



论文

卫星导航观测方程双曲面交会解

施泮立^{①②*}, 杜晓辉^{①②}, 耿建平^③, 刘成^{①②}

① 中国科学院国家天文台, 北京 100012;

② 中国科学院研究生院, 北京 100049;

③ 桂林电子科技大学, 桂林 541004

* E-mail: shl@nao.cas.cn

收稿日期: 2010-02-05; 接受日期: 2010-05-26

国家重点基础研究发展计划资助项目(编号: 2007CB815500)

摘要 本文探索了卫星定位中观测方程的建立方法及求解算法, 即探讨了若把卫星定位中的观测方程从球面方程的交点变换成求双曲面方程的交点后的差异和对定位解的影响. 文中结合转发式卫星定位系统的具体应用, 提出和推导了转换求解的方法. 并通过几何放大因子 DOP 和测站三维位置坐标单点解分布图的仿真分析, 验证了双曲面交会解的可行性, 也揭示了其长处和优势. 最后, 通过对中国区域定位系统 CAPS(China Area Positioning System)定位解的实验, 证实了观测方程双曲面解的实用性.

关键词 卫星定位, 双曲面解, 球面解

PACS: 91.10.Fc, 91.10.Sp, 91.10.Ws

卫星定位观测方程组至少需要有四个以上卫星位置为球心, 以观测伪距为半径的球方程组成, 即

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + ct = \rho_i \quad (1)$$

$(i = 1, 2, 3, 4),$

其中, x_i, y_i, z_i 为第 i 颗卫星轨位在地心地固坐标系中的三维坐标分量; x, y, z 指用户位置在地心地固坐标系中的三维坐标分量; ρ_i 为第 i 颗卫星与用户之间的观测伪距; c 为光速; t 为用户接收机时钟偏差.

上述方程组的单点解就是用户位置的三维坐标分量 (x, y, z) 和接收机时钟偏差 t ^[1-3]. 从几何学的角度来理解, 就是以卫星位置为球心, 以伪距为半径的多个球面方程的交点, 也称为球方程组的解, 其解的几何示意图见图 1.

从方程(1)可见, 在球面方程求解中, 观测量为

卫星轨位坐标和伪距长, 其中伪距长是通过测量信号从卫星发射天线相位中心发出的时刻 T_i^s , 与到达接收机天线相位中心的时刻 T_u 后, 求得两个时刻的时间差获得的, 即

$$\rho_i = c \cdot (T_u - T_i^s). \quad (2)$$

(2)式中的时间差测量是绝对测量, 故要求卫星时钟不但应有高的时间稳定度, 而且还应有高的时间准确性. 这给设备的配置带来困难. 为此在方程组(1)中, 设置了接收机时钟偏差 t , 并作未知数进入了方程, 这样只要增加了一颗卫星, 多一组方程, 就可以降低对接收机端时频基准高性能的要求. 方程(1)的解为相容解, 并可以得到接收端的时钟偏差. 但是还存在对卫星发射端时频基准的稳定度和准确度的高要求. 为此, 本文希望通过探讨测量方程形式的改变来减轻对卫星时频基准的压力. 方法是希望在接收

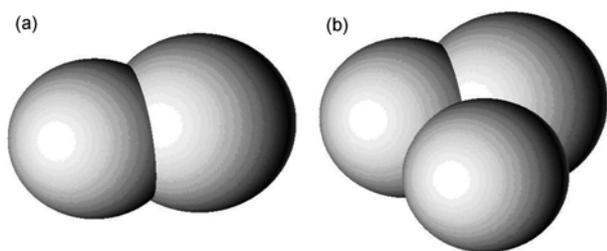


图1 球面方程求解几何示意图

(a) 两个球面相交得到一个圆; (b) 第三个球与圆相交得到两个交点

机中直接采用时延差测量求得伪距差的做法, 这样可以不要求时频基准绝对时间的准确性, 而只要求多个卫星时频基准间的同步精度即可.

