

四 Bose 子系统低激发态的结构特征和对称性效应^{*}

李训贵^{①②} 鲍诚光^②

(^① 广州师范学院物理系, 广州 510400; ^② 中山大学物理系, 广州 510275)

摘要 用四体模型研究了四全同 Bose 子低激发态的能谱结构和波函数在坐标空间的分布. 在此基础上进一步探讨了对称性效应, 发现各种结构特征均由对称性决定.

关键词 少体系统 能谱 结构 对称性

微观少体系统作为多体和宏观大系统(如团簇, 大块晶体和非晶材料等)的基础, 一直是物理学中的一个重要的和基本的研究领域, 少体研究涉及到凝聚态物理, 表面科学, 材料科学, 原子物理, 原子核物理和粒子物理等多个物理领域. 特别是近年来, 凝聚态物理中出现了大量的少体系统^[1~6], 为少体研究提供了大量的课题. 深入地研究少体系统, 可在分析研究少体微观结构的基础上, 对大系统的宏观性质有更本质的理解. 同时, 这种研究又将促进少体理论研究方法本身的发展.

本文用少体方法研究了对称性效应对全同四 Bose 子系统低激发态结构的影响. 文中提出了一个全同四 Bose 子系统的具有代表性的理论模型. 将相应的 Hamilton 量 H 对角化后得到总角动量 $L=0$ 和 1, 宇称 π 为正与负的本征态和本征值. 发现了能谱和低激发态的基本特征. 这些特征具有普遍性. 通过进一步的分析, 本文表明这些基本特征源于对称性的制约.

1 理论模型和基矢的选择

对于一全同的四 Bose 子系统, Hamilton 量为

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^4 P_i^2 + \sum_{i>j} V(r_{ij}), \quad (1)$$

式中第 1 项为动能, m 为 Bose 子的质量, 第 2 项为四 Bose 子之间的两体相互作用势能之和. 将四体系统的坐标 r_i ($i=1, 2, 3, 4$) 变换为质心坐标 \mathcal{R} 及描写内部运动的 Jacobi 坐标 $r_{12}=r_2-r_1$, $r_{34}=r_4-r_3$, $R=(r_3+r_4-r_1-r_2)/2$ (图 1(a)). 经分离质心运动和内部运动后, Hamilton 量成为

$$H = H_{cm} + H_I, \quad (2)$$

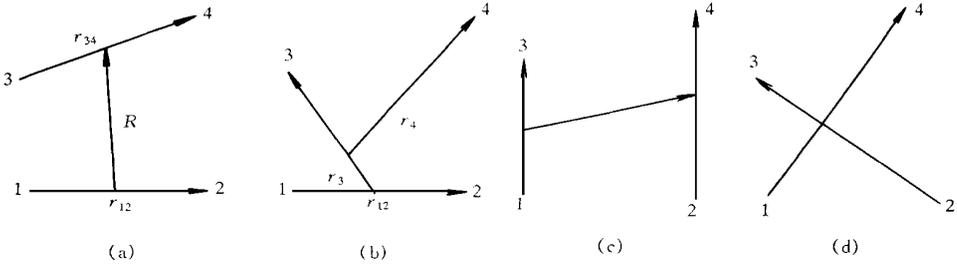


图 1 四体系统的 Jacobi 坐标

H_{om} 是质心运动能量, H_I 是内部运动能量:

$$H_I = \frac{P_{12}^2}{2\mu_{12}} + \frac{P_{34}^2}{2\mu_{34}} + \frac{P_{12\ 34}^2}{2\mu_{12\ 34}} + \frac{1}{2}\mu_{12}\omega^2 r_{12}^2 + \frac{1}{2}\mu_{34}\omega^2 r_{34}^2 + \frac{1}{2}\mu_{12\ 34}\omega^2 R^2 + \sum_{i>j} \left[V(r_{ij}) - \frac{1}{8}m\omega^2 r_{ij}^2 \right], \quad (3)$$

$\mu_{12} = \mu_{34} = m/2$, $\mu_{12\ 34} = m$, ω 是可调的变分参数. 以下考虑相互作用中含有排斥芯与吸引尾的四 Bose 子模型系统, 取两体相互作用 $V(r_{ij})$ 为 Ali-Bodmer 型^[7]:

$$V(r_{ij}) = V_0 \{ -\exp(- (r_{ij}/2.105)^2) + 2\exp(- (r_{ij}/1.428)^2) \} + C. E., \quad (4)$$

C. E. 为 Coulomb 势. 为了作一般性的讨论, 令 V_0 为可调的强度参数, 单位为 MeV, r 的单位为 fm. 为将 H_I 对角化, 定义一组基函数

$$\phi_K(1234) = [\varphi_a(\mathbf{r}_{12}) (\varphi_b(\mathbf{r}_{34}) \varphi_c(\mathbf{R}))]_{l_0} L^\pi, \quad (5)$$

式中的坐标如图 1(a) 所示. φ_a 是归一化的谐振子波函数, $a = \{ n_a, l_a \}$, $b = \{ n_b, l_b \}$, $c = \{ n_c, l_c \}$, $K = \{ a, b, c, l_0, L^\pi \}$. $\phi_K(1234)$ 称为原始基, L^π 为系统的总角动量和宇称. 其中 l_b 与 l_c 耦合成 l_0 , l_a 再与 l_0 耦合成 L . 因为我们考虑的是四全同 Bose 子系统, 因此, 需将基函数(5)式对称化. 为此, 我们先令

$$(-1)^{l_a} = (-1)^{l_b} = 1, \quad (6)$$

以保证粒子 1 和 2 之间, 3 和 4 之间对称化. 再定义对称化基

$$\begin{aligned} \phi_K &= \phi_K(1234) + \phi_K(3421) + \phi_K(1324) + \phi_K(2413) + \\ &\phi_K(1423) + \phi_K(2314). \end{aligned} \quad (7)$$

