

奇异辛矩阵集的结构*

龙以明

(南开大学南开数学研究所, 天津 300071)

摘 要

称一个辛矩阵 M 是奇异的, 如果 $\det(M - I) = 0$. 本文研究奇异辛矩阵集的结构, 讨论在旋转扰动下奇异辛矩阵与恒同矩阵之差的零空间的维数和其行列式的改变. 本文的结果将被用于定义辛群中的(退化)道路的 Maslov 型指标, 从而建立渐近线性 Hamilton 系统的周期解的存在性.

关键词: 奇异辛矩阵, 旋转扰动方法, 零空间的维数, 行列式, 道路连通性

我们称一个辛矩阵 M 是奇异的, 若 1 是 M 之一特征值, 即 $\det(M - I) = 0$, 否则称它为正则的. 在本文中我们讨论奇异辛矩阵集的结构. 这里得到的结果将在文献[1]中用来给出辛群中的退化道路(即终点为奇异辛矩阵的道路)的 Maslov 型指标的定义, 进而给出具对称周期连续系数的线性 Hamilton 系统的完整分类, 和讨论渐近线性 Hamilton 系统的周期解的存在性.

对 $N \in \mathbb{N}$, 我们定义

$$Sp(N, \mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2N}) \mid M^T J M = J\}$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I 是恒等矩阵. 记 $W = Sp(N, \mathbb{R})$. 定义辛群中的正则集和奇异集分别为

$$W^* = \{M \in W \mid \det(M - I) \neq 0\}, \quad W^0 = \{M \in W \mid \det(M - I) = 0\}.$$

对 $1 \leq n \leq N$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 定义 $2N \times 2N$ 矩阵 $R_n(\theta) = (r_{ij})$ 为

$$\begin{cases} r_{n,n} = r_{N+n,N+n} = \cos \theta, \\ r_{N+n,n} = -r_{n,N+n} = \sin \theta, \\ r_{k,k} = 1, & \text{若 } k \neq n, N+n, \\ r_{i,j} = 0, & \text{其它情形.} \end{cases} \quad (1)$$

我们的主要结果是

定理 1. 若 $M \in W^0$, 则存在 n , $1 \leq n \leq N$ 和 $\theta_0 > 0$, 使得

$$\dim \ker(M - I) - \dim \ker(M R_n(\theta) - I) = 1 \text{ 或 } 2, \text{ 若 } 0 < |\theta| \leq \theta_0. \quad (2)$$

定理 2. 若 $M \in W^0$, $\dim \ker(M - I) = 1$, 且存在 n , $1 \leq n \leq N$ 和 $\theta_0 > 0$, 使得

本文 1989 年 10 月 24 日收到, 1990 年 4 月 9 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

$$\dimker(M - I) - \dimker(MR_n(\theta) - I) = 1, \text{ 当 } 0 < |\theta| \leq \theta_0, \quad (3)$$

则成立

$$\det(MR_n(\theta) - I)\det(MR_n(-\theta) - I) < 0, \text{ 当 } 0 < |\theta| \leq \theta_0. \quad (4)$$

定理 3. 若 $M \in W^0$, $\dimker(M - I) = 2$, 且存在 n , $1 \leq n \leq N$ 和 $\theta_0 > 0$, 使得

$$\dimker(M - I) - \dimker(MR_n(\theta) - I) = 2, \text{ 当 } 0 < |\theta| \leq \theta_0, \quad (5)$$

则 $M - I$ 的特征零的代数重数与几何重数相同, 并且成立

$$\det(MR_n(\theta) - I) = 0 \text{ 当且仅当 } \theta = 0 \pmod{2\pi}. \quad (6)$$

定理 1 将在文献[1]中被用于把 $\dimker(M - I)$ 较大的情形约化为 $\dimker(M - I) = 1$ 或 2 的情形. 由于 W^* 仅包含两个道路连通分支 $W^+ = \{M \in W^* | \det(M - I) < 0\}$ 和 $W^- = \{M \in W^* | \det(M - I) > 0\}$, 定理 2 指出在那里的条件下, 当 $0 < \theta \leq \theta_0$ 时 $MR_n(\theta)$ 与 $MR_n(-\theta)$ 分别属于 W^* 的不同道路连通分支, 定理 3 指出在那里的条件下, 当 $0 < \theta < 2\pi$ 时 $MR_n(\theta)$ 属于 W^* 的同道路连通分支.

