 copula 模型在应用的过程中也得到不断完善和发展,受到了许多金融学者的青睐,尤其是在 2008 年次贷危机之后的系统性金融风险度量和管理领域。(2)随着金融衍生品尤其是基于多个资产的多元衍生品市场的不断发展,对其进行准确定价成为学者和市场参与者们所关注的重点。由于学界和业界目前大多是用风险中性估值原理研究多元衍生品定价,因此需要考虑将动态 copula 参数的更新过程与测度变换灵活的结合。(3)由于欧美发达市场的多元衍生品较为成熟,在实证应用中也主要以成熟市场为例。我国的金融衍生品市场起步较晚,但发展迅速。截至 2019 年 9 月末,我国已上市 70 多个衍生品,近两年场外和信用衍生品市场也有了快速发展。因此可以进一步研究动态 copula 模型在我国金融衍生品定价和风险管理方面的适用性。(4)动态 copula 模型在市场风险管理领域已有长足的研究和发展,但在同样不可忽视的信用风险领域的应用还较为不足。因此可以在考虑信用风险本身特点的基础上,进一步检验动态 copula 模型在信用风险管理方面是否灵活和有效。(5)就藤 copula 模型而言,虽然其在刻画较高维变量时具有很强的灵活性,但如果变量个数过高,则会有需要估计的参数过多的问题,从而增加了模型的不确定性和计算复杂性。因此,可以从藤 copula 函数结构本身出发,在其灵活性和计算复杂性之间寻找合适的平衡点。

致谢 感谢尊敬的严加安老师将我引入 copula 这个研究领域。2001 年严老师从香港带回 Roger Nelson 的书 *Introduction to copulas* 让我们学习和讨论,我当时觉得这个方法很不错,所以从那以后一直在做相关的应用研究。先后主持完成了两个相关的国家自然科学基金项目,发表了多篇学术论文。值此严老师 80 大寿之际,整理了有关动态 copula 模型在金融中应用的国内外文献(也包括我和我学生的一些成果),以此作为对严老师寿辰的献礼。

— 李平(本文第一作者)

参考文献

- 1 Sklar M. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ Inst Statist Univ Paris*, 1959, 8: 229–231
- 2 Embrechts P, McNeil A J, Straumann D. Correlation: Pitfalls and alternatives. *Risk*, 1999, 12: 69–71
- 3 Erb C B, Harvey C R, Viskanta T E. Forecasting international equity correlations. *Financial Anal J*, 1994, 50: 32–45
- 4 Longin F, Solnik B. Extreme correlation of international equity markets. *J Finance*, 2001, 56: 649–676
- 5 Engle R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *J Bus Econom Statist*, 2002, 20: 339–350
- 6 Tse Y K, Tsui A K C. A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *J Bus Econom Statist*, 2002, 20: 351–362
- 7 Heinen A, Valdesogo A. Asymmetric CAPM dependence for large dimensions: The canonical Vine autoregressive model. In: Computing Research and Education. Discussion Papers, 2009
- 8 Bernardi M, Petrella L. Interconnected risk contributions: A heavy-tail approach to analyze U.S. financial sectors. *J Risk Financial Manag*, 2015, 8: 198–226
- 9 Bernardi M, Maruotti A, Petrella L. Multiple risk measures for multivariate dynamic heavy-tailed models. *J Empir Finance*, 2017, 43: 1–32