1 观测方程的变换

可以把方程组(1)作变换, 即将其他每个方程与某一个方程相减, 现假定选与第一个方程相减, 则成为如下方程组^[2,4]:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \\ & - \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = \Delta\rho_{i1}, \\ & (i = 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\Delta\rho_{i1} = \rho_i - \rho_1$, 为第 i 条伪距与第 1 条伪距之差为测量量. 方程组(3)是以两颗卫星为焦点, 以伪距 ρ_i 和 ρ_1 为焦点半径的双曲面方程组, 其交点同样为卫星定位位置单点解, 其位置单点解的几何示意图见图 2. 从方程组(3)中可知四颗卫星的四个观测方程经变换成为三个方程, 方程式的右端项变成两颗卫星观测伪距之差. 这时, 两段伪距相减后把伪距中所含的在相容解概念下的等长观测偏差相消了, 残留的偏差

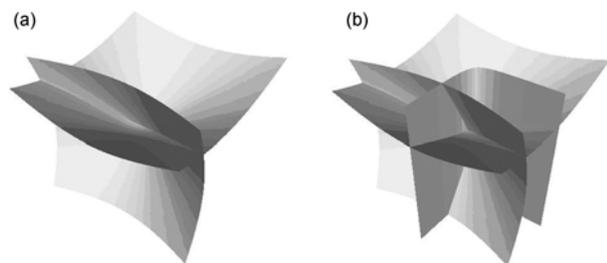


图2 双曲面方程求解几何示意图

(a) 两个双曲面相交得到一条曲线; (b) 第三个双曲面与该曲线相交得到一个交点

会明显地减小, 其中, 卫星转发器时延、接收机时钟偏差和接收电路时延等组合成的等长偏差相消了; 传播路径中电离层时延和对流层时延中等长时延造成伪距的偏差大部分也相消了. 只是由于从接收机观测两颗卫星时, 信号传输路径长短不一样, 路径差所含的那部分的相应偏差没有能消去.

从原理上说, 上式变换为相似变换, 导航定位的双曲面方程组单点位置解与球面方程单点解同解. 但由于对卫星时频要求有所放松, 所以有价值. 另外从求解角度来看, 对求解精度可能也有所帮助. 原因有两个: 第一个原因是在相容解概念下伪距间的等长偏差相消了, 剩下了不等长偏差; 另一个原因是双曲面方程线性化后求解方程的系数矩阵的条件数减小了, 也就是几何精度因子 DOP 减小了. 这时测量量变成为伪距差. 理论上伪距差的误差会增大. 但只要接收机的制作上下功夫, 伪距差的测量误差是可以控制的. 这样, 伪距测量不正确造成的单点解的偏离有可能会减小.

2 双曲面方程组的解法

上述方程组(2)求解时, 经线性化处理, 在迭代解邻域附近展开. 则可得下列法方程

$$\Delta\rho_{iu} = a_{xi1}\Delta x_u + a_{yi1}\Delta y_u + a_{zi1}\Delta z_u, \quad (4)$$

式中, $\Delta\rho_{iu} = \hat{\rho}_{iu} - \rho_{iu}$; a_{xi1} , a_{yi1} , a_{zi1} 各项表示由近似用户位置指向第 i 颗卫星的单位矢量的方向余弦分别减去第 1 颗卫星的单位矢量的方向余弦的差值.

通过对四颗卫星进行距离差后, 由联立方程可求解得到 3 个位置坐标迭代修正值(未知数) Δx_u , Δy_u 和 Δz_u

$$\begin{cases} \Delta\rho_{21u} = a_{x21}\Delta x_u + a_{y21}\Delta y_u + a_{z21}\Delta z_u, \\ \Delta\rho_{31u} = a_{x31}\Delta x_u + a_{y31}\Delta y_u + a_{z31}\Delta z_u, \\ \Delta\rho_{41u} = a_{x41}\Delta x_u + a_{y41}\Delta y_u + a_{z41}\Delta z_u. \end{cases} \quad (5)$$

令

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} \\ a_{x3} & a_{y3} & a_{z3} \\ a_{x4} & a_{y4} & a_{z4} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\Delta\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\Delta \rho_{il} = \begin{bmatrix} \Delta \rho_{2u} - \Delta \rho_{1u} \\ \Delta \rho_{3u} - \Delta \rho_{1u} \\ \Delta \rho_{4u} - \Delta \rho_{1u} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

则式(5)可表示成

$$\Delta \rho = G \Delta X, \quad (9)$$

其解为

$$\Delta X = G^{-1} \Delta \rho. \quad (10)$$

若方程个数多于三个, 也就是卫星多于四颗时, 则可以采用最小二乘法求解, 其单点位置解为

$$\Delta x = (G^T G)^{-1} G^T \Delta \rho, \quad (11)$$

把 Δx 代入位置解迭代格式

$$x = \hat{x} + \Delta x. \quad (12)$$

当 Δx 小于规定的收敛精度 ε 时, 则认为迭代满足收敛条件. 否则把 x 当做 \hat{x} , 再继续迭代, 直至满足收敛条件为止.