一、 $Sp(1, \mathbb{R})$ 的奇异集的结构

记 $W = Sp(1, \mathbb{R})$. 如所周知, $M \in W$ 当且仅当 $\det M = 1$. 通过 W 中元的极分解式

$$\begin{pmatrix} r & z \\ z & (1+z^2)/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

我们可以建立 W 中元与 $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}$ 间的一一对应, 其中 $\mathbb{R}^+ = \{r > 0\}$, $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z} - \pi)$. 在此表示下我们有

$$W = W^* \cup W^0, \quad W^* = W^+ \cup W^-, \quad W^0 = W_1^0 \cup W_2^0.$$

其中

$$W^+ = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R} | (r^2 + z^2 + 1)\cos \theta > 2r\}$$

$$W^0 = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R} | (r^2 + z^2 + 1)\cos \theta = 2r\}$$

$$W^- = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R} | (r^2 + z^2 + 1)\cos \theta < 2r\}$$

$$W_1^0 = \{(r, \theta, z) \in W^0 | \sin \theta \neq 0\}, \quad W_2^0 = \{I\}.$$

这里 W^+ 与 W^- 为正则集 W^* 的二道路连通成分. W_1^0 包含两个连通分支, 它们为微分同胚于 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 的二光滑曲面, 分别依 $\sin \theta > 0$ 与 $\sin \theta < 0$ 来确定. 我们有 $\dimker(M - I) = 1$ 对每个 $M \in W_1^0$ 成立. 恒等矩阵 I 是唯一满足 $\dimker(M - I) = 2$ 的 2×2 辛矩阵. 视 (r, θ, z) 为 $\mathbb{R}^3$ 中的柱坐标, 立得 W^0 之图象(图 1). 图 1 提示了本文所要证明的结果.

定义 W 中的旋转矩阵为

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \theta \in \mathbb{R}.$$

通过直接计算我们得到

命题 1. 1°. 若 $M = I$, 则成立

$$\det(MR(\theta) - I) = 2(1 - \cos \theta), \text{ 对所有 } \theta \in \mathbb{R}$$

和 $\dimker(M - I) - \dimker(MR(\theta) - I) = 2$, 只要 $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

2° 若 $M \in W_1^0$, 则存在 $\theta_0 > 0$, 使得

$$\dimker(M - I) - \dimker(MR(\theta) - I) = 1, \text{ 若 } 0 < |\theta| \leq \theta_0,$$

和 $\det(MR(\theta) - I)\det(MR(-\theta) - I) < 0$, 若 $0 < |\theta| \leq \theta_0$.

证. 只需证 2°. 设 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$, 则由 $\det(M - I) = 0$ 和 $\det M = 1$ 得到 $a + c =$

2 和 $bd = -(a - 1)^2$. 再由 $M \neq I$ 即得 $b \neq$

d . 由直接计算有

$$\det(MR(\theta) - I) = 2(1 - \cos\theta) + (d - b)\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

再由 $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \cos\theta)/\sin\theta = 0$, 即得证.

二、当 $N \geq 2$ 时 $Sp(N, \mathbb{R})$ 的奇异集的结构

记 $W = Sp(N, \mathbb{R})$, $N \geq 2$. 在本节中对任意奇异辛矩阵 M , 我们讨论在由(1)式所定义的旋转矩阵 $R_n(\theta)$ 作用下, $M - I$ 的零空间的维数和行列式的变化.

命题 2. 若 $M \in W^0$, 则对 $1 \leq n \leq N$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$ 成立

$$\dim \ker(M - I) - \dim \ker(MR_n(\theta) - I) \leq 2. \quad (7)$$

证. 设 $m = \dim \ker(M - I)$. 若 $m \leq 2$ 则(7)式自然成立. 现设 $m \geq 3$, 并设 $\{a_1, \dots, a_m\}$ 为 $\ker(M - I)$ 之一基. 固定 $n \in \{1, \dots, N\}$, 不妨设对 $3 \leq k \leq m$, a_k 之第 n 和第 $N + n$ 个分量皆为零. 从而对 $3 \leq k \leq m$ 成立 $(MR_n(\theta) - I)a_k = (M - I)a_k = 0$, 即有 $\dim \ker(MR_n(\theta) - I) \geq m - 2$. 证毕.