- 10 Jondeau E, Rockinger M. The copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application. *J Int Money Finance*, 2006, 25: 827–853
- 11 Rodriguez J C. Measuring financial contagion: A copula approach. *J Empir Finance*, 2007, 14: 401–423
- 12 Chollete L, Heinen A, Valdesogo A. Modelling international financial returns with a multivariate regime-switching copula. *J Financial Econ*, 2009, 7: 437–480
- 13 Fei F, Fuertes A M, Kalotychou E. Dependence in credit default swap and equity markets: Dynamic copula with Markov-switching. *Int J Forecasting*, 2017, 33: 662–678
- 14 Bernardi M, Catania L. Switching generalized autoregressive score copula models with application to systemic risk. *J Appl Econometrics*, 2019, 34: 43–65
- 15 Guégan D, Zhang J. Change analysis of a dynamic copula for measuring dependence in multivariate financial data. *Quant Finance*, 2010, 10: 421–430
- 16 Li P, Li Z Z. Change analysis for the dependence structure and dynamic pricing of basket default swaps. *Eur Financial Manage*, 2015, 21: 646–671
- 17 Li J, Li P. Empirical analysis of the dynamic dependence between WTI oil and Chinese energy stocks. *Energy Econ*, 2021, 93: 104299
- 18 Lucas A, Schwaab B, Zhang X. Conditional euro area sovereign default risk. *J Bus Econom Statist*, 2014, 32: 271–284
- 19 Christoffersen P, Errunza V, Jacobs K, et al. Is the potential for international diversification disappearing? A dynamic copula approach. *Rev Financ Stud*, 2012, 25: 3711–3751
- 20 Joe H. Families of m -variate distributions with given margins and $m(m - 1)/2$ bivariate dependence parameters. In: *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*. Lecture Notes-Monograph Series, vol. 28. Beachwood: Institute of Mathematical Statistics, 1996, 120–141
- 21 Bedford T, Cooke R M. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Ann Math Artif Intell*, 2001, 12: 246–268
- 22 Bedford T, Cooke R M. Vines—A new graphical model for dependence random variables. *Ann Statist*, 2002, 30: 1031–1068
- 23 Kurowicka D, Cooke R M. *Uncertainty Analysis with High Dimensional Dependence Modelling*. New York: John Wiley & Sons, 2006
- 24 Aas K, Czado C, Frigessi A, et al. Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance Math Econom*, 2009, 44: 182–198
- 25 Almeida C, Czado C, Manner H. Modeling high dimensional time-varying dependence using D-vine scar models. arXiv:1202.2008, 2012
- 26 Almeida C, Czado C, Manner H. Modeling high-dimensional time-varying dependence using dynamic D-vine models. *Appl Stochastic Model Bus Ind*, 2016, 32: 621–638
- 27 Vesper A. A time dynamic pair copula construction: With financial applications. *Appl Financial Economics*, 2012, 22: 1697–1711
- 28 So M K P, Yeung C Y T. Vine-copula GARCH model with dynamic conditional dependence. *Comput Statist Data Anal*, 2014, 76: 655–671
- 29 Stöber J, Czado C. Regime switches in the dependence structure of multidimensional financial data. *Comput Statist Data Anal*, 2014, 76: 672–686
- 30 Creal D D, Tsay R S. High dimensional dynamic stochastic copula models. *J Econometrics*, 2015, 189: 335–345
- 31 Oh D H, Patton A J. Time-varying systemic risk: Evidence from a dynamic copula model of CDS spreads. *J Bus Econom Statist*, 2018, 36: 181–195
- 32 Oh D H, Patton A J. Modeling dependence in high dimensions with factor copulas. *J Bus Econom Statist*, 2017, 35: 139–154
- 33 Creal D, Koopman S J, Lucas A. Generalized autoregressive score models with applications. *J Appl Econometrics*, 2013, 28: 777–795
- 34 Patton A J. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *Internat Econom Rev*, 2006, 47: 527–556
- 35 Hafner C M, Manner H. Dynamic stochastic copula models: Estimation, inference and application. *J Appl Econometrics*, 2012, 27: 269–295
- 36 Manner H, Reznikova O. A survey on time-varying copulas: Specification, simulations, and application. *Econometric Rev*, 2012, 31: 654–687
- 37 Hamilton J. *Time Series Econometrics*. Princeton: Princeton University Press, 1994