借助于广义的 TM 系数^[8,9], 将(7)式右边的第二项到第六项 5 个原始基用第一个原始基表达出来, (7)式的对称化基成为

$$\phi_K = \sum_{K'} S_{KK'} \phi_{K'}(1234), \quad (8)$$

式中 $K' = \{ a', b', c', l'_0, L^\pi \}$, 而系数为

$$S_{KK'} = 4T \hat{\varphi}_{a'} \hat{\varphi}_{b'} \hat{\varphi}_{c'} + \hat{\varphi}_{a'} \hat{\varphi}_{b'} \hat{\varphi}_{c'} \hat{\varphi}_{l'_0} + (-1)^{l_0+l'_0-L} \Gamma_0 \Gamma'_0 W(l_b l_c L l_a; l_0 l'_0) \hat{\varphi}_{l_0} \hat{\varphi}_{a'} \hat{\varphi}_{c'}, \quad (9)$$

$\Gamma_0 = \sqrt{2l_0+1}$; $\hat{\varphi}_{a'} = \hat{\varphi}_{n'_a l'_a}$ 等, T 为从图 1(c) 的 Jacobi 坐标变换到图 1(a) 的 Jacobi 坐标的 Talmi-Moshinsky 变换括号.

$$T \equiv \left\langle \left[\varphi_a(\mathbf{r}_{12}) (\varphi_b(\mathbf{r}_{34}) \varphi_c(\mathbf{R})) \right]_{l_0} L^\pi \left| \left[\varphi_a(\mathbf{r}_{13}) (\varphi_b(\mathbf{r}_{24}) \varphi_c(\mathbf{R}')) \right]_{l'_0} L^\pi \right. \right\rangle \quad (9')$$

其中 $R' = (r_3 + r_4 - r_1 - r_2)/2$.

对称化基 ϕ_K 一般不是互相线性独立的. 因此, 还要用 Schmidt 正交化方法^[10] 从 $\{\phi_K\}$ 中挑选出一组对称化的且线性独立的基 $\{\phi_i^{ind}\}$.

系统的总波函数 ψ 以 $\{\phi_i^{ind}\}$ 展开:

$$\psi = \sum_i C_i \{\phi_i^{ind}\}. \tag{10}$$

令

$$2(n_a + n_b + n_c) + l_a + l_b + l_c \leq N_0, \tag{11}$$

基空间的维数由 N_0 决定. 例如: 当 $L^\pi = 0^-$, $N_0 = 19$ 时, 原始基 ϕ_K 共有 3 003 个; 独立的 $\{\phi_i^{ind}\}$ 仅 103 个基. 这使数值计算工作量大大减小. H_I 在以基矢 $\{\phi_i^{ind}\}$ 展开的 Hilbert 空间中对角化后, 就得到系统内部运动的本征能量和波函数.

2 低激发态的能谱

首先取 $V_0 = 300$, 暂不考虑 Coulomb 势. 此时, 低激发谱如图 2 所示. 其中 L_i^π 的下标

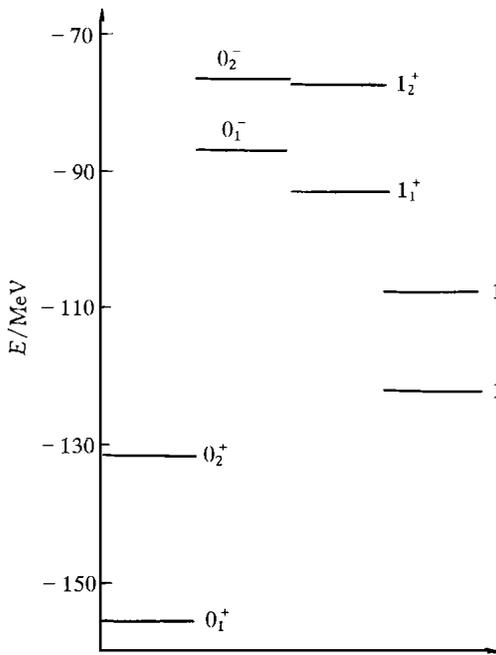


图 2 低激发态 (L^π , $L = 0, 1; i = 1, 2; \pi = \pm 1$) 的能谱

$i = 1$ 和 2 分别标志同一 L_i^π 序列的首态和次低态. 能谱有两个特征:

(i) 就首态而言, 0_1^+ 特别低, 0_1^- 与 1_1^+ 特别高.

(ii) L_2^π 与 L_1^π 态的能量差称为能隙. 0^+ 态的能隙特别大.

为了便于对波函数进行分析, 定义一个体轴 $i'-j'-k'$ 如图 3(a) 所示, 其中 O' 为粒子 1 与 2 的中点, O 为 3 与 4 的中点, k' 轴与 $\overline{OO'}$ 重合, r_{34} 在 $i'-k'$ 平面上. 此时定义在固定轴上的本征态可展开为

$$\psi(1234) = \sum_Q D_{QM}^L(-\gamma, -\beta, -\alpha) \cdot \psi_Q(1'2'3'4'), \tag{12}$$

其中 (1234) 表示粒子相对于固定轴的坐标, $(1'2'3'4')$ 表示粒子相对于体轴的坐标, M 与 Q 分别为 L 在 Z 轴和 k' 轴上的投影, α, β, γ 为体轴的方位角. ψ_Q 称为 Ψ 的 Q 成分. 在 (10) 式中, D_{QM}^L 反映集体转动, 而 ψ_Q 反映内部运动.

为了研究内部结构, 我们将对 ψ_Q 进行观察 (当然, 当 $L = 0$ 时, $\Psi = \psi_Q = \psi$). 以下将主要研究首态.

3 低激发态波函数在正四面体构形及其邻域的行为

为了突出 ψ_Q 的特征, 需要找到适当的子空间来观察 ψ_Q 的行为.