注. 可以证明当 $|\theta|$ 足够小时, 对 $1 \leq n \leq N$, (7)式左端恒为非负.

命题 3. 若 $M \in W^0$, 并且 $M - I$ 有一个属于特征值零的 m 维循环子空间 V , 其中 $2 \leq m \leq 2N$, 则存在 n , $1 \leq n \leq N$ 和 $\theta_0 > 0$, 使得

$$\dim \ker(M - I) - \dim \ker(MR_n(\theta) - I) \geq 1, \quad \text{若 } 0 < |\theta| \leq \theta_0. \quad (8)$$

证. 证明分几步来完成.

第一步 设 $\{a_1, \dots, a_m\}$ 为 V 之一基, 使对 $1 \leq k \leq m$ 成立 $(M - I)a_k = a_{k-1}$, 其中 $a_0 = 0$. 选取向量 $b_1, \dots, b_p$ 和 $d_1, \dots, d_q$, 使得 $\{a_1, b_1, \dots, b_p\}$ 构成 $\ker(M - I)$ 之一基, 对 $1 \leq k \leq q$ 成立 $(M - I)d_k \in \text{span}\{b_1, \dots, b_p, d_1, \dots, d_q\}$, 而且 $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_p, d_1, \dots, d_q\}$ 构成 $\mathbb{R}^{2N}$ 之一基. 这里 $p = \dim \ker(M - I) - 1$, $m + p + q = 2N$. 按照 $M - I$ 的最小多项式在域 $\mathbb{R}$ 上的不可约分解, $\mathbb{R}^{2N}$ 可以分解为 $M - I$ 的不变子空间的直和, 这些不变子空间又可分解为 $M - I$ 的循环子空间的直和. 上述要求可以通过选取这些 b_k 和 d_k 使它们分别构成 $M - I$ 的除 V 外的这些循环子空间的基来实现. 对 $1 \leq k \leq q$, 记 $e_k = (M - I)d_k$, 则 $\{a_1, \dots, a_{m-1}, e_1, \dots, e_q\}$ 线性无关.

不失一般性可设

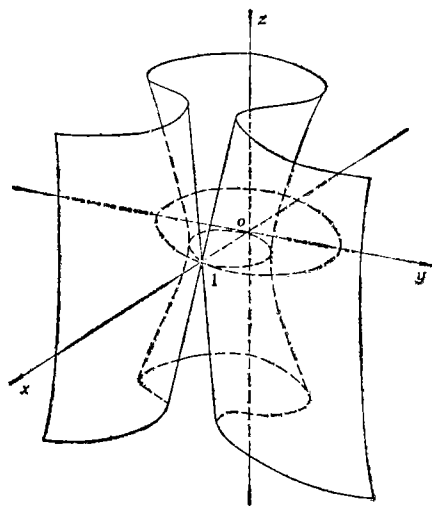


图1 W^0 在 $\mathbb{R}^3$ 中的 (r, θ, z) 柱坐标表示
($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)

$$\begin{cases} a_1 = (1, a_{2,1}, \dots, a_{2N,1})^T, \\ a_k = (0, a_{2,k}, \dots, a_{2N,k})^T, \quad 2 \leq k \leq m, \\ b_k = (0, b_{2,k}, \dots, b_{2N,k})^T, \quad 1 \leq k \leq p, \\ d_k = (0, d_{2,k}, \dots, d_{2N,k})^T, \quad 1 \leq k \leq q. \end{cases} \quad (9)$$

对 $1 \leq k \leq q$, $e_k = (M - I)d_k$ 是 $\{b_1, \dots, b_p, d_1, \dots, d_q\}$ 的线性组合, 从而其第一个分量也必为零, 即

$$e_k = (0, e_{2,k}, \dots, e_{2N,k})^T, \quad 1 \leq k \leq q. \quad (10)$$

记 $A = (a_1, \dots, a_m)$ 为以 $\{a_1, \dots, a_m\}$ 为列向量所定义的矩阵. 令 $B = (b_1, \dots, b_p)$, $D = (d_1, \dots, d_q)$, $E = (e_1, \dots, e_q)$, 以及 $A_0 = (0, a_1, \dots, a_{m-1})$. 则我们有