- 38 Genest C, Rémillard B, Beaudoin D. Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance Math Econom*, 2009, 44: 199–213
- 39 Csörgő M, Horváth L. Limit Theorems in Change-Point Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1997
- 40 Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *J Econometrics*, 1986, 31: 307–327
- 41 Engle R F, Russell J R. Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data. *Econometrica*, 1998, 66: 1127–1162
- 42 Boero G, Silvapulle P, Tursunaliева A. Modelling the bivariate dependence structure of exchange rates before and after the introduction of the euro: A semi-parametric approach. *J Financ Econ*, 2011, 16: 357–374
- 43 Gong P, Huang R. Analysis of the time-varying dependence of foreign exchange assets (in Chinese). *Syst Eng Theor Practice*, 2008, 28: 26–37 [龚朴, 黄荣兵. 外汇资产的时变相关性分析. 系统工程理论与实践, 2008, 28: 26–37]
- 44 Wu H, Hu G, Lv J. Marketization, structural dependence and structural break of RMB exchange rates (in Chinese). *J Appl Statist Manag*, 2016, 35: 106–121 [吴恒煜, 胡根华, 吕江林. 人民币汇率市场化, 结构相依与结构突变. 数理统计与管理, 2016, 35: 106–121]
- 45 Albulescu C T, Aubin C, Goyeau D, et al. Extreme co-movements and dependencies among major international exchange rates: A copula approach. *Q Rev Economics Finance*, 2018, 69: 56–69
- 46 Liu J, Wang M, Sriboonchitta S. Examining the interdependence between the exchange rates of China and ASEAN countries: A canonical vine copula approach. *Sustainability*, 2019, 11: 5487
- 47 Okimoto T. New evidence of asymmetric dependence structures in international equity markets. *J Financial Quant Anal*, 2008, 43: 787–815
- 48 Wang K, Chen Y H, Huang S W. The dynamic dependence between the Chinese market and other international stock markets: A time-varying copula approach. *Int Rev Economics Finance*, 2011, 20: 654–664
- 49 Hammoudeh S, Mensi W, Reboredo J C, et al. Dynamic dependence of the global Islamic equity index with global conventional equity market indices and risk factors. *Pac-Basin Finance J*, 2014, 30: 189–206
- 50 Zhang X, Liu X, Yao D. Dynamic interdependence and mutation factors between China and U.S. stock indices: Analysis based on time-varying copula-ARMA-NAGARCH (in Chinese). *J BTBU (Soc Sci)*, 2016, 31: 80–90 [张旭, 刘晓星, 姚登宝. 中美股指间的动态相依结构及突变因素—基于时变 copula-ARMA-NAGARCH 的分析. 北京工商大学学报(社会科学版), 2016, 31: 80–90]
- 51 Yan S, Li C. Analysis of the dynamic dependence between China and other BRICS countries: Based on dynamic time-varying copula model (in Chinese). *Shanghai Economic Research*, 2015, (3): 78–86 [闫世军, 李从文. 中国和其他金砖国家股票市场动态相关性研究—基于动态时变 copula 模型分析. 上海经济研究, 2015, (3): 78–86]
- 52 Maneejuk P, Yamaka W. Predicting contagion from the US financial crisis to international stock markets using dynamic copula with Google trends. *Mathematics*, 2019, 7: 1032
- 53 Philippas D, Siriopoulos C. Putting the “C” into crisis: Contagion, correlations and copulas on EMU bond markets. *J Int Financial Markets Institutions Money*, 2013, 27: 161–176
- 54 Bekiros S, Hammoudeh S, Jammazi R, et al. Sovereign bond market dependencies and crisis transmission around the eurozone debt crisis: A dynamic copula approach. *Appl Economics*, 2018, 50: 5031–5049
- 55 Garcia R, Tsafack G. Dependence structure and extreme comovements in international equity and bond markets. *J Bank Financ*, 2011, 35: 1954–1970
- 56 Liu H H, Wang T K, Li W. Dynamical volatility and correlation among US stock and treasury bond cash and futures markets in presence of financial crisis: A copula approach. *Res Int Business Finance*, 2019, 48: 381–396
- 57 Jiang H, He J, Zhuang Y. Analysis of dynamic tail dependence between real estate and banking based on time-varying copulas (in Chinese). *Int J Ind Eng Manag*, 2013, 27: 53–59 [江红莉, 何建敏, 庄亚明. 基于时变 copula 的房地产业与银行业尾部动态相关性研究. 管理工程学报, 2013, 27: 53–59]
- 58 Zhong M, Guo W. Dynamic dependency structure and its structural break point between China’s real estate industry and bank industry based on SJC copula model (in Chinese). *Systems Eng*, 2014, 32: 32–43 [钟明, 郭文伟. 基于 SJC copula 模型的银行业与房地产业动态相依性及其结构突变. 系统工程, 2014, 32: 32–43]
- 59 Adrian T, Shin H S. Liquidity and leverage. *J Financial Intermediation*, 2010, 19: 418–437
- 60 Brunnermeier M K. Deciphering the liquidity and credit crunch 2007–2008. *J Econ Perspect*, 2009, 23: 77–100
- 61 Brunnermeier M K, Pedersen L H. Market liquidity and funding liquidity. *Rev Financ Stud*, 2009, 22: 2201–2238
- 62 Adrian T, Brunnermeier M K. CoVaR. *Am Economic Rev*, 2016, 106: 1705–1741
- 63 Acharya V V, Pedersen L H, Philippon T, et al. Measuring systemic risk. *Rev Financ Stud*, 2017, 30: 2–47
- 64 Brownlees C, Engle R F. SRISK: A conditional capital shortfall measure of systemic risk. *Rev Financ Stud*, 2016,