3 误差方程探讨

在单点位置解测量模型和解法探讨的基础上. 现推导双曲面观测方程的单点位置交会解在统计意义下的误差方程.

1) 双曲面交会解的误差

由文献[5,6]可知, 位置的协方差按下式计算:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\text{位置}) &= E(\Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}^T) \\ &= (G^T G)^{-1} G^T \cdot E[(\Delta \bar{\rho} \Delta \bar{\rho}^T)] \cdot G (G^T G)^{-1}, \quad (13) \\ n &> 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\text{位置}) &= G^{-1} \cdot E[\Delta \bar{\rho} \cdot \Delta \bar{\rho}^T] \cdot G^{-1}, \quad (14) \\ n &= 4. \end{aligned}$$

如果所有测距偏差在统计意义下得到相同的方差 $[\sigma_r^2] (m^2)$, 而且是不相关的零均值 ($E[\Delta \rho_i \Delta \rho_j] = 0, i \neq j$). 则(13)和(14)式的两个方程可简化成如下的形式:

$$\text{cov}(\text{位置}) = \sigma_r^2 \cdot [G^T G]^{-1}, \quad (15)$$

式中, $[G^T G]^{-1}$ 是伪距偏差在统计意义下造成的方差变换到位置方差时的放大因子矩阵, 常称为几何精度衰减因子, 记作 GDOP. 标量 GDOP 值被定义为 GDOP 矩阵迹的平方根. 为此, 比较双曲面交会解在统计意义下对位置误差的影响, 可以比较 GDOP 的大小.

2) 误差分析与仿真

现以 CAPS(China Area Positioning System)转发式卫星导航定位系统^[4,7,8]为例, 进行双曲面测量定位方程用户位置单点交会解误差的分析与仿真, 并与球面单点位置交会解作比较.

CAPS 第 I 期的空间段有四颗同步轨道卫星组成. 其中二颗是 GEO(Geostationary Satellite Orbit)卫星(A 星和 B 星), 另外二颗为小倾角倾斜同步轨道 SIGEO (Small Geostationary Satellite Orbit)卫星^[9](C 星和 D 星), 卫星的平均轨道点位置为: A 卫星: 87.5°E; B 卫星: 110.5°E; C 卫星: 130.0°E; D 卫星: 142.0°E. 卫星的位置坐标 $S_{i,j} (X, Y, Z)$ 用地心地固直角坐标系(ECEF)给出(单位: m). 其中, 卫星 A 的坐标: ($x=1839175.456869, y=42124043.466548, z=0.000000$); 卫星 B 的坐标: ($x=-14766205.105817, y=39494009.559751, z=0.000000$). 卫星 C 和 D 在倾斜轨道的相位差假定为 120°(即过赤道的时间差约为 8 h), 在仿真中取 GM 为 3.986005×10^{14} , 地球自转角速度 ω 为 $7.2921151467 \times 10^{-5}$ rad/s, WGS-84 椭球长半轴 a 为 6378137 m, 离心率 e 为 0.081819190842622.

仿真分析时, 得出卫星 C 和 D 的 10 种不同的位置坐标. 利用卫星坐标的各种分布, 仿真了 20 组伪距的观测数据. 为处理问题方便, 观测误差项暂时只考虑观测噪声(服从正态分布 $N(0,1)$)和卫星钟差 (10 m).

下面分别用普通球面算法和双曲面算法仿真求得本设计星座布局的 PDOP 值(参见图 3)和测站坐标点的分布(参见图 4).