$$(M - I)(A, B, D) = (A_0, O, E), \quad (11)$$

其中 O 是零矩阵, (A, B, D) 是由 A, B 与 D 构成的 $2N \times 2N$ 矩阵. 所以

$$M = (A + A_0, B, D + E)(A, B, D)^{-1}.$$

再由辛矩阵的定义, $M^T J M = J$, 我们得到

$$(A + A_0, B, D + E)^T J (A + A_0, B, D + E) = (A, B, D)^T J (A, B, D),$$

从而有

$$A^T J A_0 + A_0^T J (A + A_0) = 0 \quad \text{和} \quad A^T J E + A_0^T J (D + E) = 0.$$

注意到 A_0^T 之第一行为零, A^T 之第一行为 a_1^T , 即得到

$$a_1^T J A_0 = 0 \quad \text{和} \quad a_1^T J E = 0.$$

从而

$$a_{N+1,j} = \sum_{k=2}^N [a_{N+k,1} a_{k,j} - a_{k,1} a_{N+k,j}], \quad 2 \leq j \leq m-1. \quad (12)$$

$$e_{N+1,j} = \sum_{k=1}^N (a_{N+k,1} e_{k,j} - a_{k,1} e_{N+k,j}), \quad 1 \leq j \leq q. \quad (13)$$

我们指出 $(2N-2) \times (m+q-2)$ 阶矩阵

$$H = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,m-1} & e_{2,1} & \cdots & e_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,2} & \cdots & a_{N,m-1} & e_{N,1} & \cdots & e_{N,q} \\ a_{N+2,2} & \cdots & a_{N+2,m-1} & e_{N+2,1} & \cdots & e_{N+2,q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2N,2} & \cdots & a_{2N,m-1} & e_{2N,1} & \cdots & e_{2N,q} \end{pmatrix} \quad (14)$$

具有至少一个非零的 $(m+q-2) \times (m+q-2)$ 阶子行列式. 事实上若不然, 则由(12)与(13)式知 $\{a_2, \dots, a_{m-1}, e_1, \dots, e_q\}$ 为线性相关, 所以由(11)式得到下述矛盾

$$m+q-1 \leq \text{rank}(M - I)(A, B, D) = \text{rank}(A_0, O, E) \leq m+q-2.$$

因此可设

$$G = \det \begin{pmatrix} a_{k_1,2} & \cdots & a_{k_1,m-1} & e_{k_1,1} & \cdots & e_{k_1,q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k_h,2} & \cdots & a_{k_h,m-1} & e_{k_h,1} & \cdots & e_{k_h,q} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

给出 H 之一非零子行列式, 其中 $h = m+q-2$, $\{k_1, \dots, k_h\}$ 为 $\{2, \dots, N, N+2, \dots,$

$2N\}$ 之一子列.

第二步 对 $\theta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}(MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)A &= (M - I)A + (I - R_1(-\theta))A \\ &= A_0 + (I - R_1(-\theta))A,\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}(MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)D &= (M - I)D + (I - R_1(-\theta))D \\ &= E + (I - R_1(-\theta))D.\end{aligned}\quad (17)$$

定义 $2N \times (m + q)$ 阶矩阵

$$Q_1(\theta) = (A_0 + (I - R_1(-\theta))A, E + (I - R_1(-\theta))D), \theta \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

利用(12)与(13)式对 $k = 2, \dots, N$ 顺次把 $Q_1(\theta)$ 的第 k 行的一 $a_{N+k,1}$ 倍和第 $N + k$ 行的 $a_{k,1}$ 倍加至其第 $N + 1$ 行, 再把所得矩阵的第 $N + 1$ 行换至第 2 行, 考虑这样得到的矩阵的下述 $(m + q) \times (m + q)$ 阶子矩阵 $P(\theta)$.