- 30: 48–79
- 65 Banulescu G D, Dumitrescu E I. Which are the SIFIs? A component expected shortfall approach to systemic risk. *J Banking Finance*, 2015, 50: 575–588
- 66 Huang X, Zhou H, Zhu H. A framework for assessing the systemic risk of major financial institutions. *J Bank Financ*, 2009, 33: 2036–2049
- 67 Huang X, Zhou H, Zhu H. Systemic risk contributions. *J Financ Serv Res*, 2012, 42: 55–83
- 68 Allen L, Bali T G, Tang Y. Does systemic risk in the financial sector predict future economic downturns? *Rev Financ Stud*, 2012, 25: 3000–3036
- 69 Segoviano M A, Goodhart C. Banking stability measures. IMF Working paper, <https://ssrn.com/abstract=1356460>, 2009
- 70 Giesecke K, Kim B. Systemic risk: What defaults are telling us. *Manage Sci*, 2011, 57: 1387–1405
- 71 Embrechts P, McNeil A J, Straumann D. Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In: *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002, 176–223
- 72 Joe H. *Dependence Modelling with copulas*. Boca Raton: CRC Press, 2014
- 73 Engle R, Jondeau E, Rockinger M. Dynamic Conditional Beta and Systemic Risk in Europe. Working paper, New York University, 2012
- 74 Jin X, de Simone F N. Tracking changes on the intensity of financial sector's systemic risk. BCL Working Paper, 102, <https://ssrn.com/abstract=1356460>, 2016
- 75 Li C, Yan S. The risk spillover effect of China's shadow banking on commercial banking industry: Analysis Based on GARCH-time-varying-copula-CoVaR model (in Chinese). *Stud Int Finance*, 2015, (10): 64–75 [李丛文, 闫世军. 我国影子银行对商业银行的风险溢出效应—基于 GARCH- 时变 copula-CoVaR 模型的分析. 国际金融研究, 2015, (10): 64–75]
- 76 Han C, Zhou B. Analysis of systematic financial risk spillovers of commercial banks based on time-varying copula-CoVaR (in Chinese). *J Southwest Chin Normal Uni (Nat Sci)*, 2019, 44: 72–77 [韩超, 周兵. 基于时变 copula-CoVaR 商业银行系统性金融风险溢出分析. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2019, 44: 72–77]
- 77 Han C, Zhou B, Xiong Y. Research on systematic financial risk measurement of joint-stock commercial banks based on high-dimensional dynamic R-vine copula (in Chinese). *Math Practice Theory*, 2019, 49: 307–314 [韩超, 周兵, 熊亚. 基于高维动态 R-Vine copula 的股份制商业银行系统性金融风险计量研究. 数学的实践与认识, 2019, 49: 307–314]
- 78 Reboredo J C, Ugolini A. Systemic risk of Spanish listed banks: A vine copula CoVaR approach. *Span J Financ Accoun/Rev Española Financiación y Contab*, 2016, 45: 1–31
- 79 Wang S, Gao X. Analysis of dependence structure in Chinese banking system (in Chinese). *Statist Decision*, 2015, (24): 170–173 [王书华, 高宇璇. 中国银行间系统性风险的相依性结构分析. 统计与决策, 2015, (24): 170–173]
- 80 Denkowska A, Wanat S. Dependencies and systemic risk in the European insurance sector: Some new evidence based on copula-DCC-GARCH model and selected clustering methods. *Entrepreneurial Bus Econ Rev*, 2020, 8: 7–27
- 81 Wang P, Yuan W. Dynamic monitoring of systematic risk China financial institutions—Based on CCA and dynamic factor copula model (in Chinese). *Collected Essays Finance Economics*, 2017, (12): 43–53 [王培辉, 袁薇. 我国金融机构系统性风险动态监测—基于 CCA 和动态因子 copula 模型的研究. 财经论丛, 2017, (12): 43–53]
- 82 Mensi W, Hammoudeh S, Shahzad S J H, et al. Modeling systemic risk and dependence structure between oil and stock markets using a variational mode decomposition-based copula method. *J Banking Finance*, 2017, 75: 258–279
- 83 Liu J, Gronwald M. Oil price systemic risk for the oil and gas industry: A copula-CoVaR approach. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2998196>, 2017
- 84 Ji Q, Liu B Y, Zhao W L, et al. Modelling dynamic dependence and risk spillover between all oil price shocks and stock market returns in the BRICS. *Int Rev Financial Anal*, 2020, 68: 101238
- 85 Ji Q, Liu B Y, Nehler H, et al. Uncertainties and extreme risk spillover in the energy markets: A time-varying copula-based CoVaR approach. *Energy Econ*, 2018, 76: 115–126
- 86 Shahzad S J H, Hernandez J A, Al-Yahyae K H, et al. Asymmetric risk spillovers between oil and agricultural commodities. *Energy Policy*, 2018, 118: 182–198
- 87 Ji Q, Bouri E, Roubaud D, et al. Risk spillover between energy and agricultural commodity markets: A dependence-switching CoVaR-copula model. *Energy Econ*, 2018, 75: 14–27
- 88 Ji Q, Liu B Y, Fan Y. Risk dependence of CoVaR and structural change between oil prices and exchange rates: A time-varying copula model. *Energy Econ*, 2019, 77: 80–92

