SCIENTIA SINICA Mathematica

论文



K- 框架的自然 K- 对偶 Bessel 序列

傅元康,朱玉灿*

福州大学数学与计算机科学学院, 福州 350116 E-mail: cbtop608@163.com, zhuyucan@fzu.edu.cn

收稿日期: 2018-06-01; 接受日期: 2018-10-11; 网络出版日期: 2018-11-21; * 通信作者

福建省自然科学基金 (批准号: 2016J01014) 资助项目

摘要 众所周知,自然 K- 对偶 Bessel 序列指的是所有 K- 对偶 Bessel 序列中分析算子的范数最小的那个 K- 对偶 Bessel 序列,但是通过该定义无法直接知道自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式. 本文先给出两种特殊情况下,K- 框架的自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式和最佳 K- 框架界。特别地,有限维 Hilbert 空间中的 K- 框架的最佳 K- 框架界可以用特征值来表示。最后,通过本文所得到的自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式来刻画出所有的 K- 对偶 Bessel 序列.

关键词 K- 框架 K- 对偶 Bessel 序列 自然 K- 对偶 Bessel 序列 最佳 K- 框架界

MSC (2010) 主题分类 42C15, 42C99

1 引言

Hilbert 空间中的框架的概念是由 Duffin 和 Schaeffer [1] 于 1952 年在研究非调和 Fourier 级数时引入的, 他们对框架的性质进行了一些初步的讨论. 1986 年, Daubechies 等 [2] 的研究成果使得框架理论受到国内外众多学者的关注. 从此之后, 国内外众多学者开始着手对框架理论进行系统的研究并取得了一系列成果 (参见文献 [3,4]). 目前框架理论已不仅仅是一门纯粹的数学理论, 它在许多应用领域中已经成为一个不可或缺的工具, 如压缩感知 [5] 和信号采样 [6] 等.

Gǎvruţa [7] 在 2012 年引入了一种称为 K- 框架的推广框架,它可以重构有界线性算子 K 的值域中的元素. 对于 K 为正交投影算子的特殊情形, Feichtinger 和 Werther [8] 已经进行了相关的讨论. 既然 K- 框架作为一种新的推广框架,那它与我们所熟知的框架之间是否存在着差异? 从国内外众多学者的相关研究成果中可以发现, K- 框架与框架之间确实存在着很大的差异. 例如, Gǎvruţa [7] 证明了序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架当且仅当 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列且其合成算子 T 满足 $R(K) \subset R(T)$ (参见文献 [7, 定理 4]). 而我们知道序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的框架当且仅当 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列且其合成算子 T 为满射 (参见文献 [4, 定理 5.5.1]). Xiao 等 [9] 给出了例子说明在重构表达式中 K- 框架的位置与其 K- 对偶 Bessel 序列的位置是不可交换的 (参见文献 [9, 例 3.2]). 而我们知道对于框架

英文引用格式: Fu Y K, Zhu Y C. The canonical K-dual Bessel sequence of a K-frame (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 287–300, doi: 10.1360/N012018-00151

而言, 在重构表达式中框架的位置与其对偶框架的位置是可交换的 (参见文献 [4, 引理 6.3.2]). 正是因为 K- 框架与框架之间存在着差异, 才吸引了国内外众多学者对其进行研究, 并且已经得到了一些关于 K- 框架的重要性质 (参见文献 [9–15]).

众所周知, 在重构 Hilbert 空间中的元素时, 我们需要知道的不仅仅是框架 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, 我们还需要知 道其对偶框架. 通常情况下, 我们最常用的对偶框架就是自然对偶框架 $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$, 其中 S 是 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架算子. 同样, K- 框架在重构有界线性算子 K 的值域中的元素时, 也需要知道其 K- 对偶 Bessel 序列. 文献 [7] 和 [14] 分别给出了 K- 对偶 Bessel 序列存在性的证明以及其定义 (参见文献 [7, 定理 3] 和 [14, 定义 2.5]). 特别地, 对于自然 K- 对偶 Bessel 序列而言, 其定义会不会就是 $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$? 由于 一般的 K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架算子 S 是不可逆的, 所以, 我们无法将自然 K- 对偶 Bessel 序列定义 为 $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$. 于是, Guo [14] 给出了如下定义: 自然 K- 对偶 Bessel 序列是所有 K- 对偶 Bessel 序列 中分析算子的范数最小的那个 K- 对偶 Bessel 序列 (参见文献 [14, 注 2.11(iii)]). 但是通过该定义我们 无法直接知道自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式. 那自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式到底是 什么?对于该问题,目前有如下部分结果: Xiang [16] 将自然 K- 对偶 Bessel 序列的定义推广到了 K-g-框架上 (参见文献 [16, 注 2.5]), 并证明了在 K 具有闭值域的情况下, Parseval K-g- 框架 $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的自 然 K- 对偶 g-Bessel 序列 (为了避免歧义, 我们将文献 [16] 中的自然对偶 K-g-Bessel 序列称为自然 K-对偶 g-Bessel 序列) 为 $\{\Lambda_i(K^+)^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ (参见文献 [16, 定理 2.10]). 当 $\Lambda_i \in B(H,C)$ ($i \in \mathbb{N}$) 时, 通过文 献 [16, 定理 2.10] 可知, 在 K 具有闭值域的情况下, Parseval K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序 列为 $\{K^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ (该结论实际上可由本文的定理 3.3 推出, 因为对于紧 K- 框架而言, 有 R(K) = R(T)成立). 由于 Xiang [16] 只给出了 Parseval K-g- 框架的自然 K- 对偶 g-Bessel 序列的具体形式, 所以, 我们也只能知道 Parseval K- 框架的自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式. 本文将对一般的 K- 框架 来进行讨论, 主要考虑其自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式和最佳 K- 框架界以及 K- 对偶 Bessel 序列的刻画. 我们得到如下结果:

首先,我们给出在 T 具有闭值域的情况下 (其中 T 为 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 的合成算子),K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式和最佳 K- 框架界 (见定理 3.3).接着给出在 K 具有闭值域且 $R(K) \subset R(SK)$ 的情况下 (其中 S 为 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 的框架算子),K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式和最佳 K- 框架界 (见定理 3.4).其次,我们指出有限维 Hilbert 空间中的 K- 框架的最佳 K- 框架界是可以用特征值来表示的,并给出了相关结论 (见定理 3.5).值得注意的是,有限维 Hilbert 空间中的框架的最佳框架下界是用框架的框架算子的特征值来表示,而有限维 Hilbert 空间中的 K- 框架的最佳 K- 框架下界是用其自然 K- 对偶 Bessel 序列的框架算子的特征值来表示.最后,我们将通过自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式来刻画出所有的 K- 对偶 Bessel 序列(见定理 4.1 和 4.2).

在本文中, ℓ^2 表示所有满足下式的复数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 所构成的一个无穷维复 Hilbert 空间:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty.$$

 示算子 T 在子空间 V 上的限制. 为了方便后续的介绍, 我们先介绍以下相关的基本概念.

定义 1.1 [4] 设序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$, 若存在正数 A 和 B, 使得对于任意的 $f \in H$, 有

$$A||f||^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \le B||f||^2,$$
 (1.1)

则称 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的框架, 其中 A 和 B 分别称为框架的下界和上界, 特别地, A 的上确界和 B 的下确界分别称为框架的最佳下界和最佳上界.

如果不等式 (1.1) 的右边成立, 则称 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 中界为 B 的 Bessel 序列.

定义 1.2^[7] 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$, 若存在正数 A 和 B, 使得对于任意的 $f \in H$, 有

$$A||K^*f||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leqslant B||f||^2,$$
 (1.2)

则称 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, 其中 A 和 B 分别称为 K- 框架的下界和上界, 特别地, A 的上确界和 B 的下确界分别称为 K- 框架的最佳下界和最佳上界. 当 K = I 时, K- 框架就是框架.

定义 1.3 [14] 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, 若存在 H 的 Bessel 序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对于任意的 $f \in H$, 有

$$Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i, \tag{1.3}$$

则称 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列.

注 1.1 为了避免歧义, 本文将文献 [14] 中的对偶 K-Bessel 序列称为 K- 对偶 Bessel 序列. 通过简单的验证可知, 定义 1.3 中的 K- 对偶 Bessel 序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K^* - 框架.

定义 1.4 [14] 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, 则 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列是其所有 K- 对偶 Bessel 序列中分析算子的范数最小的那个 K- 对偶 Bessel 序列.

定义 1.5 [4] 若 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列, 则可定义有界线性算子 T 如下:

$$T: \ell^2 \to H, \quad Ta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i, \quad a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2,$$
 (1.4)

称 T 为 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子. T 的共轭算子 T^* 为

$$T^*: H \to \ell^2, \quad T^*f = \{\langle f, f_i \rangle\}_{i=1}^{\infty}, \quad f \in H,$$
 (1.5)

称 T^* 为 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的分析算子. 令 $S = TT^*$, 则

$$S: H \to H, \quad Sf = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i, \quad f \in H,$$
 (1.6)

称 S 为 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架算子.

2 一些引理

引理 **2.1** [4] 若 $T \in B(H)$ 且 T 具有闭值域,则

(1) 存在唯一的 $T^+ \in B(H)$ 满足

$$N_{T^{+}} = R(T)^{\perp}, \quad R(T^{+}) = N_{T}^{\perp}, \quad TT^{+}f = f, \quad f \in R(T),$$
 (2.1)

称算子 T^+ 为 T 的伪逆算子. 如果 T 为可逆的有界线性算子, 则 $T^+ = T^{-1}$;

- (2) $TT^+ = \pi_{R(T)}, T^+T = \pi_{R(T^+)};$
- (3) $R(T^*)$ 是 H 的一个闭子空间, 且 $(T^*)^+ = (T^+)^*$.

引理 $2.2^{[17]}$ 若 $T \in B(H)$, 则

- (1) $R(T)^{\perp} = N_{T^*}, R(T^*)^{\perp} = N_T, \overline{R(T)} = N_{T^*}^{\perp}, \overline{R(T^*)} = N_T^{\perp};$
- (2) $N_T = N_{T^*T}, N_{T^*} = N_{TT^*}, \overline{R(T)} = \overline{R(TT^*)}, \overline{R(T^*)} = \overline{R(T^*T)};$
- (3) 如果四个子空间 R(T)、 $R(T^*)$ 、 $R(TT^*)$ 和 $R(T^*T)$ 中有一个是闭子空间,则其他三个也是闭子空间.

引理 2.3 [4] 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列当且仅当可由 (1.4) 定义有界线性算子 T.

引理 **2.4**^[7] 设 $K \in B(H)$, 则序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架当且仅当 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列且其合成算子 T 满足 $R(K) \subset R(T)$.

引理 2.5 ^[4] 设序列 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 为 H_n 的框架, 其框架算子 S 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的最佳框架下界和最佳框架上界分别为 $\lambda_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}$ 和 $\lambda_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}$.

注 2.1 参见文献 [4, 定理 1.3.1(i) 的证明], 不难发现, 对于 H_n 中满足 $\lambda_{\max} > 0$ 的 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 而言, 引理 2.5 中最佳上界的结论也是成立的, 其中 λ_{\max} 是 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的框架算子的最大的特征值.

引理 2.6 [18] 设序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的框架, T 和 S 分别为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和框架算子, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的最佳框架下界和最佳框架上界分别为 A 和 B, 则

$$A = ||S^{-1}||^{-1} = ||T^{+}||^{-2}, \quad B = ||S|| = ||T||^{2}.$$

注 2.2 参见文献 [18, 命题 3.4 的证明], 不难发现, 对于 H 中满足 $||S|| \neq 0$ 的 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 而言, 引理 2.6 中最佳上界的结论也是成立的, 其中 S 是 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架算子.

