基于 Hamilton 函数方法的非线性微分代数系统反馈控制*

刘艳红** 李春文

(清华大学自动化系, 北京 100084)

吴热冰

(Frick Laboratory, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA)

摘要 基于 Hamilton 函数方法研究了一类非线性微分代数系统的镇定和 H_∞控制问题. 首先结合非线性微分代数系统内在的广义能量平衡特性提出了一种新的耗散 Hamilton 实现结构. 基于该结构, 对不存在外部扰动的非线性微分代数系统设计了镇定控制器, 对存在外部扰动的非线性微分代数系统, 证明了其 L_2 增益分析问题可以归结为广义 Hamilton-Jacobi 不等式的求解问题, 并给出了 H_∞控制器的构造方法. 所提出的非线性微分代数系统的镇定和鲁棒控制器设计方法能充分利用非线性微分代数系统的结构特点, 所设计的控制器形式简单, 易于实现.

关键词 非线性微分代数系统 **Hamilton** 函数方法 耗散 **Hamilton** 实现 镇定 $\boldsymbol{H}_\infty$控制

很多大型复杂动态系统, 包括电力系统、机器人系统等的完整数学模型需要表示为下面非线性微分代数(方程)系统[1~4]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u, \\ 0 = f_2(x_1, x_2), \\ y = h(x_1, x_2). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1 \in X_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ 为状态变量, $x_2 \in X_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 为代数变量, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ 为控制输入, $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$ 为可量测输出变量. $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ 是适当维数的光滑函数.

收稿日期: 2005-07-15; 接受日期: 2006-03-17

* 国家自然科学基金项目(批准号: 69774011, 60433050)

** E-mail: liuyh99@mails.tsinghua.edu.cn

由于非线性微分代数系统中代数变量的隐动态特性, 在对系统进行分析和综合时无法直接得到 Lyapunov 函数沿系统轨线的导数. 人们提出了多种方法来解决该问题, 其中最直接的方法是等效化简法, 即将非线性微分代数系统化为等价的常微分方程系统[5~7]. 这种方法需要用到矩阵求逆, 对高阶高度非线性微分代数系统不易使用. 对形如 $E\dot{x} = f(x)$ 的非线性微分代数系统, 文献[8]在 Lyapunov 函数满足 $\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \tilde{V}^{\mathrm{T}}(x)E = E\tilde{V}(x)$ 条件下, 给出了一套分析和设计方法, 但该条件会增加寻找合适的 Lyapunov 函数的难度. 在电力系统稳定性分析中, 往往采用奇异摄动系统来近似代替非线性微分代数系统[9,10]. 但奇异摄动的方式和大小对系统暂态过程都有较大影响, 同时该方法难以用于控制器设计.

近年来, 基于能量的控制方法——Hamilton 函数方法在非线性系统控制领域引起了广泛关注, 并在电力系统、机电系统、机器人系统等控制中得到了成功应用[11~15]. Hamilton 函数方法以能量存储、消耗和转换的观点看待系统, 以能量重构(energy-shaping)或结构重构(interconnection and damping assignment)的观点看待控制器设计[11, 12], 在控制器设计过程中能充分运用系统的结构特点, 所设计的控制器不仅能够使系统镇定, 还可以实现系统综合性能的提高.

在采用 Hamilton 函数方法对系统进行分析和控制时, 需要首先将系统表示为耗散 Hamilton 系统, 即完成系统的耗散 Hamilton 实现. Hamilton 系统是通过输入输出端口与外部进行能量交换的开放系统, 其总能量的变化满足能量平衡方程或者能量流方程, 该方程在基于能量方法的稳定性分析和控制器设计中起着关键作用[11,12,16]. 对非线性微分代数系统, 如果将代数方程视为系统中内在的广义能量平衡约束, 则其引入不影响系统中总能量的变化. 基于这一考虑, 本文对非线性微分代数系统提出一种耗散 Hamilton 实现结构, 得到了非线性微分代数系统的能量平衡方程, 并简要分析了完成 Hamilton 实现的条件. 然后基于非线性微分代数系统的耗散 Hamilton 实现设计了镇定控制律, 对包含外部扰动的非线性微分代数系统在证明了系统的 L_2 增益分析可以归结为广义 Hamilton-Jacobi 不等式的求解问题的基础上, 给出了 H_∞ 控制器构造方法. 本文所提出的控制器设计方法能够充分运用系统的结构特点, 特别是系统内部的广义能量平衡特性, 所设计的控制器结构简单, 易于实现.