$$P(\theta)^T = \begin{pmatrix} 1 - c - a_{N+1,1}s & s + a_{N+1,1}(1 - c) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 - a_{N+1,2}s & a_{N+1,1} + a_{N+1,2}(1 - c) & a_{k,1} & \cdots & a_{k,h,1} \\ -a_{N+1,3}s & a_{N+1,3}(1 - c) & a_{k,2} & \cdots & a_{k,h,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{N+1,m}s & a_{N+1,m}(1 - c) & a_{k,1,m-1} & \cdots & a_{k,h,m-1} \\ -d_{N+1,1}s & d_{N+1,1}(1 - c) & e_{k,1} & \cdots & e_{k,h,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -d_{N+1,q}s & d_{N+1,q}(1 - c) & e_{k,1,q} & \cdots & e_{k,h,q} \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中 $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, $\{k_1, \dots, k_h\}$ 由(15)式确定. 我们得到

$$\begin{aligned}\det P(\theta) &= (1 - c - a_{N+1,1}s)[(a_{N+1,1} + a_{N+1,2}(1 - c))G + o(1)] \\ &\quad - (s + a_{N+1,1}(1 - c))[(1 - a_{N+1,2}s)G + o(1)] \\ &= [-(1 + a_{N+1,1}^2)G + o(1)] \sin \theta.\end{aligned}$$

其中我们记 $B(\theta) = o(1)$ 若 $\lim_{\theta \rightarrow 0} B(\theta) = 0$, 并且利用了 $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \cos \theta) / \sin \theta = 0$. 由(15)式, $G \neq 0$, 从而存在 $\theta_1 > 0$ 使得当 $0 < |\theta| \leq \theta_1$ 时 $\det P(\theta) \neq 0$. 所以当 $0 < |\theta| \leq \theta_1$ 时, $Q_1(\theta)$ 的列向量构成线性无关组.

第三步 由于 (A, D) 的列向量线性无关, 存在 θ_0 , $0 < \theta_0 \leq \theta_1$, 使当 $0 < |\theta| \leq \theta_0$ 时 $(R_1(-\theta)A, R_1(-\theta)D)$ 之列向量仍线性无关. 定义

$$F(\theta) = \text{span}\{R_1(-\theta)a_1, \dots, R_1(-\theta)a_m, R_1(-\theta)d_1, \dots, R_1(-\theta)d_q\}.$$

若对 $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq q$ 成立

$$(MR_1(\theta) - I) \left[\sum_{j=1}^m \alpha_j R_1(-\theta)a_j + \sum_{k=1}^q \beta_k R_1(-\theta)d_k \right] = 0,$$

则
$$\sum_{j=1}^m \alpha_j (MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)a_j + \sum_{k=1}^q \beta_k (MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)d_k = 0.$$

由第二步知当 $0 < |\theta| \leq \theta_0$ 时 $Q_1(\theta)$ 之列向量线性无关, 从而对 $1 \leq j \leq m$ 和 $1 \leq k \leq q$ 成立 $\alpha_j = \beta_k = 0$. 这就给出

$$F(\theta) \cap \ker(MR_1(\theta) - I) = \{0\}, \text{ 若 } 0 < |\theta| \leq \theta_0. \quad (20)$$

所以

$$\dim \ker(MR_1(\theta) - I) \leq 2N - (m + q), \text{ 若 } 0 < |\theta| \leq \theta_0.$$

而 $\dim \ker(M - I) = P + 1 = 2N - (m + q) + 1$, 这就证明了(8)式.

下面我们给出

定理 2 的证明. 设 $N \geq 2$. 设 a_1 为 $M - I$ 的属于特征零的特征向量. 由条件(3), a_1 的第 n 和第 $N + n$ 个分量之一必为非零. 由于这两种情形的证明是相同的, 不妨设其第 n 个分量非零. 不失一般性可设 $n = 1$. 从而我们可以使用命题 3 证明中的记号. 注意此时 $p = 0$, $m + q = 2N$. 如在命题 3 中所证, 由(14)式定义的 $(2N - 2) \times (2N - 2)$ 阶矩阵 H 满足

$$\det H \cong 0. \quad (21)$$

与命题 3 证明的第二步中关于 $\det P(\theta)$ 的计算相同, 我们得到

$$\begin{aligned} \det Q_1(\theta) &= (-1)^{N-1} \{ (1 - \cos \theta - a_{N+1,1} \sin \theta) [(a_{N+1,1} \\ &\quad + a_{N+1,2}(1 - \cos \theta) \det H + o(1)) \\ &\quad - (\sin \theta + a_{N+1,1}(1 - \cos \theta)) [(1 - a_{N+1,2} \sin \theta) \det H + o(1)] \} \\ &= [(-1)^N (1 + a_{N+1,1}^2) \det H + o(1)] \sin \theta \end{aligned}$$