引理 2.7 [14] 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, T 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子, 则序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列当且仅当存在 $M \in B(H, \ell^2)$, 使得 K = TM 且 $g_i = M^*e_i$, $i \in \mathbb{N}$, 其中 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 ℓ^2 的标准正交基.

引理 2.8 [14] 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, 则 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的最佳 K- 框架下界为其自然 K- 对偶 Bessel 序列的分析算子的范数的负二次方.

注 2.3 文献 [14] 中定理 2.10 的结论是 K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的最佳 K- 框架下界为其自然 K- 对偶 Bessel 序列的分析算子的范数的二次方. 如果需得到引理 2.8, 我们只需将文献 [14] 中定理 2.10 的证明过程中的第二个等式的等号的左边补上 A^{-1} , 以及后续证明过程中的 A 改为 A^{-1} 即可.

3 自然 K- 对偶 Bessel 序列

定理 3.1 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, T 和 S 分别为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和框架算子. 若 T 具有闭值域, 则 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列.

证明 下面先说明 S^+ 是存在的. 事实上, 由于 $S = TT^*$ 且 T 具有闭值域, 故根据引理 2.2(3) 可知, S 也具有闭值域. 再根据引理 2.1(1) 知, S^+ 存在.

下面证明 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列. 设 K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的上界为 B, 则对于任意的 $n \in \mathbb{N}, f \in H$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle f, K^* S^+ f_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle S^+ K f, f_i \rangle|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle S^+ K f, f_i \rangle|^2$$
$$\leqslant B \|S^+ K f\|^2 \leqslant B \|S^+ K \|^2 \|f\|^2,$$

由此可知正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, K^*S^+f_i \rangle|^2$ 收敛. 令 $n \to \infty$, 则从上述不等式得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, K^* S^+ f_i \rangle|^2 \leqslant B \|S^+ K\|^2 \|f\|^2, \quad f \in H,$$

即 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列.

由于序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, 故根据引理 2.4, 有 $R(K) \subset R(T)$. 又由引理 2.2(2) 以及 T 具有闭值域, 有 R(T) = R(S), 即 $R(K) \subset R(T) = R(S)$. 故根据引理 2.1(1) 知, $SS^+Kf = Kf$, $f \in H$, 则对于任意的 $f \in H$, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, K^* S^+ f_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle S^+ K f, f_i \rangle f_i = S S^+ K f = K f, \tag{3.1}$$

故根据定义 1.3 知, $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列.

定理 3.2 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, T 和 S 分别为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和 框架算子. 若 T 具有闭值域, 则下列命题等价:

- (1) $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列;
- (2) 存在 H 的 Bessel 序列 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$,使得 $g_i = K^*S^+f_i + h_i \ (i \in \mathbb{N})$ 且 $TT_h^* = 0$,其中 T_h^* 为 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的分析算子.

证明 $(1) \Rightarrow (2)$ 取 $h_i = g_i - K^*S^+f_i, i \in \mathbb{N}$, 即有 $g_i = K^*S^+f_i + h_i, i \in \mathbb{N}$. 下证 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列. 根据定义 1.3 可知, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列, 设其上界为 C. 根据定理 3.1 可知, $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列, 设其上界为 D, 则对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, $f \in H$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle f, h_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle f, g_i - K^* S^+ f_i \rangle|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\langle f, g_i \rangle - \langle f, K^* S^+ f_i \rangle|^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (|\langle f, g_i \rangle| + |\langle f, K^* S^+ f_i \rangle|)^2$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} |\langle f, g_i \rangle|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} |\langle f, K^* S^+ f_i \rangle|^2$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, g_i \rangle|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, K^* S^+ f_i \rangle|^2$$

$$\leqslant (2C + 2D) ||f||^2,$$

由此可知正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, h_i \rangle|^2$ 收敛. 令 $n \to \infty$, 则从上述不等式得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, h_i \rangle|^2 \leqslant (2C + 2D) ||f||^2, \quad f \in H,$$

即 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列.

另外, 由 (1) 和定理 3.1 知, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 都为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列, 故根据定义 1.3 知, 对于任意的 $f \in H$, 有

$$TT_h^* f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, h_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i - K^* S^+ f_i \rangle f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i - \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, K^* S^+ f_i \rangle f_i$$
$$= Kf - Kf = 0.$$

由此即可说明 $TT_h^* = 0$.

 $(2)\Rightarrow (1)$ 参考 $(1)\Rightarrow (2)$ 中 $\{h_i\}_{i=1}^\infty$ 为 H 的 Bessel 序列的证明过程, 同理可得 $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ 为 H 的 Bessel 序列. 又因为对于任意的 $f\in H$, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, K^* S^+ f_i + h_i \rangle f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, K^* S^+ f_i \rangle f_i + \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, h_i \rangle f_i$$
$$= Kf + TT_h^* f = Kf + 0 = Kf,$$

所以, 根据定义 1.3 可知, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列.

注 3.1 当 K = I 时, 即可由定理 3.2 得到文献 [3, 命题 1.17]. 因为对于框架而言, 其合成算子为满射, 故必具有闭值域, 即满足定理 3.2 的条件.

定理 3.3 设 $K \in B(H)$ 且 $K \neq 0$,序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, T 和 S 分别为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和框架算子. 若 T 具有闭值域,则 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列,且 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的最佳 K- 框架上界为 $\|S\| = \|T\|^2$,最佳 K- 框架下界为 $\|T^*S^+K\|^{-2} = \|K^*S^+K\|^{-1}$.