1 非线性微分代数系统的 Hamilton 实现

在采用 Hamilton 函数方法对非线性系统进行分析与综合时, 首先需要将所研究的系统表示为耗散 Hamilton 系统, 即完成耗散 Hamilton 实现. 本节将讨论非线性微分代数系统的耗散 Hamilton 实现问题. 首先结合系统结构特点提出一种耗散 Hamilton 实现形式, 然后简要讨论完成 Hamilton 实现的条件.

考虑(1)式所示非线性微分代数系统. 由于高指数非线性微分代数系统通过模型变换[17,18]或者反馈控制[19]可以化为指数 1 情形, 故本文假定非线性微分代数系统在所考虑的区域 M 内是指数 1 的, 即任意 $(x_1,x_2)\in M\subset\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$, 总有 $\operatorname{rank}\dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=n_2$. 同时本文还假定给定的初值均满足一致初始条件, 即 $f_2(x_{10},x_{20})=0$. 在上述两个假设成立时, 根据隐函数定理, 系统(1)存在无脉冲解.

定义 1　假设存在连续可微函数 $H(x_1,x_2)$ 使得非线性微分代数系统(1)能够表示为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\big(J(x_1,x_2)-R(x_1,x_2)\big)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)+g_1(x_1,x_2)u,\\ 0=\nabla_{x_2}H(x_1,x_2),\\ y=g_1^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2).\end{cases}\tag{2}$$

其中

$$\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)=\left[\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_{11}},\cdots,\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_{1n_1}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\nabla_{x_2}H(x_1,x_2)=\left[\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_{21}},\cdots,\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_{2n_2}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

如果 $J(x_1,x_2)$ 为反对称矩阵, $R(x_1,x_2)$ 为半正定矩阵, 则系统(2)称为非线性微分代数系统(1)的耗散 Hamilton 实现. 相应地, $H(x_1,x_2)$ 称为非线性微分代数系统的 Hamilton 函数.

根据定义 1, 如果系统(1)存在耗散 Hamilton 实现, 则沿系统轨线 Hamilton 函数 $H(x_1,x_2)$ 对代数变量的偏导数满足

$$\nabla_{x_2}H(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2)=0.\tag{3}$$

上式表明 Hamilton 函数关于代数变量的变化为零. 这并不表示 Hamilton 函数不依赖于代数变量 x_2, 而是由于系统中代数约数方程的存在, 使得该函数沿系统轨线的变化呈现出这种特殊的性质.

我们知道 Hamilton 函数往往表示系统中的广义能量, 下面考察非线性微分代数系统(2)中能量的变化情况. Hamilton 函数 $H(x_1,x_2)$ 沿系统轨线的导数为

$$\begin{aligned}\dot{H}(x_1,x_2)&=\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}H(x_1,x_2)\big(J(x_1,x_2)-R(x_1,x_2)\big)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)+\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}H(x_1,x_2)g_1(x_1,x_2)u\\&=-\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}H(x_1,x_2)R(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)+y^{\mathrm{T}}u.\end{aligned}\tag{4}$$

上式右边第一部分表示系统内部的能量耗散, 第二部分表示外部输入的能量, 而左边表示系统中总能量的变化, 所以上式就是非线性微分代数系统的能量平衡方程. 如果没有外界能量输入, 则系统最终会运行到能量的最低点处. 如果希望

加快系统的衰减速度, 则可以通过外部能量注入的方式改变系统阻尼. 进一步, 如果希望改变系统运行的平衡点, 则需要调整系统的能量函数. 这就是基于能量的分析和控制方法的基本原理, 本文将基于该原理完成指数 1 非线性微分代数系统的稳定性分析与控制器设计.

下面简要讨论非线性微分代数系统耗散 Hamilton 实现的条件. 令结构矩阵 $T(x_1,x_2)=J(x_1,x_2)-R(x_1,x_2)$. 根据非线性微分代数系统(1)及其 Hamilton 实现结构形式, 可知下面关系式成立:

$$\begin{cases} T(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)=f_1(x_1,x_2), \\ \nabla_{x_2}H(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2). \end{cases} \tag{5}$$

上式可以表示为

$$\begin{bmatrix} T(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{bmatrix} T(x_1,x_2)\dfrac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

所以非线性微分代数系统(1)能够表示成(2)式所示 Hamilton 实现形式的必要条件是其代数约束方程满足 $\dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\left[\dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right]^{\mathrm{T}}$.