(i) 在图 3(a)中, 若令 $r_{12} \perp k'$, $r_{34} \perp k'$, $r_{12} \perp r_{34}$, 且 $r_{12} = r_{34}$, 则称该几何构形为广义正四面体 (GETH). 在 GETH 的子空间内, ψ_Q 只是 r_{12} 与 $R = \overline{OO'}$ 的函数, 相应的 ψ_Q 的等位线如图 4 所示. 其中 $R=0$ 处对应于一个正方形 (SQ), 而 $r_{12}/R = \sqrt{2}$ 处即图 4(a) 中的 \overline{OA} 及 \overline{OB} 线对应于一个正四面体 (ETH).

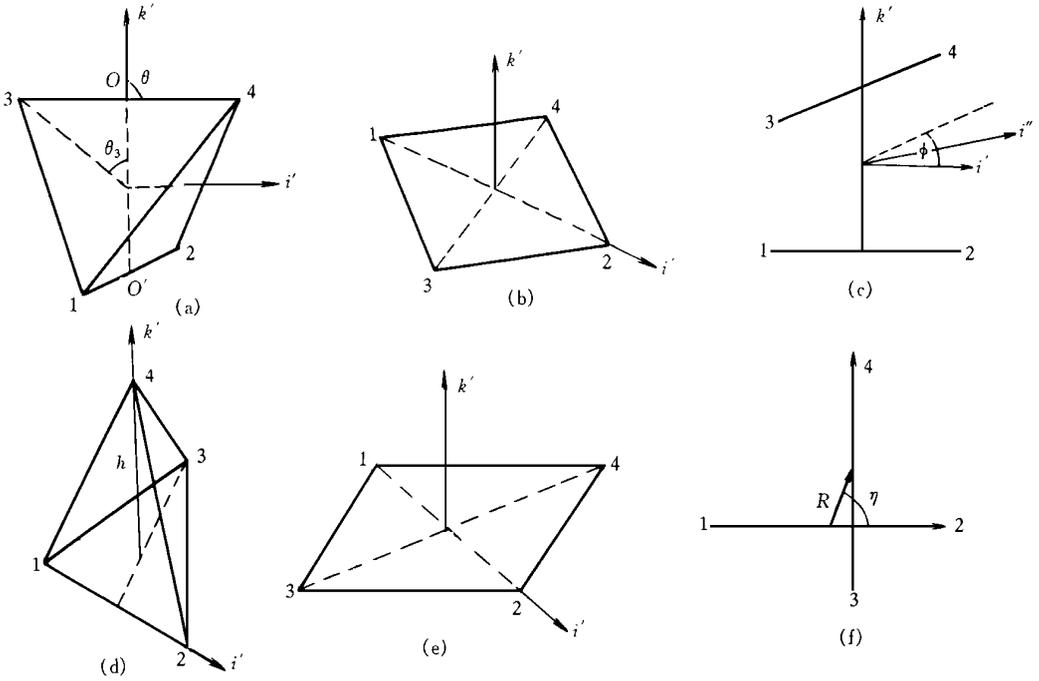


图 3 几种几何构形的直观图

(a) ETH, (b) SQ, (c) TETH, (d) CONE, (e) PARA, (f) TS(CUN)

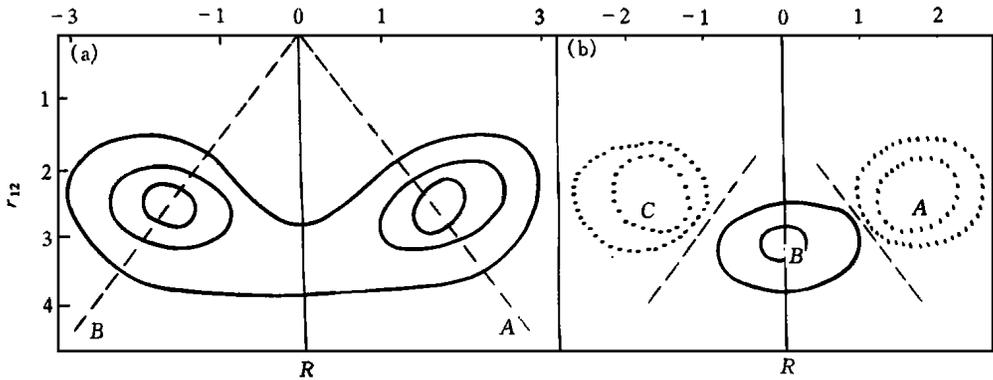


图 4 GETH 子空间中 ψ_Q 作为 r_{12} (纵坐标) 和 R (横坐标) 的函数的分布

(a) 中 $|\psi_Q|$ 的最大值为单位 1. 等高线从外到内分别为 0.2, 0.5, 0.8 (三等高线), 或 0.2, 0.5 (两等高线) 0.2 (一等高线). ψ_Q 表示 ψ_Q 的实部, ψ_Q 表示虚部. (b) 内的短划线表示动力学节线. 实(虚)等高线代表正(负)值

令 $\psi_0 = \psi_0^R + i\psi_0^I$. 其中上标 R 和 I 分别表示实部和虚部. 由于 $\psi_0^* = \pi(-1)^{L-Q}\psi_0$, 可知 0^+ 态只有实部, 即 $\psi_0 = \psi_0^R$, 0_1^+ 态的 ψ_0 如图 4(a) 所示. 发现 ψ_0 主要分布在 ETH 的邻域, 同时在 SQ 附近亦有所分布, 注意到在诸规则的几何构形中, 总位能最小出现在 ETH 处, 在 SQ 处为一条件极小值. 因而上述分布反映了基态波函数愿意在总位能最小值及其邻域进行分布的事实. 相应地 0_1^+ 态的主要特征就是具有 ETH 结构, 即波函数围绕 ETH 进行分布. 以下称这一类态为 ETH 态.