从图 3 可以看出, 双曲面方程的位置精度因子

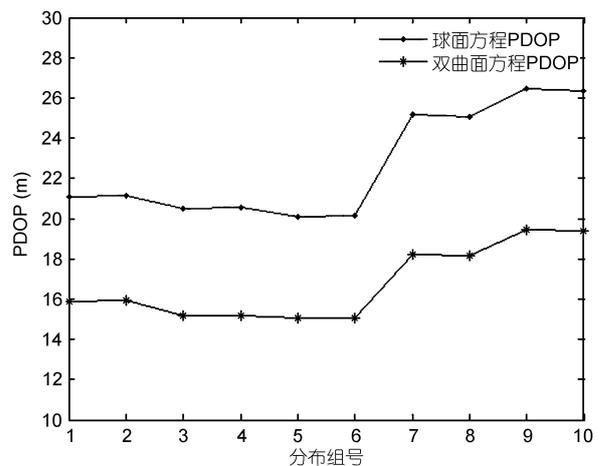


图 3 球面方程和双曲面方程系数矩阵的 PDOP 值对比图

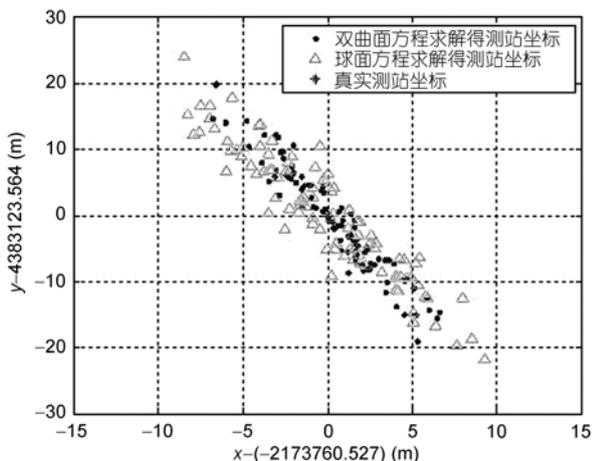


图4 由球面方程求解得到测站坐标和双曲面方程求解得到测站坐标的分布比较图

(PDOP)值比求解普通球面方程的 PDOP 值要减少 30%左右。

从图4中测站坐标点的分布情况可以看出: 双曲面方程求解得到的测站坐标比普通球面方程得到的测站坐标点的分布更加靠近真实测站位置, 约减小 20%左右。

4 星地实验

在 CAPS 星地实验验证时, 采用以下四颗卫星(中卫 1 号 GEO 卫星, 位于 87.5°E; 鑫诺 1 号 GEO 卫星, 位于 110.5°E; 亚太 1 号小倾角同步轨道卫星 SIGSO, 位于 142°E, 亚太 1A 号 IGSO 卫星, 位于 130°E)并辅以气压测高. 接收机求解时, 采用了双曲面求解方法. 经较长时间的连续测试, 得单点位置解的点迹分布图(见图 5). 从图中可见虽然 CAPS 卫星星座的几何分布较差, 但求解结果还确实较好.

5 结论

把卫星导航中的观测方程组从求球面方程的交点变换成求双曲面方程的交点有如下长处:

(1) 消去了观测伪距间接收机时钟和接收机通道时延等造成的等长偏差的影响, 也可以减小电离层和对流层时延等造成的等长偏差的影响, 这样有利于减小伪距偏差对单点位置解精度的影响.

(2) 在转发式卫星导航系统中, 由于观测方程实

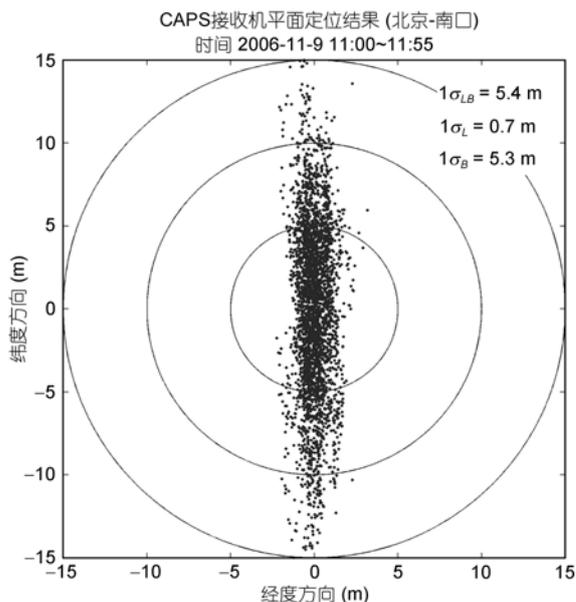


图5 CAPS 星地实验验证单点解迹分布图

际上是椭球方程, 偏差量增大, 所以采用双曲面方程更适合, 可以消去大部分等长偏差量的影响.

(3) 在转发式卫星导航系统中, 发射端时频基准在地面上, 地面原子钟的稳定度高于星载原子钟的稳定度, 而且同源^[10]. 所以更应采用双曲面解法, 这样可以发挥相对精度好的优势.

(4) 双曲面求解模型中, 系数矩阵的条件数小于球面求解模型中系数矩阵的条件数. 这样有可能减小不等长伪距偏差对解精度的影响.

(5) 上述解法收敛快.