如果 $T(x_1,x_2)$ 可逆, 那么根据 Poincare 引理, 存在连续函数 $H(x_1,x_2)$ 满足(6)式的充要条件是下面可积性条件成立:

$$\frac{\partial K(x_1,x_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\left[\frac{\partial K(x_1,x_2)}{\partial(x_1,x_2)}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

其中 $K(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} T^{-1}(x_1,x_2)f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}$.

2 非线性微分代数系统的反馈镇定

在系统稳定性分析和控制器设计中, 往往选择 Hamilton 函数作为待选 Lyapunov 函数. 由于 Hamilton 函数沿系统轨线的导数往往是半负定的, 所以 LaSalle 不变集原理在基于能量方法的非线性系统稳定性分析与设计中起着关键作用. 在基于 Hamilton 函数方法的非线性微分代数系统控制中, LaSalle 不变集原理也有着重要作用. 下面首先给出指数 1 非线性微分代数系统的 LaSalle 不变集原理[8].

引理 1 考虑下面非线性微分代数系统:

$$\begin{cases} \dot{x}=f_1(x,z), \\ 0=f_2(x,z). \end{cases} \tag{8}$$

其中 f_1, f_2 是连续可微函数. 假设原点是系统的一个孤立平衡点. 如果存在连续可

微函数$V(x,z):D\to\mathbb{R}^+$满足$\dot{V}(x,z)\leqslant 0$, 则系统稳定. 进一步, 如果除平衡点外没有任何完整系统轨线能够停留在$S=\{(x,z)\in D\,|\,\dot{V}(x,z)=0\}$中, 则系统渐近稳定.

根据该引理, 对非线性微分代数耗散 Hamilton 系统(2), 可以直接得到下面结论.

推论 1　设非线性微分代数系统(8)可以耗散 Hamilton 实现为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\big(J(x_1,x_2)-R(x_1,x_2)\big)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2),\\ 0=\nabla_{x_2}H(x_1,x_2).\end{cases}\tag{9}$$

且对适当的$l>0$, $D=\{(x_1,x_2)\in M\,|\,H\big((x_1,x_2)\big)\leqslant l\}$是包含系统平衡点的紧集. 如果 Hamilton 函数$H(x_1,x_2)$在系统平衡点处取得局部严格极小, 则系统稳定. 进一步, 如果集合$\bar{S}=\{(x_1,x_2)\in D\,|\,\dot{H}(x_1,x_2)=0\}$除了平衡点外不包括任何完整系统轨迹, 则系统渐近稳定.

注 1　由于系统状态在任意时刻均满足$f_2(x_1,x_2)=0$, 所以$D=\{(x_1,x_2)\in M\,|\,H(x_1,x_2)\leqslant l\}$等价于$D=\{(x_1,x_2)\in M\,|\,H(x_1,x_2)\leqslant l,\ f_2(x_1,x_2)=0\}$. 集合$\bar{S}$亦然.

下面给出非线性微分代数系统的一个镇定控制律.

定理 1　设(2)是非线性微分代数系统(1)的耗散 Hamilton 实现, 且下面条件成立:

1) $D=\{(x_1,x_2)\in M\,|\,H\big((x_1,x_2)\big)\leqslant l\}$是包含系统平衡点的紧集;

2) Hamilton 函数在系统平衡点处取得局部严格极小;

3) 系统零状态可检测,

则系统(1)的一个镇定控制器为

$$u=-k(x_1,x_2){g_1}^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2).\tag{10}$$

其中$k(x_1,x_2)>0$是反馈增益矩阵.