0_2^+ 态的 ψ_0 如图 4(b) 所示. 与图 4(a) 相比, 图 4(b) 中添加了两条节线. 一般来说, 在量子力学中, 节线出现意味着特定模式的激发. 注意到当 R 减小至零并向负向增加时, 一个 ETH 会变成 SQ, 再变成另一个 ETH. 图 4(b) 中从谷 A (对应一个 ETH) 到峰 B (一个 SQ), 再到谷 C (ETH) 的演进反映了这种转变, 可称之为 ETH-SQ-ETH 振动模式, 由于其间含有两根节线, 意味着这一模式已经激发. 0_2^+ 态的主要特征就是具有激发的 ETH-SQ-ETH 振动模式, 相应地其结构是 ETH 与 SQ 的共存. 由于含有两根节线, 意味着很高的激发能, 这是 0^+ 态有一个大的能隙的原因. 这一能隙也反映了 0_1^+ 态的稳定性.

令人奇怪的是, 在 GETH 这个子空间内, 所有 0_1^+ , 1_1^+ , 1_1^- 的诸 ψ_0 ($|Q| = 0$ 或 1) 均为零, 无论首态还是较高态都是这样, 这表示它们没有广义正四面体 (GETH) 的结构. 我们将在下面探讨其根由. 由于 GETH 子空间中包括了总位能最低的区域, 若波函数不在这一空间分布, 必将导致总位能的提高, 因而, 0_1^+ , 1_1^+ , 1_1^- 显著高于 0_1^+ 也就不足为怪了.

(ii) 在图 3(a) 之中, 令 $r_{12} \perp k'$, $r_{34} \perp k'$, $r_{12} = r_{34}$, 又令 φ 为 r_{12} 与 r_{34} 之间的夹角. 若 φ 恰为 90° (270°), 则对应于一个 GETH; 若 φ 偏离 90° , 则称为一个扭曲的 GETH, 记为 TETH. 又若进一步把 r_{12} 和 R 分别固定在其优化值, 那么, ψ_0 就只是 φ 的函数, 如图 5 所示. 在这个特定的子空间内, 我们发现所有 1_1^+ 与 1_1^- 的 ψ_0 恒为零. 前已提及 0^+ 态只有实部, 而 0^- 态则只有虚部, 由图 5(b) 给出. 0_1^- 态的峰(谷)值在 $\varphi = 90^\circ \pm 40^\circ$ 处, 这表明这个态的最可几形状是一个 TETH. $\varphi = 90^\circ$ 处是一个节点, 意味着 φ 围绕 90° 的摇摆, 是一种激发了的运动模式, 可称之为扭摆. 0_1^- 态的主要特征就是存在着激发了的扭摆运动.

(iii) 在图 3(a) 中令 $r_{12} \perp k'$, $r_{12} \perp r_{34}$, $r_{12} = r_{34}$; 又令 θ 为 r_{34} 与 k' 的夹角. 若 θ 恰为 90° , 则对应于一个 GETH; 若 θ 偏离 90° , 则称为一个变形的 GETH, 记为 DETH (这相当在图 3(a) 中, r_{34} 在 $i'k'$ 平面内绕 O 点转动); 又若进一步把 r_{12} 和 R 分别固定在其优化值, 那么 ψ_0 就只是 θ 的函数, 如图 5(c) 至 5(f) 所示, 其中实线表示 ψ_0 , 而虚线表示 ψ_1 . 所有 0_1^+ , 1_1^+ 态的 ψ_0 ($Q = 0$ 和 1 . 由于 ψ_0 和 ψ_0^* 只差一相因子, 以下只给出 $Q \geq 0$ 的情况) 的实虚部均由图 5 给出; 若未给出, 表示该成分在该特定的子空间内恒为零. 这一约定对图 6~8 亦适用. 图 5(d)~(f) 表明 1_1^+ 与 1_1^- 态的峰值偏离 $\theta = 90^\circ$, 表明存在着 DETH 结构. 由于在 $\theta = 90^\circ$ 处存在着节点, 1_1^+ 与 1_1^- 态存在着激发的, 围绕着 GETH 的内部摆动.

(iv) 在图 3(a) 中令 $r_{12} \perp k'$, $r_{34} \perp k'$, $r_{12} \perp r_{34}$, 但 r_{12} 可以不等于 r_{34} , 此时称之为楔形 (WEDGE). 若 R 固定在其优化值, 则 ψ_0 为 r_{12} 与 r_{34} 的函数, 如图 6 所示. 图 6(b) 的峰值在 $r_{12} \neq r_{34}$ 处 ($r_{12} = r_{34}$ 处为一节面), 表明 1_1^- 态有楔形结构.

(v) 从四面体的一个顶点向另外三个顶点组成的平面作垂线, 记为 h . 若一正四面体的边长为 s , 则有 $h = h_0 = \sqrt{2/3}s$. 若 h 的长度偏离 h_0 , 则变为正三角形或锥形 (CONE) (见图