- 89 Nevrla M. Systemic risk in European financial and energy sectors: Dynamic factor copula approach. *Econ Syst*, 2020, 44: 100820
- 90 Jin X. Downside and upside risk spillovers from China to Asian stock markets: A CoVaR-copula approach. *Finance Res Lett*, 2018, 25: 202–212
- 91 Shahzad S J H, Arreola-Hernandez J, Bekiros S, et al. A systemic risk analysis of Islamic equity markets using vine copula and delta CoVaR modeling. *J Int Financial Markets Institutions Money*, 2018, 56: 104–127
- 92 Tansuchat R, Yamaka W, Khemawanit K, et al. Analyzing the contribution of ASEAN stock markets to systemic risk. In: *Robustness in Econometrics*. Cham: Springer, 2017, 649–666
- 93 Ji Q, Liu B Y, Cunado J, et al. Risk spillover between the US and the remaining G7 stock markets using time-varying copulas with Markov switching: Evidence from over a century of data. *North Am J Econometrics Finance*, 2020, 51: 100846
- 94 Liu H, Fu Y, Xu D. Measuring CoVaR based on dynamic D-vine copula model (in Chinese). *Finance Regulation Research*, 2019, (8): 50–64 [刘慧敏, 付英姿, 许东旭. 基于动态 D 藤 copula 的 CoVaR 度量. 金融监管研究, 2019, (8): 50–64]
- 95 Ye W, Tan K, Miao B. Analysis of systemic risk among industries via dynamic factor copulas (in Chinese). *Chinese J Manag Sci*, 2018, 26: 1–12 [叶五一, 谭舸祺, 缪柏其. 基于动态因子 copula 模型的行业间系统性风险分析. 中国管理科学, 2018, 26: 1–12]
- 96 Ye W, Miao B. Analysis of sub-prime loan crisis contagion based on change point testing method of copula (in Chinese). *Chinese J Manag Sci*, 2009, 17: 1–7 [叶五一, 缪柏其. 基于 copula 变点检测的美国次级债金融危机传染分析. 中国管理科学, 2009, 17: 1–7]
- 97 Ye W, Wei W, Miao B. Analysis of sub-prime loan crisis contagion based on non-parametric time-varying copula (in Chinese). *J Manag Sci China*, 2014, 17: 151–158 [叶五一, 韦伟, 缪柏其. 基于非参数时变 copula 模型的美国次贷危机传染分析. 管理科学学报, 2014, 17: 151–158]
- 98 Ye W, Dong X, Miao B. Linkage of internaional stock market and financial infection analysis based on c-D-copula model (in Chinese). *J Sys Sci Math Scis*, 2018, 38: 553–568 [叶五一, 董筱雯, 缪柏其. c-D-copula 模型构建及其在金融风险传染中的应用. 系统科学与数学, 2018, 38: 553–568]
- 99 Aielli G P. Dynamic conditional correlation: On properties and estimation. *J Bus Econom Statist*, 2013, 31: 282–299
- 100 Omachel M, Rudolf M. The linkage between sovereign defaults and exchange rate shocks in the eurozone: A measure for systemic risk. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2513178>, 2015
- 101 Reboredo J C, Ugolini A. Systemic risk in European sovereign debt markets: A CoVaR-copula approach. *J Int Money Finance*, 2015, 51: 214–244
- 102 Reboredo J C, Ugolini A. A vine-copula conditional value-at-risk approach to systemic sovereign debt risk for the financial sector. *North Am J Econometrics Finance*, 2015, 32: 98–123
- 103 BenSaïda A. The contagion effect in European sovereign debt markets: A regime-switching vine copula approach. *Int Rev Financial Anal*, 2018, 58: 153–165
- 104 Lange R J, Lucas A, Siegmann A. Score-driven systemic risk signaling for European sovereign bond yields and CDS spreads. In: *Systemic Risk Tomography*. Amsterdam: Elsevier, 2017, 129–150
- 105 Yang L, Ma J, Hamori S. Dependence structures and systemic risk of government securities markets in central and eastern Europe: A CoVaR-copula approach. *Sustainability*, 2018, 10: 324
- 106 Fantazzini D. Dynamic copula modelling for value at risk. *Front Finance Economics*, 2008, 5: 72–108
- 107 Luo C, Xie C, Yu C, et al. Measuring financial market risk contagion using dynamic MRS-copula models: The case of Chinese and other international stock markets. *Econ Model*, 2015, 51: 657–671
- 108 Bartels M, Ziegelmann F A. Market risk forecasting for high dimensional portfolios via factor copulas with GAS dynamics. *Insurance Math Econom*, 2016, 70: 66–79
- 109 BenSaïda A, Boubaker S, Nguyen D K. The shifting dependence dynamics between the G7 stock markets. *Quant Finance*, 2018, 18: 801–812
- 110 Luo F, Deng G. The VaR estimating on time-varying copula (in Chinese). *Systems Eng*, 2007, 25: 28–33 [罗付岩, 邓光明. 基于时变 copula 的 VaR 估计. 系统工程, 2007, 25: 28–33]
- 111 Gao J, Fu Y. Portfolio risk analysis based on time-varying related mixture copula model (in Chinese). *Statist Decision*, 2011, (19): 59–62 [高杰, 付翼. 基于时变相关的混合 copula 模型的投资组合风险分析. 统计与决策, 2011, (19): 59–62]
- 112 He X, Yi D. VaR estimating of stock portfolio based on dynamic copula (in Chinese). *Statist Decision*, 2010, (17):