证　由于 Hamilton 函数在系统平衡点处取得局部严格极小, 选择 Lyapunov 函数

$$V(x_1,x_2)=H(x_1,x_2)-H_0(x_1,x_2),$$

其中$H_0(x_1,x_2)$是 Hamilton 函数在平衡点处的值, 显然$V>0$. Lyapunov 函数沿闭环系统轨线的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1,x_2)&=\dot{H}(x_1,x_2)\\&=-\nabla_{x_1}{}^{\mathrm{T}}H(x_1,x_2)R(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)\\&\quad-\nabla_{x_1}{}^{\mathrm{T}}H(x_1,x_2)g_1(x_1,x_2)k(x_1,x_2){g_1}^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)\\&\leqslant-\nabla_{x_1}{}^{\mathrm{T}}H(x_1,x_2)g_1(x_1,x_2)k(x_1,x_2){g_1}^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2).\end{aligned}$$

由 $\dot{V}(x_1,x_2)=0$ 可得 $g_1^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)=0$，根据零状态可检测条件，知 $\{(x_1,x_2)\in D\,|\,\dot{V}(x_1,x_2)=0\}$ 仅包含系统平衡点，从而闭环系统渐近稳定.

3 非线性微分代数系统的 H_∞ 控制

3.1 非线性微分代数系统的 L_2 增益分析

首先给出非线性微分代数系统 L_2 增益的定义.

定义 2 考虑下面指数 1 非线性微分代数系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2)+g(x_1,x_2)\omega,\\ 0 = f_2(x_1,x_2),\\ z = h(x_1,x_2).\end{cases}\tag{11}$$

其中 $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$，$x_2\in\mathbb{R}^{n_2}$，$\omega\in\mathbb{R}^m$，$z\in\mathbb{R}^p$ 分别是状态变量、代数变量、输入变量和输出变量. $f_1(0,0)=0$，$f_2(0,0)=0$，$h(0,0)=0$. 对给定的 $\gamma>0$，如果输入输出信号满足

$$\int_0^T\|z\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\gamma^2\|\omega\|^2\,\mathrm{d}t,\qquad\forall T\geqslant 0,\ \omega\in L_2[0,T].\tag{12}$$

则称系统(11)(从 ω 到 z)的 L_2 增益小于等于 γ.

定理 2 考虑非线性微分代数系统(11). 如果存在连续可微函数 $V(x_1,x_2)$，使得对任意 $\forall(x_1,x_2)\in M$ 均有 $V(x_1,x_2)\geqslant 0$，$\nabla_{x_2}V(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2)$，同时下面广义 Hamilton-Jacobi 不等式成立:

$$\begin{aligned}&\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)f_1(x_1,x_2)+\frac{1}{2\gamma^2}\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)g(x_1,x_2)g^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}V(x_1,x_2)\\&\qquad+\frac{1}{2}h^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)h(x_1,x_2)\leqslant 0,\end{aligned}\tag{13}$$

则系统的 L_2 增益小于等于 γ.

证 如果存在半正定连续可微函数满足 $\nabla_{x_2}V(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2)$，且使得 Hamilton-Jacobi 不等式(13)成立，则有

$$\begin{aligned}&\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)f_1(x_1,x_2)+\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)g(x_1,x_2)\omega\\&\leqslant-\frac{1}{2\gamma^2}\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)g(x_1,x_2)g^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}V(x_1,x_2)-\frac{1}{2}h^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)h(x_1,x_2)\\&\quad+\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)g(x_1,x_2)\omega-\frac{1}{2}\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega+\frac{1}{2}\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega\\&=\frac{1}{2}\left\{\gamma^2\|\omega\|^2-\|z\|^2\right\}-\frac{\gamma^2}{2}\left\|\omega-\frac{1}{\gamma^2}g^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}V(x_1,x_2)\right\|^2.\end{aligned}$$

由于

$$\left\|\omega-\frac{1}{\gamma^2}g^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)\nabla_{x_1}V(x_1,x_2)\right\|^2\geqslant 0,\quad \forall\omega\in L_2[0,T],$$

故有

$$\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)f_1(x_1,x_2)+\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)g(x_1,x_2)\omega\leqslant\frac{1}{2}\left\{\gamma^2\|\omega\|^2-\|z\|^2\right\}.$$

考虑到 $\nabla_{x_2}V(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2)=0,\ \forall(x_1,x_2)\in M$，则

$$\begin{aligned}&\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)f_1(x_1,x_2)+\nabla_{x_1}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)g(x_1,x_2)\omega\\&+\nabla_{x_2}^{\mathrm{T}}V(x_1,x_2)\tilde{f}(x_1,x_2)\leqslant\frac{1}{2}\left\{\gamma^2\|\omega\|^2-\|z\|^2\right\},\end{aligned}$$