证明 根据定义 1.4 和定理 3.1 知, 若要证明 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列,我们只需证明 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的分析算子的范数比 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的其他 K- 对偶 Bessel 序列的分析算子的范数小即可. 设 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的任意一个 K- 对偶 Bessel 序列,其分析算子记为 T_g^* . 故根据定理 3.2 可知,存在 H 的 Bessel 序列 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$,使得 $g_i = K^*S^+f_i + h_i$ $(i \in \mathbb{N})$ 且 $TT_h^* = 0$,其中 T_h^* 为 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的分析算子. 记 $w_i = K^*S^+f_i$, $i \in \mathbb{N}$. 根据定理 3.1 知, $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} = \{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列,其分析算子记为 T_w^* ,则对于任意的 $f \in H$,有

$$T_w^* f = \{ \langle f, w_i \rangle \}_{i=1}^{\infty} = \{ \langle f, K^* S^+ f_i \rangle \}_{i=1}^{\infty} = \{ \langle S^+ K f, f_i \rangle \}_{i=1}^{\infty} = T^* S^+ K f,$$
(3.2)

故知 $T_w^* = T^*S^+K$. 则对于任意的 $f \in H$, 有

$$||T_q^*f||^2 = ||\{\langle f, g_i \rangle\}_{i=1}^{\infty}||^2 = ||\{\langle f, K^*S^+f_i + h_i \rangle\}_{i=1}^{\infty}||^2$$

$$\begin{split} &= \| \{ \langle f, K^* S^+ f_i \rangle + \langle f, h_i \rangle \}_{i=1}^{\infty} \|^2 \\ &= \| \{ \langle f, K^* S^+ f_i \rangle \}_{i=1}^{\infty} + \{ \langle f, h_i \rangle \}_{i=1}^{\infty} \|^2 \\ &= \| T^* S^+ K f + T_h^* f \|^2 \\ &= \langle T^* S^+ K f + T_h^* f, T^* S^+ K f + T_h^* f \rangle \\ &= \| T^* S^+ K f \|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle T^* S^+ K f, T_h^* f \rangle + \| T_h^* f \|^2 \\ &= \| T^* S^+ K f \|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle S^+ K f, T T_h^* f \rangle + \| T_h^* f \|^2 \\ &= \| T^* S^+ K f \|^2 + 0 + \| T_h^* f \|^2 \\ &\geqslant \| T^* S^+ K f \|^2 = \| T_w^* f \|^2, \end{split}$$

故有 $||T_w^*f||^2 \le ||T_g^*f||^2 \le ||T_g^*||^2 ||f||^2$,即 $||T_w^*||^2 \le ||T_g^*||^2$. 由此即可说明序列 $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} = \{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列.

设序列 $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} = \{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和框架算子分别为 T_w 和 S_w . 根据 $T_w^* = T^*S^+K$ (通过 (3.2) 可知) 和 $SS^+K = K$ (通过 (3.1) 可知), 则有

$$S_w = T_w T_w^* = (T^* S^+ K)^* T^* S^+ K = K^* S^+ T T^* S^+ K = K^* S^+ S S^+ K = K^* S^+ K.$$
(3.3)

由于 $||S_w|| = ||T_w^*||^2$, 故有 $||T^*S^+K||^{-2} = ||K^*S^+K||^{-1}$ 成立. 根据引理 2.8 可知, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 最佳 K- 框架下界为 $||T^*S^+K||^{-2} = ||K^*S^+K||^{-1}$.

下证 $||S|| \neq 0$. 由于 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, 故根据引理 2.4, 有 $R(K) \subset R(T)$. 又由引理 2.2(2) 以及 T 具有闭值域, 有 R(T) = R(S), 即 $R(K) \subset R(T) = R(S)$. 若 ||S|| = 0, 即 S = 0, 则

$$R(K) \subset R(T) = R(S) = \{0\},\$$

即 K=0. 这与 $K\neq 0$ 矛盾, 故有 $\|S\|\neq 0$. 根据引理 2.6 和注 2.2 可知, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的最佳 K- 框架上界为 $\|S\|=\|T\|^2$.

注 3.2 当 K = I 时,即可由定理 3.3 得到文献 [4, 命题 5.4.4] 和 [18, 命题 3.4],即引理 2.6,以及自然对偶框架的形式,即 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$. 因为对于框架而言,其合成算子为满射,故必有闭值域,即满足定理 3.3 的条件.

定理 3.4 设 $K \in B(H)$ 且 $K \neq 0$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, S 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架算子. 若 K 具有闭值域, 则下列命题等价:

- (1) $R(K) \subset R(SK)$;
- (2) $\{K^*(K^*S)^+K^*f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列.

此时, $\{K^*(K^*S)^+K^*f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 就是 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列, 且 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的最佳 K- 框架下界为 $\|T^*K(SK)^+K\|^{-2} = \|K^*(K^*S)^+K^*K\|^{-1}$, 最佳 K- 框架上界为 $\|S\| = \|T\|^2$.

证明 下面先说明 $(K^*S)^+$ 是存在的. 事实上, Xiao 等 [9] 证明了, 设序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, 且 S 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架算子, 若 K 具有闭值域, 则 $S_{R(K)}$ 具有闭值域 (参见文献 [9] 中的预备知识). 根据 $S_{R(K)}$ 的定义, 显然有 $R(S_{R(K)}) = R(SK)$, 故 SK 也具有闭值域. 结合引理 2.1(1) 和 2.1(3) 可知, $K^*S = (SK)^*$ 也具有闭值域, 从而 $(K^*S)^+$ 存在, 且 $[(K^*S)^+]^* = [(K^*S)^*]^+ = (SK)^+$.

(1) \Leftrightarrow (2) 由于 $\{K^*(K^*S)^+K^*f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列 (参见定理 3.1 的证明过程中 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列的证明,同理可得),故根据定义 1.3 可知, $\{K^*(K^*S)^+K^*f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K-

对偶 Bessel 序列当且仅当对于任意的 $f \in H$, 有

$$Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, K^*(K^*S)^+ K^* f_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle K[(K^*S)^+]^* K f, f_i \rangle f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle K(SK)^+ K f, f_i \rangle f_i = SK(SK)^+ K f,$$

即 $Kf = SK(SK)^+Kf$, $f \in H$. 根据引理 2.1(1) 和 2.1(2), 则有 $Kf = SK(SK)^+Kf$ ($f \in H$) 当且仅 当 $R(K) \subset R(SK)$. 由此即可说明 (1) 与 (2) 等价.