(6) 由于双曲面方程组求解时没有求解接收机时钟偏差, 所以给单频授时带来困难, 可以采用通过解方程式(3), 求解得到了用户位置后再求用户到卫星的真距离, 然后除以光速, 得到导航中心站至用户的实际理论传播时间 t_d , 同时还应该正确计算得到各项时延误差值. 这时, 用户接收机时钟偏差为

$$t = t_r - t_d + \Delta T - \tau, \quad (16)$$

其中, t_r 是接收机测量的传播时间; ΔT 是相对 CAPST 时刻之偏差; τ 是电离层和对流层等路径传播时延、转发器时延、接收机电子线路时延引起的附加时延偏差. 根据 (16)式, 同样可以实现精确授时.

(7) 为了实现授时, 也可以采用五颗卫星进行伪距测量求解, 或观测四颗卫星, 并在方程中保留一颗卫星的观测方程的做法, 参见方程组(17):

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 & 1 \\ \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 & \cos \beta_2 - \cos \beta_1 & \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 & 0 \\ \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 & \cos \beta_3 - \cos \beta_1 & \cos \gamma_3 - \cos \gamma_1 & 0 \\ \cos \alpha_4 - \cos \alpha_1 & \cos \beta_4 - \cos \beta_1 & \cos \gamma_4 - \cos \gamma_1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ -c\Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_2 - \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_3 - \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_4 - \Delta \rho_1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

直接求解方程组(17), 便可得 x, y, z 和 t .

(8) 双曲面观测方程的解, 为指导虚拟原子钟^[10]

调整指出了明确的方向, 并提供了调整准则. 这就是观测伪距差 D_{ij} 必须逼近真实几何伪距差 d_{ij} . 其直观几何解释为观测的双曲面必须逼近理论双曲面. 虚拟原子钟的调整可以使所有位置上因虚拟原子钟相对标校不准造成的系统性偏差被消除.

(9) 本文证明双曲面求解方法是可行的. 它与球面方程中设置时钟偏差有异曲同工的效果, 消除了相容解中等长偏差对位移解的影响. 由于理论可行, 可以指导接收机研发, 要求其输出伪距差, 这样可以避免绝对伪距的精确测量, 因为伪距差的测量精度容易保证.

参考文献

- 1 袁建平, 罗建军, 岳晓奎, 等. 卫星导航原理与应用. 北京: 中国宇航出版社, 2003
- 2 施浒立, 裴军. 转发式卫星导航定位系统量测方程解. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 38(12): 1687—1701
- 3 党亚民, 秘金钟, 成英燕. 全球导航卫星系统原理与应用. 北京: 测绘出版社, 2007
- 4 施浒立, 孙希延, 李志刚. 转发式卫星导航原理. 北京: 科学出版社, 2009
- 5 Hofmann W B, Collins L H. Global Positioning System Theory and Practice. 5th ed. New York: Springer Wien, 2002
- 6 Parkinson B W, Spilker J J, Axelrad P, et al. Global Positioning System: Theory and Applications, Vols. I and II. Washington DC: American Institute of Aeronautics and Astuonautics, 1996
- 7 艾国祥, 施浒立, 吴海涛, 等. 基于通信卫星的定位系统原理. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 38(12): 1615—1633
- 8 Ai G X, Shi H L, Wu H T, et al. Satellite communication & positioning system and Chinese Area Positioning System (CAPS). Chin J Astron Astrophys, 2008, 8(6): 611—635
- 9 施浒立, 艾国祥, 韩延本, 等. 退役卫星的多生命周期利用. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 38(12): 1731—1737
- 10 李孝辉, 吴海涛, 边玉敬, 等. 内含伪距差功能的虚拟卫星原子钟. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 38(12): 1723—1730

Hyperboloidic intersecting solution for navigation measurement equation

SHI HuLi^{1,2*}, DU XiaoHui^{1,2}, GENG JianPing³ & LIU Cheng^{1,2}

¹National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Science, Beijing 100012, China;

²Graduate University of Chinese Academy of Science, Beijing 100049, China;

³Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China

This work discusses the establishment and solution of navigation measurement equation, that is the difference and impact on the positioning solution from the intersecting point of spherical equations to the intersecting point of hyperboloidic equations. Transformation solving method has been proposed and derived in combination with the practical application of transmitting the satellite navigation and positioning system. And through the simulation analysis of dilution of precision (DOP) and distribution map of observation station coordinates, the feasibility of hyperboloidic intersecting solution has been verified. Its advantages also have been revealed. Finally, the practical of hyperboloidic intersecting solution has been confirmed through the experiment of China Area Positioning System.

satellite positioning, hyperboloidic intersecting solution, spherical solution, CAPS

PACS: 91.10.Fc, 91.10.Sp, 91.10.Ws