其中 $\tilde{f}(x_1,x_2)$ 是 x_2 应满足的系统动态，即 $\dot{x}_2=\tilde{f}(x_1,x_2)$．对任意给定的时间 $T>0$，将上面不等式两边求 0 到 T 的积分，可得

$$V\left(x_1(T),x_2(T)\right)-V\left(x_1(0),x_2(0)\right)\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T\gamma^2\|\omega\|^2\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^T\|z\|^2\,\mathrm{d}t.$$

因为 $V(x_1,x_2)\geqslant 0,\ \forall(x_1,x_2)\in M$，上式等价于

$$\frac{1}{2}\int_0^T\|z\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T\gamma^2\|\omega\|^2\,\mathrm{d}t,\quad\forall\omega\in L_2[0,T].$$

3.2　非线性微分代数系统的 H_∞ 控制

考虑下面包含外部扰动的非线性微分代数系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)+g_1(x_1,x_2)u+g_2(x_1,x_2)\omega,\\0=f_2(x_1,x_2),\\z=h_1(x_1,x_2)+D(x_1,x_2)u,\\y=h_2(x_1,x_2).\end{cases}\tag{14}$$

假设系统可以耗散 Hamilton 实现为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\left(J(x_1,x_2)-R(x_1,x_2)\right)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)+g_1(x_1,x_2)u+g_2(x_1,x_2)\omega,\\0=f_2(x_1,x_2)=\nabla_{x_2}H(x_1,x_2),\\y=g_2{}^T(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2),\\z=r(x_1,x_2)g_1{}^T(x_1,x_2)\nabla_{x_1}H(x_1,x_2)+D(x_1,x_2)u.\end{cases}\tag{15}$$

其中 $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $x_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, $u\in\mathbb{R}^m$ 分别是状态变量、代数变量和控制输入，$\omega\in\mathbb{R}^s$ 是干扰信号，$y\in\mathbb{R}^p$ 是系统输出，$z\in\mathbb{R}^q$ 是评价信号．$r(x_1,x_2)$ 是列满秩的权重矩阵，$J(x_1,x_2)$ 是反对称矩阵，$R(x_1,x_2)\geqslant 0$ 是对称矩阵．假设原点是系统的一个孤立平衡点.

非线性微分代数系统的 H_∞控制问题的提法是: 对给定的$\gamma>0$, 寻找状态反馈控制律$u=\alpha(x_1,x_2)$, $\alpha(0,0)=0$使得闭环系统的L_2增益小于等于γ, 且$\omega=0$时闭环系统渐近稳定.

对能够完成耗散 Hamilton 实现的非线性微分代数系统, 有下面结论:

定理 3 假设下面条件成立:

1) 非线性微分代数系统的 Hamilton 函数满足$H(x_1,x_2)\in C^2$且 Hess $H(0,0)>0$;

2) $D^{\mathrm{T}}(x_1,x_2)r(x_1,x_2)g_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H=0,\ \forall(x_1,x_2)\in M$;

3) 系统零状态可检测;

4) $R+\dfrac{1}{2\gamma^2}\left[g_1g_1^{\mathrm{T}}-g_2g_2^{\mathrm{T}}\right]-\dfrac{1}{8}C^{\mathrm{T}}C\geqslant 0$.

则系统(15)的一个H_∞控制律为

$$u=-\frac{1}{2}\left[r^{\mathrm{T}}r+\frac{1}{\gamma^2}I_m\right]g_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H. \tag{16}$$

其中 $C=D\left[r^{\mathrm{T}}r+\dfrac{1}{\gamma^2}I_m\right]g_1^{\mathrm{T}}$.

