Taylor 定理余项中 的渐近性和拓广

周伟灿[1)]　王丽霞[2)]

(1) 南京气象学院基础科学系, 南京 210044; 2) 江苏理工大学, 镇江 212013)

摘　要　给出带有 $m-1$ 项断裂项 $n+m$ 阶 Taylor 定理余项中 的渐近估计, 其估计式为

$$= \begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}^{-\frac{1}{m}} + o(x)\text{。}$$

利用该估计式将 Taylor 定理推广为 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + f^{(n)}\left[{}_{n}x \right] \frac{x^n}{n!} + R_n$,

其中余项

$$R_n = \left[1 - \left(1 + \frac{n}{m+n} \right) {}_{m} \right] \frac{f^{(m+n+1)}(\quad)}{(m+n+1)!} x^{m+n+1}\text{。}$$

最后举例说明该推广在近似计算中的优越性。

关键词　渐近性, 拓广, 近似计算

分类号　O173. 1

微分中值定理、Taylor 定理无论在理论研究上还是在近似计算中都有十分重要的价值, G A Alfonso [1] 对 Taylor 定理 Lagrange 余项中 的渐近性作了详细的研究, Bemard Jacobson [2]、张广梵 [3] 等学者对微分、积分中值定理的渐近性进行了讨论。E I Poffald [4]、费荣昌 [5] 根据渐近估计式对 Taylor 定理进行了推广。本文进一步研究带有 $m-1$ 项断裂项 $n+m$ 阶 Taylor 定理余项中 的渐近性, 并利用渐近估计式将 Taylor 定理作进一步的推广, 并给出它在近似计算中的应用。首先指出 $m-1$ 项断裂项是指 Taylor 定理中的展开函数在展开点从 n 阶导数后有连续 $m-1$ 阶导数为零, 而 $n+m$ 阶导数不等于零。

Taylor 定理叙述如下

设 $f(x)$ 在领域 $o(a,\ )$ $(\ >0)$ 内有直到 n 阶导数, 对任意 $x \in o(a,\ )$ 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k + R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 为 Lagrange 型余项, 即

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \ (x-a))}{n!} (x-a)^n, (0 < \ < 1)$$

收稿日期: 1997-08-11; 改回日期: 1998-03-24

第一作者简介: 周伟灿, 男, 1959年10月生, 博士研究生, 副教授

1 Lagrange 余项中的渐近性

定理1 设函数 $f(x)$ 在领域 $o(a, \ )$ 内存在 n 阶导数，在 a 点存在 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n+1)}(a) \neq 0$，则对 Taylor 定理中关于 Lagrange 余项中的 有 $= \frac{1}{n+1} + o(x-a)$

证明 令 $F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

显然 $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$，且 $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$

考虑极限 $\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}}$，由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{F'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \cdots = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x\to a} \frac{F^{(n)}(x)}{x-a} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{x-a}$$

由于 $f(x)$ 在 a 点存在 $n+1$ 阶导数，故有

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \tag{1}$$

将 Taylor 定理代入 $F(x)$ 得

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}[a + (x-a)] - f^{(n)}(a)}{n!\,(x-a)} =$$

$$\frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \left\{ \frac{f^{(n)}[a + (x-a)] - f^{(n)}(a)}{[a + (x-a)] - a} \right\} = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a) \quad \lim_{x\to a} \tag{2}$$

比较(1)、(2)得 $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a) \quad \lim_{x\to a}$，注意到 $f^{(n+1)}(a) \neq 0$，于是有 $\lim_{x\to a} = \frac{1}{(n+1)!}$，即 $= \frac{1}{n+1} + o(x-a)$，定理1得证。

在很多文献中都有类似定理1的结论，但都要求 $f(x)$ 在 a 点有 $n+1$ 阶连续导数，而定理1只要求在 a 点存在 $n+1$ 阶导数，因此定理1的应用范围将更广，关于这一点将在例2中说明。

另外应该指出，定理1中条件 $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ 是充分条件，当该条件破坏时，其结论可能不成立。

例1：在定理1中取 $n=1$，且 $f(x) = x^2 \sin x$ 时，$f'(x) = 2x\sin x + x^2 \cos x$，$f''(x) = 2x\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x$，而由 Taylor 定理的 Lagrange 余项可知 $x^2 \sin x = [2(\ x)\sin(\ x) + (\ x)^2 \cos(\ x)]x$，$(0< \ <1)$，则 $3\lim_{x\to 0} {}^2 = 1$，即 $= 1/\sqrt{3} + o(x)$。显然与定理1的结论 $= 1/2 + o(x)$ 不相符，其原因是 $f''(0) = 0$ 不满足定理条件。

定理2 设 $f(x)$ 在某个领域 $o(a, \ )(\ >0)$ 内有直到 $n+m$ 阶导数，且 $f^{(n+j)}(a) = 0$，$(1 \le j < m)$，$f^{(n+m)}(a) \neq 0$，则对 Taylor 定理关于 Lagrange 余项 $R_n(x)$ 中的 有

$$= \binom{m+n}{n}^{-\frac{1}{m}} + o(x-a)$$

证明 令 $F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$，由于 $F^{(n+j)}(a) = 0$，$(1 \le j < m)$ 易得 $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = \cdots = F^{(n+m-1)}(a) = 0$，且 $F^{(n+m-1)}(x) = f^{(n+m-1)}(x)$