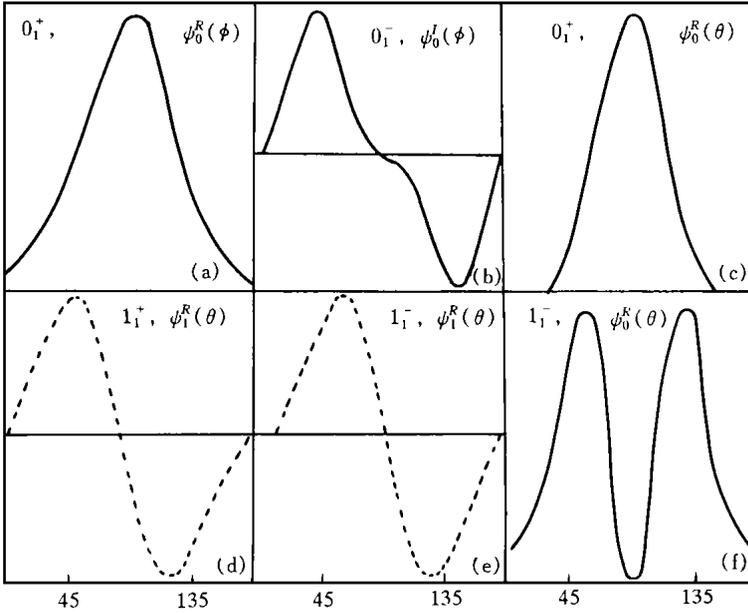


图 5 在 TETH 或 DETH 子空间中 $\psi_0^R(\psi_0)$ 作为扭曲角 φ 或 θ 的函数

纵坐标为 ψ_0^R 或 ψ_0 其单位是任意的. 横坐标为 φ 或 θ . (a) $r_{12}=r_{34}=2.4, R=1.7$; (b) $r_{12}=r_{34}=2.6, R=1.9$;
 (c) $r_{12}=r_{34}=2.4, R=1.7$; (d) $r_{12}=r_{34}=2.2, R=2.5$; (e) $r_{12}=r_{34}=2.6, R=1.6$

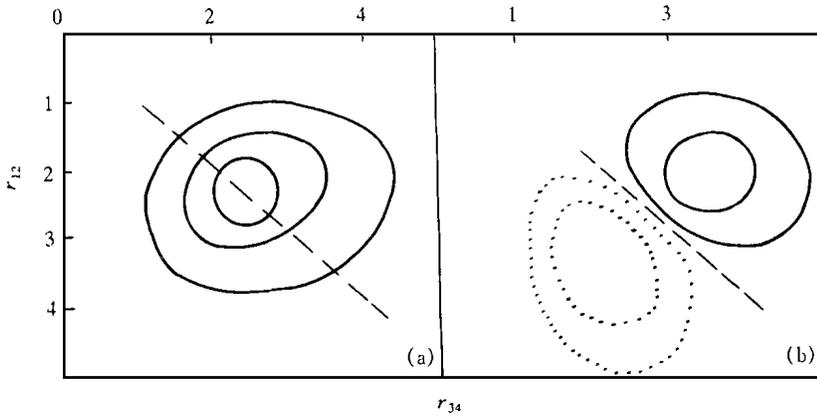


图 6 在楔形(WEDGE)子空间中 ψ_0 的分布

(a)中 ψ_0 的最大值为单位 1. 等高线的意义同图 4. $R=1.7$. 短划线代表 ETH;
 (b) $R=1.5$. 短划线表示 ETH 处为内秉节面(INS)

3(d)), 此时 ψ_0 作为 s 或 r_{12} (底边长)和 h 的函数如图 7 所示. 图 7(b)的峰值不在 $h=h_0$ 处, 表明 1_1^- 态有锥形结构.

以上我们在 ETH 的邻域, 选择 5 个不同的子空间研究了波函数的分布. 考虑到四体问题有 12 个自由度, 去掉质心平移自由度和集体绕质心转动的自由度(即 Euler 角 α, β, γ)之后, 还剩下 6 个内部自由度, 对应于 6 个广义的内部坐标. 其中的一个可选为超径(hyperra-

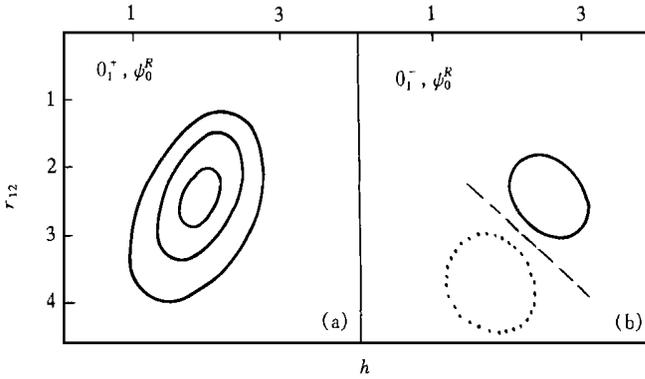


图 7 在锥形(CONE)子空间中 ψ_0 的分布

(a)中 $|\psi_0^+|$ 的最大值为单位 1. 等高线的意义与图 4 中的相同. 在 $h=h_0=\sqrt{2/3}r_{12}$ 处有最大值.

(b) 短划线代表内秉节面

dius), 用以描写整个系统的膨胀与收缩, 称之为呼吸模式. 在文献[11]中发现了这种模式, 但只存在于高激发态中. 由于本文主要研究较低激发态的性质, 可不考虑这种模式. 对于描写余下的 5 个内部自由度的广义坐标, 可以有不同的选择方式. 本文所选择的 5 个子空间已经足以充分地反映波函数在 ETH 邻域的行为. 发现所涉及的波函数往往在许多子空间中为零. 换言之, 这些波函数只在特定的很有限的子空间内分布(0^+ 态除外). 这是一个很重要的性质, 将在以下讨论.

4 低激发态的波函数在正方形构形及其邻域的行为

(i) 在图 3(a) 中令 r_{34} 固定, 令 $\overline{OO'}$ 为零(即四个粒子保持在一个平面上), 此时 ψ_0 为 r_{12} 及 $\varphi(r_{12}$ 与 r_{34} 的夹角)的函数(参见图 3(b)). 在这个子空间中 ψ_0 如图 8 所示. 图 8(a) 的峰值在正方形(SQ)处. 图 8(b) 的峰值在不等边的平行四边形(PARA)处(见图 3(e)), 表明 1_1^+ 态有 PARA 结构.