从而存在 $\theta_1 > 0$ 使得

$$\det Q_1(\theta) \det Q_1(-\theta) < 0, \text{ 若 } 0 < |\theta| \leq \theta_1. \quad (22)$$

再利用(3)式即知(22)式当 $0 < |\theta| \leq \theta_0$ 时也成立. 由于

$$(MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)(A, D) = Q_1(\theta),$$

我们有当 $0 < |\theta| \leq \theta_0$ 时

$$\det(MR_1(\theta) - I) \det(MR_1(-\theta) - I) [\det(A, D)]^2 = \det Q_1(\theta) \det Q_1(-\theta) < 0.$$

注意到 $\det(A, D) \cong 0$, 这就对 $N \geq 2$ 的情形得到了(4)式. 与命题 1 结合就对 $N \geq 1$ 的情形证明了定理 2.

命题 4. 若 $M \in W^0$, 并且 $M - I$ 的特征零的代数重数与几何重数相同, 则存在 n , $1 \leq n \leq N$, 使得

$$\dim \ker(M - I) - \dim \ker(MR_n(\theta) - I) = 2, \text{ 若 } \theta \cong 0 \pmod{2\pi}. \quad (23)$$

证. 设 $p = \dim \ker(M - I)$, 则 p 为偶数, 从而 $p \geq 2$. 记 $q = 2N - p$. 设 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 为 $\ker(M - I)$ 之一基. 如我们在命题 3 证明开始时所指出的, 可以选取向量 $\{d_1, \dots, d_q\}$, 使对 $1 \leq k \leq q$ 有 $(M - I)d_k \in \text{span}\{d_1, \dots, d_q\}$ 并且 $\{a_1, \dots, a_p, d_1, \dots, d_q\}$ 构成 $\mathbb{R}^{2N}$ 之一基. 对 $1 \leq k \leq q$, 令 $e_k = (M - I)d_k$.

不失一般性可设

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, a_{2,1}, \dots, a_{2N,1})^T, \\ a_k &= (0, a_{2,k}, \dots, a_{2N,k})^T, \quad 2 \leq k \leq p, \\ d_k &= (0, d_{2,k}, \dots, d_{2N,k})^T, \quad 1 \leq k \leq q. \end{aligned}$$

由于对 $1 \leq k \leq q$ 有 $e_k = (M - I)d_k \in \text{span}\{d_1, \dots, d_q\}$, 我们得到

$$e_k = (0, e_{2,k}, \dots, e_{2N,k})^T, \quad 1 \leq k \leq q.$$

记 $A = (a_1, \dots, a_p)$, $D = (d_1, \dots, d_q)$ 和 $E = (e_1, \dots, e_q)$. 由于 $q \leq \text{rank}(M - I)$

$\langle A, D \rangle = \text{rank}(O, E)$, $\{e_1, \dots, e_q\}$ 线性无关.

我们首先证明

断言: 对 $2 \leq k \leq p$, $a_{N+1,k}$ 不全为零.

事实上若不然, 即对所有 $2 \leq k \leq p$ 有 $a_{N+1,k} = 0$, 则可设 $\{k_2, \dots, k_p\}$ 为 $\{2, \dots, N, N+2, \dots, 2N\}$ 之一单增子列使得对 $2 \leq i \leq p$ 成立 $a_{k_i, i} = 1$. 由此可设

$$d_{k_i, i} = a_{k_i, m} = 0, \quad 2 \leq i \leq p, \quad 1 \leq m \leq p, \quad i \neq m \text{ 并且 } 1 \leq j \leq q.$$

因对 $1 \leq j \leq q$ 有 $e_j \in \text{span}\{d_1, \dots, d_q\}$, 我们有

$$e_{k_i, j} = 0, \quad 2 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q.$$

记由 $\{2, \dots, 2N\}$ 中删去 $\{k_2, \dots, k_p\}$ 后余下的单增子列为 $\{h_1, \dots, h_q\}$, 则存在 i , $1 \leq i \leq q$, 使 $h_i = N+1$. 记

$$E_0 = \begin{pmatrix} e_{h_1, 1} & \cdots & e_{h_1, q} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{h_q, 1} & \cdots & e_{h_q, q} \end{pmatrix}$$

由于 $\{e_1, \dots, e_q\}$ 线性无关, 我们有 $\det E_0 \neq 0$.