- 13–16 [贺学强, 易丹辉. 基于动态 copula 方法的股票组合 VaR 估计. *统计与决策*, 2010, (17): 13–16]
- 113 Ma F, Wei Y, Huang D. Measurement of dynamic stocks portfolio VaR and its forecasting model based on vine copula (in Chinese). *Systems Eng Theory Practice*, 2015, 35: 26–36 [马锋, 魏宇, 黄登仕. 基于 Vine copula 方法的股市组合动态 VaR 测度及预测模型研究. *系统工程理论与实践*, 2015, 35: 26–36]
- 114 Lu X F, Lai K K, Liang L. Portfolio value-at-risk estimation in energy futures markets with time-varying copula-GARCH model. *Ann Oper Res*, 2014, 219: 333–357
- 115 Aepli M D, Füss R, Henriksen T E S, et al. Modeling the multivariate dynamic dependence structure of commodity futures portfolios. *J Commodity Markets*, 2017, 6: 66–87
- 116 Manner H, Alavi Fard F, Pourkhanali A, et al. Forecasting the joint distribution of Australian electricity prices using dynamic vine copulae. *Energy Econ*, 2019, 78: 143–164
- 117 Tiwari A K, Raheem I D, Kang S H. Time-varying dynamic conditional correlation between stock and cryptocurrency markets using the copula-ADCC-EGARCH model. *Phys A*, 2019, 535: 122295
- 118 Wang Y C, Wu J L, Lai Y H. A revisit to the dependence structure between the stock and foreign exchange markets: A dependence-switching copula approach. *J Banking Finance*, 2013, 37: 1706–1719
- 119 Kumar S, Tiwari A K, Chauhan Y, et al. Dependence structure between the BRICS foreign exchange and stock markets using the dependence-switching copula approach. *Int Rev Financial Anal*, 2019, 63: 273–284
- 120 Crouhy M G, Jarrow R A, Turnbull S M. The subprime credit crisis of 2007. *J Deriv*, 2008, 16: 81–110
- 121 Salmon F. The formula that killed wall street. *Significance*, 2012, 9: 16–20
- 122 Totouom D, Armstrong M. Credit risk dependence modeling with dynamic copula: An application to CDO tranches. *Econometrics and Risk Management*. Emerald Group Publishing Limited, 2008
- 123 Bielecki T R, Crépey S, Jeanblanc M, et al. Valuation and hedging of CDS counterparty exposure in a Markov copula model. In: *Finance at Fields*. Singapore: World Scientific, 2013, 75–113
- 124 Bielecki T R, Cousin A, Crépey S, et al. Dynamic hedging of portfolio credit risk in a Markov copula model. *J Optim Theory Appl*, 2014, 161: 90–102
- 125 Luo C, Ouyang Z, Xia J. Construction of MRS copula model for credit risk correlation evaluation and an empirical study of China's stock market (in Chinese). *Math Practice Theory*, 2014, 44: 53–62 [罗长青, 欧阳资生, 夏嘉璐. 信用风险相关性度量的 MRS copula 模型构建及实证研究. *数学的实践与认识*, 2014, 44: 53–62]
- 126 Crépey S, Nguyen T M. Nonlinear Monte Carlo schemes for counterparty risk on credit derivatives. In: *Innovations in Derivatives Markets*. Cham: Springer, 2016, 53–82
- 127 Luo C, Zhu H, Ouyang Z. Variable structure copula models of credit risk correlation under the condition of jump-diffusion process (in Chinese). *Chinese J Manag Sci*, 2014, 22: 1–12 [罗长青, 朱慧明, 欧阳资生. 跳跃 - 扩散条件下信用风险相关性度量的变结构 copula 模型. *中国管理科学*, 2014, 22: 1–12]
- 128 Cerrato M, Crosby J, Kim M, et al. The joint credit risk of UK global-systemically important banks. *J Futures Mark*, 2017, 37: 964–988
- 129 Christoffersen P, Jacobs K, Jin X, et al. Dynamic dependence and diversification in corporate credit. *Rev Finance*, 2018, 22: 521–560
- 130 Lee Y, Yang K. Modeling diversification and spillovers of loan portfolios' losses by LHP approximation and copula. *Int Rev Financial Anal*, 2019, 66: 101374
- 131 Zhou L, He Z, Meng T. Credit risk contagion in an enterprise group with dynamic copula models (in Chinese). *Chinese J Manag Sci*, 2019, 27: 74–85 [周利国, 何卓静, 蒙天成. 基于动态 copula 的企业集团信用风险传染效应研究. *中国管理科学*, 2019, 27: 74–85]
- 132 Li F, Kang Y. Improving forecasting performance using covariate-dependent copula models. *Int J Forecasting*, 2018, 34: 456–476
- 133 Rosenberg J V. Semiparametric pricing of multivariate contingent claims. Working Paper S-99-35, Stern School of Business, New York University, 1999
- 134 Cherubini U, Luciano E. Bivariate option pricing with copulas. *Appl Math Finance*, 2002, 9: 69–85
- 135 Rosenberg J V. Nonparametric pricing of multivariate contingent claims. *J Deriv*, 2003, 10: 9–26
- 136 Bernard C, Czado C. Multivariate option pricing using copulae. *Appl Stoch Models Bus Ind*, 2013, 29: 509–526
- 137 van den Goorbergh R W J, Genest C, Werker B J M. Bivariate option pricing using dynamic copula models. *Insurance Math Econom*, 2005, 37: 101–114
- 138 Zhang J, Guégan D. Pricing bivariate option under GARCH processes with time-varying copula. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 1095–1103