(ii) 在图 3(b) 中令 $r_{12}=r_{34}$ 及 $r_{12} \perp r_{34}$, 又令 4 个粒子保持共面结构, 但容许 R 在共面的平面内移动(见图 3(f)). 又令 R 与 r_{12} 的夹角为 η . 当 η 为 45° 时, 4 个粒子呈梯形, 当 η

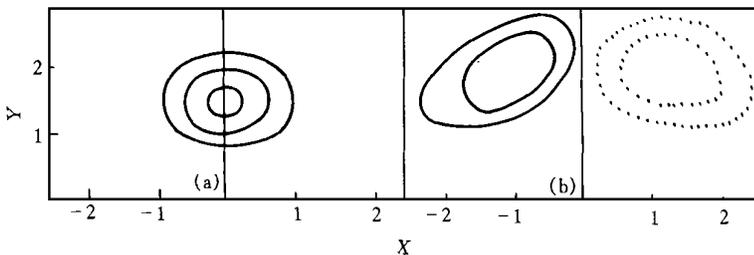


图 8 在平行四边形(PARA)子空间中 ψ_0 的分布

(a)中 $|\psi_0^+|$ 的最大值为单位 1. 等高线的意义与图 4 中的相同. 粒子 3 与 4 均固定在 X 轴上, 对称地分列其左右侧. 此时粒子 3 与 4 的质心, 1 与 2 的质心均重合于原点. ψ_0 则作为粒子 1 的位置的函数画出

为 90° 或 0° 时呈盾形. 通过观察 ψ_0 , 发现 1_1^- 态含梯形(及盾形)结构.

至此, 我们已对 0_i^+ , 0_i^- , 1_i^+ , 1_i^- 4 个系列的首态的结构作了比较充分的探讨. 发现 0^+ 在 ETH, SQ 及其邻域进行分布, 0^- 态则只在 TETH 形, 1^+ 态在 DETH 形及 PARA 形, 1^- 态在 DETH, WEDGE, CONE 等区域进行分布. 1^- 态同时兼含梯形和盾形为特征的共面结构. 归纳如表 1 所示.

表 1 几何结构的禁戒^{a)}

L^r	$ Q $	ETH	TETH	DETH	楔形 WEDGE	锥形 CONE	SQ	梯形 (盾形) TS(DUN)	不等边平 行四边形 (PARA)							
0_1^+	0	0.0073 $r = 2.4$ $R = 1.7$					0.0020 $r_{12} = 3.4$ $r_{34} = 3.4$ $\varphi = 90^\circ$									
0_1^-	0	0.00183 $r_{12} = 2.6$ $R = 1.9$ $\varphi = 50^\circ$														
1_1^+	1															
	0															0.00142 $r_{12} = 4.5$ $r_{34} = 2.0$ $\varphi = 64^\circ$
1_1^-	1										0.0025 $r_{12} = 2.6$ $R = 1.6$ $\theta = 60^\circ$				0.0013 $r_{12} = 3.0$ $R = 1.8$ $\eta = 63^\circ$	
	0				0.0042 $r_{12} = 2.1, 3.4$ $r_{34} = 3.4, 2.1$ $R = 1.5$	± 0.00083 $r_{12} = 2.6, 3.8$ $r_{34} = 2.3, 3.3$ $h = 2.5, 1.6$										

a) 表中斜线表示相应的结构在相应的 L^r 态的 ψ_0 成分中受禁戒(即 ψ_0 在该结构处为零). 白方格中的数字表明 ψ_0 在该处出现峰值. 格内第一个数为 ψ_0 的峰值. 其他数值表示峰值所在处的几何特征. 一个空的格表示 ψ_0 在该处不为零, 但不是峰值. 计算时取 $V_0 = 300\text{MeV}$

我们所得的种种“发现”均基于所设定的理论模型. 一个很自然的问题是这些“发现”的普遍性如何. 如果它们仅从属于特定的模型, 其意义自然不大; 反之, 若不依赖于特定的模型而具有普遍性, 就必然反映微观体系的内在规律. 值得注意的是在广阔的坐标空间内, 量子态的波函数仅分布在局部. 一个原因显然是动力学方面的, 为了使能量降低, 低激发态波函数必然围绕总位能最小值及其邻域进行分布, 0_1^+ 显然属于这种情况. 但对于另外一些态, 我们在多个子空间内都找不到它们的痕迹, 其波函数被完全从一些特定的区域内排挤出去(例

如 0^- 态被严格局限在 TETH 区域), 这是一个十分引人注目的特征, 显然不是动力学所能解释的, 其原因值得深究.

为了研究可能存在的“普遍性”, 我们对所用模型的动力学参数(相互作用强度, 力程, 质量等)作了大幅度的改动, 所得的结果在定量上也有了很大的变化, 但定性上不变. 例如, 我们将相互作用强度 V_0 减半, 由 300 变为 150, 再计算并分析本征波函数的结构特征. 发现波函数在空间分布的局限性(即在某些子空间严格为零)与动力学参数完全无关. 我们又对一些较高态 L_i^{π} ($i > 1$) 进行了探究, 发现波函数空间分布的局限性只与 L 和 π 有关, 而与下标 i 无关. 这说明已发现了一些超脱于动力学的因素, 因而有必要从更深刻的角度来认识问题.

5 对称性分析

为了揭示决定能谱结构和波函数分布特征的物理原因, 需要分析微观少体系统本身的对称性. 对于两体相互作用为(4)式的全同四 Bose 子系统, 总势能 $U = \sum_{i>j} V(r_{ij})$ 将在某些规则形状时有极小值(或条件极小值) U_{\min} . 显然, 低激发态波函数愿意靠近 U_{\min} 分布, 这导致对几何对称性的追求. 对于四 Bose 子系统, 有两种重要的规则形状(如图 3 所示): 正四面体(ETH)和正方形(SQ). 计算得到的 U_{\min} 表明^[12], ETH 是势能最低的形状, SQ 次之. 另一方面, 我们将看到, 系统同时受到量子力学内秉对称性(空间反演, 旋转, 粒子交换等)的制约. 对三体系统^[13~17] 和二维的四体系统^[18] 的研究表明, 量子力学内秉的对称性(QMS)对低激发态起决定性作用, 其作用超越理论模型, 超越动力学参数的影响, 它揭示和诠释了决定微观少体系统内部结构和运动模式的量子力学规律的深刻内涵.