参考定理 3.2 和 3.3 的证明, 同理可得序列 $\{K^*(K^*S)^+K^*f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列, 且 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的最佳 K- 框架下界为 $\|T^*K(SK)^+K\|^{-2} = \|K^*(K^*S)^+K^*K\|^{-1}$, 最佳 K- 框架上界为 $\|S\| = \|T\|^2$.

注 3.3 当 K = I 时,即可由定理 3.4 得到文献 [4, 命题 5.4.4] 和 [18, 命题 3.4],即引理 2.6,以及自然对偶框架的形式,即 $\{K^*(K^*S)^+K^*f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$. 因为对于框架而言,其框架算子为满射,故有 R(I) = H = R(S) = R(SI),且显然有 I 具有闭值域,即满足定理 3.4 的条件.

下面给出例子来说明, 定理 3.4 确实可以解决一部分定理 3.3 并不能解决的情况, 即存在 K- 框架 满足 K 具有闭值域且 $R(K) \subset R(SK)$, 但是不满足其合成算子 T 具有闭值域.

例 3.1 设 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的标准正交基. 定义有界线性算子 $K: H \to H, Kf = \langle f, e_1 \rangle e_1, f \in H$. 取 $f_1 = e_1, f_2 = e_2, f_i = e_{i-1} + e_i, i = 3, 4, \ldots,$ 记 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和框架算子分别为 T 和 S.

下证 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 且 n > 2, $f \in H$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle f, f_i \rangle|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \sum_{i=3}^{n} |\langle f, e_{i-1} \rangle| + \langle f, e_i \rangle|^2$$

$$\leq |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \sum_{i=3}^{n} (|\langle f, e_{i-1} \rangle| + |\langle f, e_i \rangle|)^2$$

$$\leq |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + 2\sum_{i=3}^{n} |\langle f, e_{i-1} \rangle|^2 + 2\sum_{i=3}^{n} |\langle f, e_i \rangle|^2$$

$$\leq 6\sum_{i=1}^{n} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq 6\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 = 6||f||^2,$$

由此可知正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2$ 收敛. 令 $n \to \infty$, 则从上述不等式得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leqslant 6||f||^2, \quad f \in H$$

成立, 即 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列. 根据 K 和 T 的定义, 显然有 $R(K) \subset R(T)$. 故根据引理 2.4 知, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架.

显然, K 具有闭值域, 因为 $R(K) = \overline{\mathrm{Span}}\{e_1\}$. 下面证明 $R(K) \subset R(SK)$. 由于对于任意的 $f \in R(K)$, 都会存在 $h \in H$, 使得 $f = Kh = \langle h, e_1 \rangle e_1$, 故根据 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的定义, 有

$$SKh = S(\langle h, e_1 \rangle e_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \langle h, e_1 \rangle e_1, f_i \rangle f_i = \langle \langle h, e_1 \rangle e_1, f_1 \rangle f_1 = \langle \langle h, e_1 \rangle e_1, e_1 \rangle e_1 = \langle h, e_1 \rangle e_1 = f.$$

由此即可说明 $R(K) \subset R(SK)$.

由于我们知道对于 H 中的一个 Bessel 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 而言, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的框架序列当且仅当其合成算子具有闭值域 (参见文献 [4, 推论 5.5.2]), 所以, 若要证明 T 不具有闭值域, 我们只需证明 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 不是 H 的框架序列即可.

下面先证明 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 不是 H 的框架. 对任意固定的 $n \in \mathbb{N}$ 且 n > 2, 取 $f = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} e_j$, 则有

$$||f||^2 = \sum_{j=1}^n ||e_j||^2 = n.$$

当 i = 1 时, $|\langle f, f_i \rangle|^2 = 1$; 当 i = 2 时, $|\langle f, f_i \rangle|^2 = 1$; 当 2 < i < n+1 时,

$$|\langle f, f_i \rangle|^2 = \left| \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \langle e_j, e_{i-1} + e_i \rangle \right|^2 = |(-1)^{i-1-1} + (-1)^{i-1}|^2 = 0;$$

当 i = n + 1 时, $|\langle f, f_i \rangle|^2 = 1$; 当 i > n + 1 时, $|\langle f, f_i \rangle|^2 = 0$. 从而,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 = 3 = \frac{3}{n} ||f||^2.$$

故由上述等式可知, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 不是 H 的框架. 再根据 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的定义可知, $\overline{\text{Span}}\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = H$, 故 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 不是 $\overline{\text{Span}}\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架, 即 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 不是 H 的框架序列. 由此即可说明 T 不具有闭值域.

我们知道在有限维 Hilbert 空间中, 框架的最佳框架界可以用特征值来表示. 对于有限维 Hilbert 空间中的 K- 框架而言, 其最佳 K- 框架界是否也可以用特征值来表示? 答案是肯定的. 在给出相关的结论前, 我们先对一个现有的相关结论进行纠正. 李亮和李鹏同[15] 给出了如下结论:

命题 3.1 [15] 设 $K \in B(H_n)$ 且 $K \neq 0$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 为 H_n 的 K- 框架, S 为 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的框架算子, 则 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的最佳 K- 框架下界为 $\frac{\lambda_{\min}}{\|K\|^2}$, 其中 λ_{\min} 为 S 的最小的非零特征值.

下面给出反例来说明, $\frac{\lambda_{\min}}{\|K\|^2}$ 不是 K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的最佳 K- 框架下界.