- 139 Guégan D, Zang J. Pricing bivariate option under GARCH-GH model with dynamic copula: Application for Chinese market. *Eur J Finance*, 2009, 15: 777–795
- 140 Li J, Chu H R. Pricing bivariate option under an improved GARCH process with dynamic copula models. *Int J Appl Sci Eng*, 2017, 4: 141–146
- 141 Masala G. Basket cliquet options pricing with a dynamic dependence structure and stochastic interest rates. *Insurance Markets Companies Anal Actuar Comput*, 2013, 4: 33–42
- 142 Pacheco C B, Herrera F L, Salgado R J S. Pricing a bivariate option with copulas. *Internat J Bonds Deriv*, 2018, 4: 74–87
- 143 Nasri B R, Rémillard B N, Thioub M Y. Goodness-of-fit for regime-switching copula models with application to option pricing. *Can J Stat*, 2020, 48: 79–96
- 144 Li P, Zhang X, Ding Q. CFXO pricing based on time-varying t-copulas (in Chinese). *Chinese Journal of Management*, 2012, 9: 990–993 [李平, 张馨匀, 丁倩岩. 基于时变 t-copula 的抵押外汇契约定价研究. 管理学报, 2012, 9: 990–993]
- 145 Wu L, Liu J F, Wang J T, et al. Pricing for a basket of LCDS under fuzzy environments. *SpringerPlus*, 2016, 5: 1747
- 146 Hu C, Zhang X, Gao Q. Synthetic CDO pricing: The perspective of risk integration. *Appl Economics*, 2015, 47: 1574–1587
- 147 Wang J, Liang F. CDO pricing with copula (in Chinese). *J Harbin Univ Commerce (Natural Sci Ed)*, 2014, 30: 486–490 [王珺, 梁冯珍. 基于 copula 的债务抵押债券定价. 哈尔滨商业大学学报 (自然科学版), 2014, 30: 486–490]
- 148 Liu X, Xiao X. BDS pricing model with variable structure of default correlation (in Chinese). *Systems Eng*, 2014, 32: 24–30 [刘向华, 肖雪平. 变结构违约相关的 BDS 定价模型. 系统工程, 2014, 32: 24–30]
- 149 Elouerkhaoui Y. Pricing path-dependent credit products. In: *Credit Correlation*. Cham: Palgrave Macmillan, 2017, 317–339
- 150 Markowitz H. The utility of wealth. *J Political Economy*, 1952, 60: 151–158
- 151 Ang A, Bekaert G. International asset allocation with regime shifts. *Rev Financ Stud*, 2002, 15: 1137–1187
- 152 Ang A, Chen J. Asymmetric correlations of equity portfolios. *J Financial Economics*, 2002, 63: 443–494
- 153 Lee H T. A copula-based regime-switching GARCH model for optimal futures hedging. *J Futures Markets Futures Options Other Deriv Products*, 2009, 29: 946–972
- 154 De Lira Salvatierra I, Patton A J. Dynamic copula models and high frequency data. *J Empir Finance*, 2015, 30: 120–135
- 155 Avdulaj K, Baruník J. Can we still benefit from international diversification? The case of the Czech and German stock markets. *Czech J Economics Finance*, 2013, 63: 425–442
- 156 Avdulaj K, Baruník J. Are benefits from oil-stocks diversification gone? New evidence from a dynamic copula and high frequency data. *Energy Econ*, 2015, 51: 31–44