如果四 Bose 子形成了图 3(a)所示的 ETH, 则有

(i) 空间反演加上绕 i' 轴旋转 180° 等价于 1, 2 互换和 3, 4 互换, 因而有

$$\pi(-1)^L \psi_0(\text{ETH}) = \psi_0(\text{ETH}) \quad (Q = -Q), \quad (13a)$$

这表明, 若 $\pi(-1)^L = -1$ 且 $Q=0$, 则 $\psi_0(\text{ETH})=0$. 于是节面在 ETH 组态出现(不管其大小和方向), 即这种 ψ_0 不能有 ETH 结构. 由于该节面源于内秉对称性, 称之为内秉节面.

(ii) 绕 k' 轴旋转 180° 等价于 1, 2 互换和 3, 4 互换, 有

$$(-1)^Q \psi_0(\text{ETH}) = \psi_0(\text{ETH}), \quad (13b)$$

此式表明, 若 Q 为奇数, 则 $\psi_0(\text{ETH})=0$, 即 Q 为奇数的分量不能有 ETH 结构.

(iii) 空间反演后再绕 k' 轴旋转 90° 等价于粒子的置换,

$$\pi(-i)^Q \psi_0(\text{ETH}) = \psi_0(\text{ETH}). \quad (13c)$$

(iv) 绕 i'' (平行于 r_{12} 和 r_{34} 之间的夹角 $\varphi=90^\circ$ 的平分线) 旋转 180° 等价于 1, 3 互换和 2, 4 互换, 有

$$i^Q(-1)^L \psi_0(\text{ETH}) = \psi_0(\text{ETH}). \quad (13d)$$

从(13a)~(13d)式可知, $0^-, 1^+$ 和 1^- 态都不能有 ETH 结构.

当四 Bose 子形成图 3(b)所示的 SQ 结构时, 有

(i) 绕 k' 旋转 90° 等价于粒子轮换, 因而

$$i^Q \psi_0(\text{SQ}) = \psi_0(\text{SQ}). \quad (14a)$$

(ii) 空间反演等价于 1, 2 互换和 3, 4 互换, 因而

$$\pi \psi_0(\text{SQ}) = \psi_0(\text{SQ}). \quad (14b)$$

(iii) 空间反演等价于绕 k' 旋转 180° , 因而

$$\pi \psi_0(\text{SQ}) = (-1)^Q \psi_0(\text{SQ}). \quad (14c)$$

(iv) 绕 i' 旋转 180° 等价于 3, 4 互换, 因而

$$(-1)^L \psi_0(\text{SQ}) = \psi_0(\text{SQ}). \quad (14d)$$

从(12)式可知, $0^-, 1^+$ 和 1^- 态都不能有 SQ 结构.

当四 Bose 子形成 TETH 结构时(此时 r_{12} 和 r_{34} 之间的夹角 $\varphi \neq 90^\circ$, 如图 3(c)所示), 有

(i) 绕 k' 轴旋转 180° 等价于 1, 2 互换和 3, 4 互换, 有

$$(-1)^Q \psi_0(\text{TETH}) = \psi_0(\text{TETH}). \quad (15a)$$

这使 Q 为奇数的 ψ_0 不能有 TETH 结构.

(ii) 绕 i'' (平行于 r_{12} 和 r_{34} 之间的夹角 φ 的平分线) 旋转 180° 等价于 1, 3 互换和 2, 4 互换.

$$e^{i\varphi Q} (-1)^L \psi_0(\text{TETH}) = \psi_0(\text{TETH}). \quad (15b)$$

这使 L 为奇且 $Q=0$ 的 ψ_0 不能有 TETH 结构. (13) 式表明 1^+ 与 1^- 态不能有 TETH 结构. 而 0^- 态可有 TETH 结构.

对于 DETH 结构, 它是图 3(a) 中的 3, 4 两粒子都向上或下运动, 但移动的距离不同使 $\theta \neq 90^\circ$ 所得到的形状. 对 DETH 结构, 空间反演继之以绕 j' 轴旋转 180° (k' 轴沿 $\overline{OO'}$ 方向) 等价于 1, 2 互换, 因而

$$\pi \psi_0(\text{DETH}) = (-1)^{L+Q} \psi_0(\text{DETH}), \quad (16)$$

这使得 $\pi(-1)^{L+Q} = -1$ 的 ψ_0 不能有 DETH 结构, 因而 0^- 态不能有 DETH 结构. 当四 Bose 子形成 WEDGE 结构时, 有

(i) 空间反演等价于绕 i' 旋转 180° 后再 3, 4 互换, 因而

$$\pi \psi_0(\text{WEDGE}) = (-1)^L \psi_0(\text{WEDGE}). \quad (17a)$$

这使得 $Q=0$ 且 $\pi(-1)^L = -1$ 的 ψ_0 不能有 WEDGE 结构.

(ii) 绕 k' 旋转 180° 等价于 1, 2 互换和 3, 4 互换, 因而

$$(-1)^Q \psi_0(\text{WEDGE}) = \psi_0(\text{WEDGE}), \quad (17b)$$

这使得 Q 为奇数的 ψ_0 不能有 WEDGE 结构. (15) 式表明 0^- 与 1^+ 态不能有 WEDGE 结构.

当四 Bose 子形成 CONE 结构(此时体轴的选取如图 3(d)所示), 有

(i) 绕 k' 旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 等价于 1, 2, 3 轮换, 因而

$$e^{-i2\pi Q/3} \psi_0(\text{CONE}) = \psi_0(\text{CONE}). \quad (18a)$$

(ii) 空间反演等价于绕 i' 旋转 180° 再 1, 2 互换

$$\pi \psi_0(\text{CONE}) = (-1)^L \psi_0(\text{CONE}), \quad (18b)$$

(16) 式表明 0^- 与 1^+ 不能有 CONE 结构.