证 首先证明假设 1)成立时原点是 Hamilton 函数的一个局部严格极小值点. 由于非线性微分代数系统的任意状态必须满足约束方程$f_2(x_1,x_2)=0$, 所以该问题是一个约束极值问题. 根据 Lagrange 乘子法, 它可以化为下面无约束极值问题:

$$\bar{H}(x_1,x_2)=H(x_1,x_2)+\lambda^{\mathrm{T}}f_2(x_1,x_2). \tag{17}$$

而$\bar{H}(x_1,x_2)$取得极值的必要条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{H}(x_1,x_2)}{\partial(x_1,x_2)}=0,\\ f_2(x_1,x_2)=0.\end{cases} \tag{18}$$

上式等价于

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial x_1}=\dfrac{\partial H}{\partial x_1}+\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^{\mathrm{T}}\lambda,\\ \dfrac{\partial\bar{H}}{\partial x_2}=\dfrac{\partial H}{\partial x_2}+\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}}\lambda.\end{cases} \tag{19}$$

沿系统轨线有$\dfrac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0$, 同时$\dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\neq 0$ (根据指数 1 假设), 故有

$\lambda=0$, 从而 $\bar{H}(x_1,x_2)$ 取得极值的必要条件可以化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0,\\ f_2(x_1,x_2)=0.\end{cases}\tag{20}$$

(20) 式正是系统平衡点应满足的方程. 再根据假设 1), 可知 Hamilton 函数在系统原点处取得局部严格极小.

下面证明闭环系统的鲁棒性. 在控制律(16)作用下相应的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=(J-R)\nabla_{x_1}H-\dfrac{1}{2}g_1\left[r^{\mathrm{T}}r+\dfrac{1}{\gamma^2}I_m\right]g_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H+g_2\omega=:f(x_1,x_2)+g_2\omega,\\ 0=f_2(x_1,x_2)=\nabla_{x_2}H,\\ y=g_2{}^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H,\\ z=rg_1{}^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H-\dfrac{1}{2}D\left[r^{\mathrm{T}}r+\dfrac{1}{\gamma^2}I_m\right]g_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H=:h(x_1,x_2).\end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}&(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}f+\frac{1}{2\gamma^2}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}g_2g_2^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H+\frac{1}{2}h^{\mathrm{T}}h\\ &=-(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}\left(R+\frac{1}{2}g_1r^{\mathrm{T}}rg_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2\gamma^2}g_1g_1^{\mathrm{T}}\right)\nabla_{x_1}H+\frac{1}{2\gamma^2}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}g_2g_2^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H\\ &\quad+\frac{1}{2}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}\left(g_1r^{\mathrm{T}}rg_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{4}C^{\mathrm{T}}C\right)\nabla_{x_1}H\\ &=-(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}\left[R+\frac{1}{2\gamma^2}\left(g_1r^{\mathrm{T}}rg_1^{\mathrm{T}}-g_2g_2^{\mathrm{T}}\right)-\frac{1}{4}C^{\mathrm{T}}C\right]\nabla_{x_1}H,\end{aligned}$$

根据定理 2, 可知闭环系统的 L_2 增益小于等于 γ.

最后证明 $\omega=0$ 时系统的渐近稳定性. 选择 Hamilton 函数作为系统的待选 Lyapunov 函数. 当 $\omega=0$ 时, Hamilton 函数沿闭环系统轨线的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}&=(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}\left(J-R-\frac{1}{2}g_1r^{\mathrm{T}}rg_1^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2\gamma^2}g_1g_1^{\mathrm{T}}\right)\nabla_{x_1}H\\ &=-(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}\left[R+\frac{1}{2\gamma^2}\left(g_1r^{\mathrm{T}}rg_1^{\mathrm{T}}-g_2g_2^{\mathrm{T}}\right)-\frac{1}{8}C^{\mathrm{T}}C\right]\nabla_{x_1}H\\ &\quad-\frac{1}{2\gamma^2}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}g_2g_2^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H-\frac{1}{2}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}g_1r^{\mathrm{T}}rg_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H-\frac{1}{8}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\nabla_{x_1}H\\ &\leqslant-\frac{1}{2\gamma^2}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}g_2g_2^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H-\frac{1}{2}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}g_1r^{\mathrm{T}}rg_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H-\frac{1}{8}(\nabla_{x_1}H)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\nabla_{x_1}H\leqslant 0.\end{aligned}$$

所以闭环系统轨迹收敛于包含在下面集合中的最大不变集中:

$$S=\left\{(x_1,x_2)\in M: y=g_2^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H\equiv 0,\ rg_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H\equiv 0,\ C\nabla_{x_1}H\equiv 0,\ \nabla_{x_2}H=f_2(x_1,x_2)=0\right\}.$$

因为 $r(x_1,x_2)$ 列满秩, 由 $rg_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H\equiv 0$ 可得 $g_1^{\mathrm{T}}\nabla_{x_1}H\equiv 0$. 根据系统零状态可检测性, 可知 $\left\{(x_1,x_2)\in M:\dot{H}=0\right\}$ 仅包含系统平衡点, 从而闭环系统渐近稳定.