- 157 Reboredo J C. Green bond and financial markets: Co-movement, diversification and price spillover effects. *Energy Econ*, 2018, 74: 38–50
- 158 Han Y, Li P, Xia Y. Dynamic robust portfolio selection with copulas. *Finance Res Lett*, 2017, 21: 190–200
- 159 Ayala A, Blazsek S. Score-driven copula models for portfolios of two risky assets. *Eur J Finance*, 2018, 24: 1861–1884
- 160 Al Janabi M A M, Arreola Hernandez J, Berger T, et al. Multivariate dependence and portfolio optimization algorithms under illiquid market scenarios. *European J Oper Res*, 2017, 259: 1121–1131
- 161 Bernardi M, Catania L. Portfolio optimisation under flexible dynamic dependence modelling. *J Empir Finance*, 2018, 48: 1–18
- 162 Christoffersen P, Langlois H. The joint dynamics of equity market factors. *J Financ Quant Anal*, 2013, 48: 1371–1404
- 163 Wang L, Huang D, Wei Y. Research on portfolio optimization under international diversification: Dynamic copula (in Chinese). *J Appl Statist Manag*, 2016, 35: 1109–1124 [王璐, 黄登仕, 魏宇. 国际多元化下投资组合优化研究: 动态 copula 方法. 数理统计与管理, 2016, 35: 1109–1124]
- 164 Gurgul H, Machno A. Modeling dependence structure among European markets and among Asian-Pacific markets: A regime switching regular vine copula approach. *Cent Eur J Oper Res*, 2016, 24: 763–786
- 165 Poignard B, Fermanian J D. Dynamic asset correlations based on vines. *Econom Theor*, 2019, 35: 167–197
- 166 Han Y, Li P, Li J, et al. Robust portfolio selection based on copula change analysis. *Emerg Mark Finance Trade*, 2020, 56: 3635–3645

Dynamic copulas and applications in finance

Ping Li, Jie Li & Yingwei Han

Abstract The copula function can describe the complex dependence structure between variables comprehensively and flexibly, which makes it widely used in finance. The dynamic development of financial markets causes the correlation between financial variables to change over time. The dynamic dependence structure between variables can be modeled by changing the parameters or type of the copula function. This paper systematically reviews the representative literatures on the application of dynamic copula models in finance, from the development of the dynamic copula model, several commonly used dynamic copula models, and their applications in finance. In the conclusion, we give the summary and further research direction of dynamic copulas.

Keywords dynamic copula model, financial market, dependence structure, derivative pricing, risk management

MSC(2020) 91G70, 97K80, 97M30

doi: 10.1360/SSM-2020-0342