由 $(M-I)(A, D) = (O, E)$, 类似于(13)式的讨论我们得到 $a_i^T J E = 0$, 即

$$(a_{N+1, 1}, \dots, a_{2N, 1}, -1, -a_{2, 1}, \dots, -a_{N, 1})E = 0.$$

由于 $\det E_0 \neq 0$, 对 $1 \leq j \leq q$, $a_i^T J$ 的第 h_i 个分量必都为零. 由于 $h_i = N+1$, 这给出 $-1=0$. 矛盾. 这就证明了断言.

由此断言可设 $a_{N+1, 2} = 1$, $a_{N+1, k} = d_{N+1, i} = 0$, 因而 $e_{N+1, i} = 0$, 其中 $1 \leq k \leq p$, $k \neq 2$, $1 \leq j \leq q$. 从而对 $\theta \in \mathbb{R}$ 有

$$(MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)a_k = (I - R_1(-\theta))a_k, \quad k = 1, 2,$$

$$(MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)a_k = (M - I)a_k = 0, \quad 3 \leq k \leq p,$$

$$(MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)d_k = (M - I)d_k = e_k, \quad 1 \leq k \leq q.$$

由于 $\det[R_1(-\theta)(A, D)] = \det(A, D) \neq 0$, 这就给出

$$\dim \ker(MR_1(\theta) - I) \geq p-2, \quad \text{对任意 } \theta \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

定义 $2N \times (q+2)$ 阶矩阵 $Q_1(\theta) = ((I - R_1(-\theta))a_1, (I - R_1(-\theta))a_2, E)$, 则

$$Q_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1-c & -s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e_{2,1} & \cdots & e_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & e_{N,1} & \cdots & e_{N,q} \\ s & 1-c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e_{N+2,1} & \cdots & e_{N+1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & e_{2N,1} & \cdots & e_{2N,q} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

其中 $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. 由于 $\{e_1, \dots, e_q\}$ 线性无关, 而

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = 2(1 - \cos \theta) \neq 0 \text{ 若 } \theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

从而 $Q_1(\theta)$ 之列向量当 $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ 时线性无关. 类似于命题 3 第三步的证明, 这就给出

$$\dim \ker(MR_1(\theta) - I) \leq p - 2, \text{ 若 } \theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}. \quad (26)$$

与(24)式联立, 即得(23)式. 证毕.

重复应用命题 2, 3 和 4 即给出定理 1 的当 $N \geq 2$ 时的证明, 再由命题 1 即对 $N \geq 1$ 的情形证明了定理 1.

下面我们给出

定理 3 的证明. 分两步来证.

第一步 假设 $M - I$ 的特征零的代数重数大于其几何重数.

设 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 与 $\{b_1, \dots, b_q\}$ 分别构成 $M - I$ 的属于特征零的二相异循环子空间的基, 使得

$$\begin{aligned} (M - I)a_k &= a_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq p, \quad a_0 = 0, \\ (M - I)b_k &= b_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq q, \quad b_0 = 0. \end{aligned}$$

设 $p \geq 2, q \geq 1$. 令 $m = 2N - p - q$. 如我们在命题 3 证明开始时所指出的, 可以选取向量 $\{d_1, \dots, d_m\}$, 使得 $(M - I)d_k \in \text{span}\{d_1, \dots, d_m\}$ 对 $1 \leq k \leq m$ 成立, 并且 $\{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, d_1, \dots, d_m\}$ 构成 $\mathbb{R}^{2N}$ 之一基. 对 $1 \leq k \leq q$, 记 $e_k = (M - I)d_k$.

不失一般性可设(5)式中的 $n = 1$. 记 $a_k = (a_{1,k}, \dots, a_{2N,k})^T \in \mathbb{R}^{2N}$. 类似于(9), (10)式, 并注意到(5)式, 如同我们在定理 2 的证明开始时指出的那样, 可设

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 1, \quad a_{N+1,1} = 0, \quad b_{1,1} = 0, \quad b_{N+1,1} = 1, \\ a_{1,k} &= a_{N+1,k} = b_{1,j} = b_{N+1,j} = d_{1,i} = d_{N+1,i} = e_{1,i} = e_{N+1,i} = 0, \end{aligned}$$

其中 $2 \leq k \leq p, 2 \leq j \leq q, 1 \leq i \leq m$.