例 3.2 设 $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ 为 \mathbb{R}^3 的标准正交基,取 $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1$, $f_3 = e_2$, $\{f_i\}_{i=1}^3$ 的框架算子记为 S. 定义有界线性算子 K 如下:

$$K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
, $Kf = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_1 + \langle f, e_3 \rangle e_2$, $f \in \mathbb{R}^3$.

下面计算 K^*f , 对于任意的 $f,g \in \mathbb{R}^3$, 有

$$\langle K^*f, g \rangle = \langle f, Kg \rangle$$

$$= \langle f, \langle g, e_1 \rangle e_1 + \langle g, e_2 \rangle e_1 + \langle g, e_3 \rangle e_2 \rangle$$

$$= \langle f, e_1 \rangle \langle e_1, g \rangle + \langle f, e_1 \rangle \langle e_2, g \rangle + \langle f, e_2 \rangle \langle e_3, g \rangle$$

$$= \langle \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_1 \rangle e_2 + \langle f, e_2 \rangle e_3, g \rangle.$$

即 $K^*f = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_1 \rangle e_2 + \langle f, e_2 \rangle e_3, f \in \mathbb{R}^3$. 故对于任意的 $f \in \mathbb{R}^3$, 有

$$||K^*f||^2 = ||\langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_1 \rangle e_2 + \langle f, e_2 \rangle e_3||^2$$
$$= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2$$
$$= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} |\langle f, f_i \rangle|^2 = \langle Sf, f \rangle.$$

由上述等式可知, $\{f_i\}_{i=1}^3$ 为 \mathbb{R}^3 的 K- 框架且其最佳 K- 框架下界为 1, 以及 $S = KK^*$ 成立. 下面计算 S 的最小的非零特征值. 根据 K 的定义, 有

$$K(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_1, e_2) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 K 在 $\{e_i\}_{i=1}^3$ 这组基下对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以, $S = KK^*$ 在 $\{e_i\}_{i=1}^3$ 这组基下对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故由上述等式可知 S 的最小的非零特征值为 1.

若命题 3.1 成立, 则有 $\frac{\lambda_{\min}}{\|K\|^2} = \frac{1}{\|K\|^2} = 1$. 由于 $\|K\| > 0$, 故有 $\|K\| = 1$. 取 f = (1, 1, 1), 则有

$$\frac{\|Kf\|}{\|f\|} = \frac{\|\langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_1 + \langle f, e_3 \rangle e_2\|}{\sqrt{3}} = \frac{\|e_1 + e_1 + e_2\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 1.$$

从而,

$$||K|| = \sup_{f \neq 0} \frac{||Kf||}{||f||} \geqslant \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 1,$$

与 ||K|| = 1 矛盾. 所以, 命题 3.1 不成立.

定理 3.5 设 $K \in B(H_n)$ 且 $K \neq 0$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 为 H_n 的 K 框架, S 为 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的框架算子, 则序列 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^m$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列, 且 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的最佳 K- 框架下界为 $\tilde{\lambda}_{\max}^{-1}$, 最佳 K- 框架上界为 λ_{\max} , 其中 $\tilde{\lambda}_{\max}$ 为 K^*S^+K 的最大的非零特征值, λ_{\max} 为 S 的最大的非零特征值.

证明 设 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的合成算子为 T, 由于 Hilbert 空间的有限维子空间必为闭子空间, 所以, T 具有闭值域. 故根据定理 3.3 知, $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^m$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的自然 K- 对偶 Bessel 序列.

设 K^*S^+K 的特征值为 $\tilde{\lambda}_j$, $j=1,\ldots,n$. 由于 K^*S^+K 为自共轭算子, 故存在 $\tilde{\lambda}_j$ 对应的特征向量 e_j , 使得 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 H_n 的标准正交基, 且存在 $D \in B(H_n)$ 和酉算子 $C \in B(H_n)$, 使得 K^*S^+K

 $= C^{-1}DC$, 其中 D 在 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 这组基下对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{\lambda}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \widetilde{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

下证 $\widetilde{\lambda}_j \ge 0, j=1,\ldots,n$. 根据注 1.1 和 (3.3) 知, $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^m$ 为 H_n 的 K^* - 框架且其框架算子 为 K^*S^+K , 则对 $j=1,\ldots,n$, 有

$$\widetilde{\lambda}_j = \widetilde{\lambda}_j \langle e_j, e_j \rangle = \langle \widetilde{\lambda}_j e_j, e_j \rangle = \langle K^* S^+ K e_j, e_j \rangle = \sum_{i=1}^m |\langle e_j, K^* S^+ f_i \rangle|^2 \geqslant 0,$$

 $\mathbb{P}\widetilde{\lambda}_j \geqslant 0, \ j = 1, \dots, n.$

下证 $\widetilde{\lambda}_{\max} \neq 0$. 若 $\widetilde{\lambda}_{\max} = 0$, 根据 $0 \leqslant \widetilde{\lambda}_j \leqslant \widetilde{\lambda}_{\max} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, 则有 $\widetilde{\lambda}_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, 即 D = 0. 故有 $K^*S^+K = C^{-1}DC = 0$. 通过 (3.3), 我们知道 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^m$ 的合成算子和框架算子分别为 K^*S^+T 和 K^*S^+K . 再结合引理 2.2(2) 以及 Hilbert 空间的有限维子空间为闭子空间这一事实, 即可得到

$$R(K^*S^+T) = R(K^*S^+K) = \{0\}.$$

又由注 1.1 知, $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^m$ 为 H_n 的 K^* - 框架. 故根据引理 2.4, 有

$$R(K^*) \subset R(K^*S^+T) = R(K^*S^+K) = \{0\},\$$

即 $K^*=0$, 从而有 K=0. 这与 $K\neq 0$ 矛盾, 所以有 $\widetilde{\lambda}_{\max}\neq 0$, 从而 $\widetilde{\lambda}_{\max}>0$.