4 结论

本文采用 Hamilton 函数方法研究了一类非线性微分代数系统的反馈控制问题. 首先结合非线性微分代数系统的结构特点, 提出一种耗散 Hamilton 实现结构, 得到了微分代数系统的能量平衡方程, 同时还简要分析了非线性微分代数系统完成 Hamilton 实现的条件. 然后基于所提出的 Hamilton 实现形式, 给出了一种镇定控制器设计方法. 最后研究了包含外部扰动的非线性微分代数系统的 H_∞控制问题: 首先证明在一定条件下, 系统的干扰抑制问题可以归结为 Hamilton-Jacobi 不等式的求解问题, 然后对能够 Hamilton 实现的微分代数系统构造了鲁棒控制器. 本文所提出的镇定和 H_∞控制方法能充分利用非线性微分代数系统的结构特点和内在广义能量平衡特性, 所设计的控制器结构简单, 易于实现, 是 Hamilton 函数方法在非线性微分代数系统中的推广和应用, 具有潜在的应用价值.

参 考 文 献

1 Venkatasubramanian V, Schättler H, Zaborszky J. Dynamics of large constrained nonlinear systems—a taxonomy theory. Proc IEEE, 1995, 83(11): 1530—1561

2 Hill D J, Mareels I M Y. Stability theory for differential algebraic systems with application to power systems. IEEE Trans Circuits Syst, 1990, 37(11): 1416—1423

3 McClamboch N H, Wang D W. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. IEEE Trans Autom Control, 1988, 33(5): 419—426

4 Campbell S L. A general method for nonlinear descriptor systems: A example from robotic path control. In: Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, 1988. 630—631

5 Zimmer G, Meier J. On observing nonlinear descriptor system. Syst Control Lett, 1997, 32: 43—48

6 Liu Y Q, Li Y Q. Stabilization of nonlinear singular systems. In: Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, 1998. 2532—2533

7 Wang J, Chen C, La Scala M. Parametric adaptive control of multimachine power systems with nonlinear loads. IEEE Trans Circuits Syst I-Regul Pap, 2004, 51(2): 91—100

8 Wang H S, Yung C F, Chang F R. H_∞ control for nonlinear descriptor systems. IEEE Trans Autom Control, 2002, 47(11): 1919—1925

9 Chiang H D, Fekih-Ahmed L. On the direct method for transient stability analysis of power system structure preserving models. In: Proceedings of 1992 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1992. 5: 2545—2548

10 Praprost K L, Loparo K A. An energy function method for determining voltage collapse during a power system transient. IEEE Trans Circuits Syst I-Regul Pap, 1994, 41(10): 635—651

11 Ortega R, van der Schaft A J, Maschke B, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. Automatica, 2002, 38(4): 585—596

12 Ortega R, van der Schaft A J, Mareels I, et al. Putting energy back in control. IEEE Control Syst Mag, 2001, 21(2): 18—33

13 Wang Y, Cheng D, Hong Y. Stabilization of synchronous generators with Hamiltonian function approach. Int J Syst Sci, 2001, 32(8): 971—978

14 Cheng D, Xi Z, Hong Y, et al. Energy-based stabilization in power systems. In: Proceedings of the 14th IFAC World Congress, Beijing, China, 1999, 297—303

15 Sun Y, Shen T, Ortega R. Decentralized controller design for multimachine power systems based on Hamiltonian structure. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, 2001. 4: 3045—3050

16 Wang Y, Cheng D, Li C, et al. Dissipative Hamiltonian realization and energy-based L_2 disturbance attenuation control of multi-machine power systems. IEEE Trans Autom Control, 2003, 48(8): 1428—1433

17 Bachamann R, Brüll L, Mrziglod Th, et al. On methods for reducing the index of differential-algebraic equations. Comput Chem Eng, 1990, 14:1271—1273

18 Gear C W. Differential-algebraic equation index transformation. SIAM J Sci Stat Comp, 1988, 9: 39—47

19 Liu X P, Čelikovský S. Feeback control of affine nonlinear singular control systems. Int J Control, 1997, 68(4): 753—774