当四 Bose 子形成梯形(TS)或盾形(DUN)结构时, 这两个共面结构都有一个对称轴, 使图形绕此轴转动 180° 不变. 令此对称轴为 i' 轴, 令 k' 轴垂直共面结构的平面, 即有

(i) 空间反演等价于绕 k' 旋转 180° ,

$$\pi \psi_0(\text{TS}) = (-1)^0 \psi_0(\text{TS}), \quad (19a)$$

(ii) 绕 i' 旋转 180° 等价于粒子互换,

$$(-1)^L \psi_0(\text{TS}) = \psi_0(\text{TS}). \quad (19b)$$

(17)式表明 0^- 与 1^+ 没有 TS(DUN)结构.

当四 Bose 子形成不等边的 PARA 结构(图 3(e))时, 有与(14b)和(14c)式相同的对称性.

综上所述, 可知波函数所具有的内秉对称性制约了波函数结构. 具体表现为在特定几何组态出现内秉节面, 使得特定的几何结构受到禁戒, 如表 1 所示.

对称性分析揭示了 0^+ , 1^+ 四个态的能谱结构和波函数分布特征的本质. 每个 L^π 态在追求能量最低结构的同时, 又受到对称性的限制. 从表 1 知, 0_1^+ 态是 ETH 可接受态, 波函数光滑分布在大小最优化的 ETH 附近, 没有节面出现. 所以 0_1^+ 态的能量(包括势能和动能)是最优化的, 能量最低, 特别稳定, 难于激发, 能隙特别大. 而其余三个 L^π 系列都是 ETH 结构禁戒的态, 在 ETH 处出现的内秉节面, 增加了动能. 当波函数被拒于内秉节面之外, 势能亦随之而增加, 结果总能量增加. 0_1^- 态除 TETH 结构外, 没有任何其他的规则几何结构, 整个坐标空间内充塞着各种各样的内秉节面, 因而它是能量最高的态.

6 结论

(1) 微观四 Bose 子系统的能谱和内部结构特征由量子力学内秉对称性和几何对称性共同决定. 从动力学来说要求总势能最小, 使系统具有对称的几何结构. 而量子力学对称性作为更普遍和更深刻的对称性, 与理论模型和动力学参数无关, 对微观少体系统起决定性作用, 在很大程度上决定了系统的能序和波函数在相空间的分布. 因此, 对任何微观少体系统(小至粒子物理中的夸克, 大至凝聚态物理中的团簇), 均可通过研究内秉节面, 在很大程度上预言其低激发态的结构特征.

(2) 量子力学内秉对称性通过内秉节面(INS)来实现对少体系统的制约. 每个 L^π 系列的第一态都追求最佳几何形状并逃逸内秉节面以使能量最低(因为波函数中所含节面越多, 内部运动就越激烈, 能量就越高). 内秉节面对波函数在坐标空间分布的严格限制, 可能导致两种相似性. 一是同一系统的某些量子态由于有相同的内秉节面结构而互相相似, 这将导致转动带的出现. 二是不同系统因受到类似的对称性的限制而互相相似, 这将导致能从同一的和更基本的观点去理解不同系统的行为. 这些方面的探讨将有待于以后的工作.

参 考 文 献

- 1 Willet R, Eisenstein J P, Stormer H L, et al. Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect. *Phys Rev Lett*, 1987, 59(15): 1 776
- 2 Stauffer L, Stebe B. Ground state energy of an exciton bound to an ionized donor impurity in semiconductor quantum wells. *Solid State Commun*, 1991, 80(12): 983
- 3 Que Weiming. Excitons in quantum dots with parabolic confinement. *Phys Rev*, 1992, B45(19): 11 036
- 4 Ashoori R C, Stormer H L, Weiner J S, et al. N -electron ground state energies of a quantum dot in magnetic field. *Phys Rev Lett*, 1993, 71(4): 613
- 5 Stebe B, Ainane A, Dujardin F. Landau levels of two-dimensional negatively charged three-particle Coulomb states. *J Phys*

- Condens Matter. 1996, 8: 5 383
- 6 Liu J J, Kong X J. Binding energy of neutral bound excitons in GaAs-Al_xGa_{1-x}As quantum wells. Phys Rev. 1997, B55: 1 349
 - 7 Ali S, Bodmer A R. Effective interaction between α -particles. Nucl Phys. 1966, 80: 99
 - 8 Tobocman W. Generalized Talmi-Monshinsky transformation for few-bodies and direct interaction matrix elements. Nucl Phys. A357. 1959, 13: 104
 - 9 Bao C G, Lim T K, Chao W Q. An analysis of the correlated densities in a system of four structureless α -particles. Nucl Phys. 1985, A439: 456
 - 10 Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 35 ~ 37
 - 11 Li P J, Bao C G, Lim T K. Preferred shapes and modes of internal motion in a four-boson system. Few-Body Systems. 1990, 9: 11
 - 12 Bao C G, Li X G, Xie W F. Analysis of the structure of low-lying states of four-boson systems based on symmetry. Few-Body Systems. 1998, 23: 201 ~ 222
 - 13 Bao C G. Comparison of the structures of an atomic three-valence-electron system with a nuclear three-valence-neutron system. Few-Body Systems. 1992, 13: 41
 - 14 Ruan W, Bao C G. Preferred shapes and modes of internal motion in a system of three identical fermions. Few-Body Systems. 1993, 14: 25
 - 15 Bao C G, Xie W F, Lin C D. Symmetry and low-lying intrashell states of three-valence-electron atoms. J Phys. 1994, B27: L193
 - 16 Li X G, Ruan W Y, Bao C G, et al. Classification of low-lying states of two-dimensional three-electron systems. Few-Body Systems. 1997, 22: 91
 - 17 Xie Wenfang, Bao Chengguang. An analysis of the symmetry in 3-boson systems. Science in China, Ser A, 1995, 38(9): 1 083
 - 18 Bao C G, Ruan W Y, Liu Y Y. Structures of low-lying states of a four-electron system in a quantum dot. Phys Rev. 1996, B53: 10 820