设 S 的特征值为 $\lambda_j,\,j=1,\ldots,n$. 参考上述证明, 同理可得 $\lambda_j\geqslant 0,\,j=1,\ldots,n$, 以及当 $\lambda_{\max}=0$ 时, 有 S=0 成立. 下面证明 $\lambda_{\max}\neq 0$. 若 $\lambda_{\max}=0$, 则 S=0. 由于序列 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 为 H_n 的 K- 框架, 故根据引理 2.4, 有 $R(K)\subset R(T)$. 再结合引理 2.2(2) 以及 Hilbert 空间的有限维子空间为闭子空间这一事实, 有 R(T)=R(S), 因此,

$$R(K) \subset R(T) = R(S) = \{0\},\$$

从而可知 K=0. 这与 $K\neq 0$ 矛盾. 故 $\lambda_{\max}>0$.

根据引理 2.5 和注 2.1 知, λ_{\max} 为 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的最佳 K- 框架上界. 又因为 K^* - 框架 $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^m$ 的框架算子为 K^*S^+K (通过 (3.3) 可知), 故根据引理 2.5 和 2.6 以及注 2.1 和 2.2 知, $\{K^*S^+f_i\}_{i=1}^m$ 的最佳 K^* - 框架上界为 $\widetilde{\lambda}_{\max} = \|K^*S^+K\|$. 最后根据定理 3.3 即可知, $\{f_i\}_{i=1}^m$ 的最佳 K- 框架下界为 $\|K^*S^+K\|^{-1} = \widetilde{\lambda}_{\max}^{-1}$.

注 3.4 当 $K = I_n$ 时, 即可由定理 3.5 得到文献 [4, 定理 1.3.1(i)], 即引理 2.5. 因为当 $K = I_n$ 时, 我们有 $K^*S^+K = S^{-1}$, 故有

$$\widetilde{\lambda}_{\max}^{-1} = \widehat{\lambda}_{\max}^{-1} = \lambda_{\min},$$

其中 $\tilde{\lambda}_{\max}$ 为 K^*S^+K 的最大的非零特征值, $\hat{\lambda}_{\max}$ 为 S^{-1} 的最大的特征值, λ_{\min} 为 S 的最小的特征值.

4 K-对偶 Bessel 序列的刻画

Li^[19] 指出,对于框架 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 而言,我们可以通过其自然对偶框架 $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 来刻画出所有的对偶框架,其中 S 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的框架算子 (参见文献 [19, 定理 3.6 和推论 3.7]). 对于 K- 框架而言,我们是否也能通过自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式来刻画出所有的 K- 对偶 Bessel 序列? 答案是肯定的. 通过引理 2.7 不难发现,如果我们需要得到 K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的所有 K- 对偶 Bessel 序列,我们只需知道所有满足等式 K = TM 的 M 即可,其中 T 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子.下面分别给出两种特殊情况下 M 的表达式,然后通过 M 的表达式以及前面所给出的自然 K- 对偶 Bessel 序列的具体形式来刻画出所有的 K- 对偶 Bessel 序列.

定理 4.1 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, T 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子. 若 T 具有闭值域, 则

(1) 所有满足等式 K = TM 的 M 可通过如下表达式得到:

$$M = T^*S^+K + (I - T^*S^+T)W, (4.1)$$

其中 W 为 $B(H, \ell^2)$ 中的任意一个有界线性算子;

(2) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的所有 K- 对偶 Bessel 序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可通过如下表达式得到:

$$g_i = K^* S^+ f_i + y_i - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_i, S^+ f_j \rangle y_j, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$(4.2)$$

其中 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 的任意一个 Bessel 序列.

证明 由定理 3.1 的证明可知, S^+ 是存在的.

(1) 先证明对于任意一个 $W \in B(H, \ell^2)$, 都可由 (4.1) 给出一个 M 使得 K = TM 成立.

由引理 2.2(2) 以及 T 具有闭值域知, R(T) = R(S). 故由引理 2.1(1) 知, $SS^+T = T$. 结合 $SS^+K = K$ (由 (3.1) 可知), 则有

$$TM = T(T^*S^+K + (I - T^*S^+T)W) = K + (T - TT^*S^+T)W = K + (T - T)W = K.$$

下面再证明对于任意一个满足 K = TM 的 M, 都会存在一个 $W \in B(H, \ell^2)$ 使得 (4.1) 成立. 事实上, 对于任意的 M 满足 K = TM, 取 W = M, 即可得到

$$T^*S^+K + (I - T^*S^+T)W = T^*S^+K + (I - T^*S^+T)M$$
$$= T^*S^+K + (M - T^*S^+TM)$$
$$= T^*S^+K + M - T^*S^+K = M.$$

由此即可说明(1)成立.

(2) 设 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 ℓ^2 的标准正交基, 其中 $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, 此处当 i = j 时, $\delta_{ij} = 1$; 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$. 下面证明对于 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的任意一个 K- 对偶 Bessel 序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, 都会存在一个 H 的 Bessel 序列 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使得 (4.2) 成立. 根据 Riesz 表示定理可知, 对于任意 $W \in B(H, \ell^2)$, 都会存在一个序列 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使得 $Wf = \{\langle f, y_j \rangle\}_{j=1}^{\infty}$ ($f \in H$) 成立. 根据引理 2.3 知, $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列且 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的分析算子为 W. 故根据引理 2.7 和 (1) 可知, 对于任意的 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$g_i = M^* e_i = (T^* S^+ K + (I - T^* S^+ T) W)^* e_i$$

$$= (K^*S^+T + W^*(I - T^*S^+T))e_i$$

= $K^*S^+f_i + y_i - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_i, S^+f_j \rangle y_j$.