定义 $A = (a_1, \dots, a_p), B = (b_1, \dots, b_q), D = (d_1, \dots, d_m), A_0 = (0, a_1, \dots, a_{p-1}), B_0 = (0, b_1, \dots, b_{q-1})$ 和 $E = (e_1, \dots, e_m)$. 类似于(12)式的讨论, 由 $(M - I)(A, B, D) = (A_0, B_0, E)$, 我们得到

$$a_1^T J A_0 = 0, \quad a_1^T J B_0 = 0 \text{ 和 } a_1^T J E = 0.$$

从而

$$\sum_{k=2}^N (a_{N+k,1} a_{k,j} - a_{k,1} a_{N+k,j}) = 0, \quad 1 \leq j \leq p-1, \quad (27)$$

$$\sum_{k=2}^N (a_{N+k,1} b_{k,j} - a_{k,1} b_{N+k,j}) = 0, \quad 1 \leq j \leq q-1, \quad (28)$$

$$\sum_{k=2}^N (a_{N+k,1} e_{k,j} - a_{k,1} e_{N+k,j}) = 0, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (29)$$

定义 $Q_1(\theta) = (MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)(A, B, D)$, $\theta \in \mathbb{R}$. 则类似于(25)式的情形有

$$\det Q_1(\theta) = (-1)^{N+p} 2(1 - \cos \theta) \det F,$$

其中 F 为 $(2N-2) \times (2N-2)$ 阶矩阵

$$F = \begin{pmatrix} a_{2,1} & \cdots & a_{2,p-1} & b_{2,1} & \cdots & b_{2,q-1} & e_{2,1} & \cdots & e_{2,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,p-1} & b_{N,1} & \cdots & b_{N,q-1} & e_{N,1} & \cdots & e_{N,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N+2,1} & \cdots & a_{N+2,p-1} & b_{N+2,1} & \cdots & b_{N+2,q-1} & e_{N+2,1} & \cdots & e_{N+2,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2N,1} & \cdots & a_{2N,p-1} & b_{2N,1} & \cdots & b_{2N,q-1} & e_{2N,1} & \cdots & e_{2N,m} \end{pmatrix}.$$

由(27),(28)和(29)式知 $\det F = 0$, 从而 $\det Q_1(\theta) = 0$ 对 $\theta \in \mathbf{R}$ 成立. 再由 $Q_1(\theta)$ 的定义和 $\det R_1(-\theta) = 1$, $\det(A, B, D) \neq 0$, 即得对任意 $\theta \in \mathbf{R}$ 有

$$\det(MR_1(\theta) - I) = 0.$$

这与(5)式矛盾. 从而证明了 $p = 1$. 在上述证明中若 $q = 1$, 则 $B_0 = 0$, 同时删去(28)式和矩阵 F 中关于 b_k 的块, 同样的证明仍给出 $p = 1$. 同理我们得到 $q = 1$. 即 $M - I$ 的特征零的代数重数与几何重数相同.

第二步 第一步的证明已把 M 归结为命题 4 的情形, 其中 $p = 2$. 从而由(25)式依那里的记号, 得到对 $Q_1(\theta) = (MR_1(\theta) - I)R_1(-\theta)(A, D)$ 成立

$$\det Q_1(\theta) = (-1)^{N/2}(1 - \cos \theta) \det E_0, \quad \theta \in \mathbf{R},$$

其中 E_0 为由矩阵 E 中删去第 1 行和第 $N + 1$ 行后所余的 $(2N - 2) \times (2N - 2)$ 阶矩阵.

因 $\text{rank } E = 2N - 2$, $\det E_0 \neq 0$. 由于 $\det R_1(-\theta) = 1$, $\det(A, D) \neq 0$, 我们得到对任意 $\theta \in \mathbf{R}$, $\det(MR_1(\theta) - I) = (-1)^{N/2}(1 - \cos \theta) \det E_0 / \det(A, D)$. 这就给出了(6)式. 定理 3 得证.

参 考 文 献

- [1] 龙以明, 中国科学 A 辑, 1990, 7:673-682.