下面证明对于 H 的任意一个 Bessel 序列 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, 都可以通过 (4.2) 得到一个 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. 因为 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列, 故记其分析算子为 W. 显然有 $W \in B(H, \ell^2)$, 且 $Wf = \{\langle f, y_i \rangle\}_{i=1}^{\infty}$, $f \in H$. 故对于任意的 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$g_{i} = K^{*}S^{+}f_{i} + y_{i} - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_{i}, S^{+}f_{j} \rangle y_{j}$$
$$= (K^{*}S^{+}T + W^{*}(I - T^{*}S^{+}T))e_{i}$$
$$= (T^{*}S^{+}K + (I - T^{*}S^{+}T)W)^{*}e_{i}.$$

故根据 (1) 和引理 2.7 即可说明 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 K- 对偶 Bessel 序列. 由此可说明 (2) 成立. \Box **注 4.1** 当 K = I 时, 即可由定理 4.1 得到文献 [4, 引理 6.3.6 和定理 6.3.7] 和 [19, 定理 3.6 和

推论 3.7]. 因为对于框架而言, 其合成算子为满射, 故必具有闭值域, 即满足定理 4.1 的条件. 根据引理 2.4, 我们知道对于 K- 框架 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 而言, 若有 $R(T) \subset R(SK)$ 成立, 则有

$$R(K) \subseteq R(T) \subset R(SK)$$
,

其中 T 和 S 分别为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和框架算子. 故结合定理 3.4 的结论以及定理 4.1 的证明, 同理可得如下定理成立.

定理 4.2 设 $K \in B(H)$, 序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的 K- 框架, T 和 S 分别为 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的合成算子和 框架算子. 若 K 具有闭值域且 $R(T) \subset R(SK)$, 则

(1) 满足等式 K = TM 的 M 都可通过如下表达式得到:

$$M = T^*K(SK)^+K + (I - T^*K(SK)^+T)W, (4.3)$$

其中 W 为 $B(H, \ell^2)$ 中的任意一个有界线性算子;

(2) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的所有 K- 对偶 Bessel 序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可通过如下表达式得到:

$$g_i = K^*(K^*S)^+ K^* f_i + y_i - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_i, K(SK)^+ f_j \rangle y_j, \quad i \in \mathbb{N},$$
(4.4)

其中 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 的任意一个 Bessel 序列.

注 4.2 当 K = I 时,即可由定理 4.2 得到文献 [4,引理 6.3.6 和定理 6.3.7] 和 [19,定理 3.6 和推论 3.7]. 因为对于框架而言,其合成算子和框架算子都为满射,故有 R(T) = H = R(S) = R(SI)成立,且显然有 I 具有闭值域,即满足定理 4.2 的条件.

致谢 衷心感谢审稿专家提出的宝贵的修改意见.

参考文献

- 1 Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341–366
- 2 Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y, Painless nonorthogonal expansions. J Math Phys, 1986, 27: 1271-1283

- 3 Casazza P G, Kutyniok G. Finite Frames: Theory and Applications. Boston: Birkhäuser, 2013
- 4 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2016
- 5 Tsiligianni E V, Kondi L P, Katsaggelos A K. Construction of incoherent unit norm tight frames with application to compressed sensing. IEEE Trans Inform Theory, 2014, 60: 2319–2330
- 6 Eldar Y C. Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors. J Fourier Anal Appl, 2003, 9: 77–96
- 7 Găvruța L. Frames for operators. Appl Comput Harmon Anal, 2012, 32: 139-144
- 8 Feichtinger H G, Werther T. Atomic systems for subspaces. In: Proceedings of the 4th International Conference on Sampling Theory and Applications. Orlando: The University of Central Florida, 2001, 163–165
- 9 Xiao X C, Zhu Y C, Găvruța L. Some properties of K-frames in Hilbert spaces. Results Math, 2013, 63: 1243-1255
- 10 黄永东, 化定丽. Hilbert 空间中的 K-Riesz 框架及其稳定性. 中国科学: 数学, 2017, 47: 383-396
- 11 朱玉灿, 舒志彪, 肖祥春. 复 Hilbert 空间中的 K-框架和 K-Riesz 基. 中国科学: 数学, 2018, 48: 609-622
- 12 丁明玲, 肖祥春, 朱玉灿. Hilbert 空间中的 K- 框架. 数学学报, 2014, 57: 1089-1100
- 13 Xiang Z Q, Li Y M. Frame sequences and dual frames for operators. Sci Asia, 2016, 42: 222-230
- 14 Guo X X. Canonical dual K-Bessel sequences and dual K-Bessel generators for unitary systems of Hilbert spaces. J Math Anal Appl, 2016, 444: 598–609
- 15 李亮, 李鵬同. Hilbert 空间上的 K- 框架与 K- 对偶. 南京大学学报: 数学半年刊, 2015, 32: 74-88
- 16 Xiang Z Q. Canonical dual K-q-Bessel sequences and K-q-frame sequences. Results Math, 2018, 73: 17
- 17 Taylor A E, Lay D C. Introduction to Functional Analysis. New York: Wiley, 1980
- 18 Christensen O. Frames and pseudo-inverses. J Math Anal Appl, 1995, 195: 401-414
- 19 Li S D. On general frame decompositions. Numer Funct Anal Optim, 1995, 16: 1181-1191

The canonical K-dual Bessel sequence of a K-frame

Yuankang Fu & Yucan Zhu

Abstract It is well known that the canonical K-dual Bessel sequence is the K-dual Bessel sequence whose analysis operator has minimal operator norm in all the K-dual Bessel sequences. However, we cannot directly know the specific form of the canonical K-dual Bessel sequence from this definition. In this paper, we first give the specific form of the canonical K-dual Bessel sequence and the optimal K-frame bounds of a K-frame for two special cases. Specially, the optimal K-frame bounds of a K-frame in the finite dimensional Hilbert space can be expressed by the eigenvalues. Lastly, the specific form of the canonical K-dual Bessel sequence that we obtain in this paper is used to characterize all the K-dual Bessel sequences.

Keywords K-frame, K-dual Bessel sequence, canonical K-dual Bessel sequence, optimal K-frame bound MSC(2010) 42C15, 42C99

doi: 10.1360/N012018-00151