考虑极限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+m}}$, 由 L´Hospital 法则得

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+m}} = \frac{1}{(n+m)!} f^{(n+m)}(a) \tag{3}$$

又由 Taylor 定理 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}[a + \ (x-a)](x-a)^n$, $(0 < \ < 1)$ 代入 $F(x)$ 得 $F(x) = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(a + \ (x-a)) - f^{(n)}(a)](x-a)^n$, 对函数 $f^{(n)}[a + \ (x-a)]$ 运用 Taylor 定理, 并注意到 $F^{(n+j)}(a) = 0$, $(1 \leq j < m)$, 则有 $f^{(n)}[a + \ (x-a)] = f^{(n)}(a) + \frac{1}{(m-1)!} f^{(n+m-1)}[a + \ _1(x-a)] \ ^{m-1}(x-a)^{m-1}$, 其中 $0 < \ _1 < 1$,

所以 $F(x) = \frac{1}{n!(m-1)!} f^{(n+m-1)}[a + \ _1(x-a)] \ ^{m-1}(x-a)^{n+m-1}$

于是

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+m}} = \lim_{x \to a} \frac{^{m-1} f^{(n+m-1)}[a + \ _1(x-a)]}{n!(m-1)!(x-a)} =$$

$$\frac{1}{n!(m-1)!} \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f^{(n+m-1)}[a + \ _1(x-a)] - f^{(n+m-1)}(a)}{[a + \ _1(x-a)] - a} \ ^m \ _1 \right\} =$$

$$\frac{1}{n!(m-1)!} f^{(n+m)}(a) \lim_{x \to a} \ ^m \ \lim_{x \to a} \ _1 \tag{4}$$

由定理1知 $\lim\limits_{x \to a} \ _1 = \frac{1}{m}$, 代入(4) 得

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+m}} = \frac{1}{n!m!} f^{(n+m)}(a) \lim_{x \to a} \tag{5}$$

比较(3)、(5) 及 $f^{(n+m)}(a) \neq 0$ 得 $\lim\limits_{x \to a} \ = \frac{n!m!}{(n+m)!}$, 即有 $\ = \begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}^{-\frac{1}{m}} + o(x-a)$ 。

推论 设 $f(x)$ 在某区间 I 上, $f^{(n+m)}(x)$ 存在($n \geq 1$、$m \geq 1$) 且当 x、$a \in I$ 时, $f^{(n+m)}(x)$ 在 a 点连续, $f^{(n+m)}(a) \neq 0$, $f^{(n+j)}(a) = 0$, $(1 \leq j < m)$ 则 Taylor 定理对 Lagrange 型余项 $R_n(x)$ 中的 有 $\ = \begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}^{-\frac{1}{m}} + o(x-a)$ 。

推论是文献 [] 中的结论, 与定理2相比较只是条件 $f^{(n+m)}(x)$ 在 a 点处作了改动, 定理2中只是存在, 而推论中要求连续。显然后者包括前者, 从而定理比推论更广。为了说明这一点, 试看下例。

例2: 在定理2及推论中取 $m = n = 1$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

由计算得 $f''(x) = \begin{cases} 2 + 12x^2 \sin \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

易见 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某一领域存在二阶导数, 但 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 不连续。用 Taylor 定理将 $f(x)$ 在 $x = 0$ 展开至第一项得 $x^2 + x^4 \sin \frac{1}{x} = [2(\ x) + 4(\ x)^3 \sin \frac{1}{x} - (\ x)^2 \cos \frac{1}{x}]x$, 两边同除 x^2 得 $1 + x^2 \sin \frac{1}{x} = 2 \ + 4 \ ^3 x^2 \sin \frac{1}{x} - \ ^2 x \cos \frac{1}{x}$, 对上式取极限 $x \to 0$, 注意到

$(0< \quad <1)$ 从而得到 $= \dfrac{1}{2} + o(x)$ 。这里的 是直接估计出来的,没有用定理2,但其结果与定理2结论完全一致。事实上 $f(x)$ 在 $x=0$ 某一领域内满足定理2的所有条件,但 $f(x)$ 的二阶导数在 $x=0$ 不连续,故不满足推论的条件,因此估计该例中的 如用已得到的结论去求得,只能运用定理2,而推论在该例中显得无能为力。

2 Taylor 定理的拓广

记 $_{m} = \begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}^{-\frac{1}{m}}$

引理1 m、$n\in N$,固定 n,则有 $0< \ _{m} \leq \dfrac{m}{m+n}$

引理1可用数学归纳法证明。

引理2 设 $S(t) = \dfrac{x^{n}(x-\frac{t}{_{m}})^{m}}{(x-t)^{m+n}}$, m、$n\in N$, $x>0$, $t\in(0, \ _{m}x)$,则 $0<S(t)<1$

证明 显然 $S(t)>0$,对 $S(t)$ 两边取对数并求导数得

$$S'(t) = \left(-\frac{m}{_{m}x - t} + \frac{m+n}{x-t}\right) S(t) = \frac{h(t)}{(\ _{m}x-t)(x-t)} S(t)$$

其中 $h(t) = -m(x-t) + (m+n)(\ _{m}x - t)$,易证 $h(t)$ 是单调递减函数,

又 $h(0) = x(m+n)\left(-\dfrac{m}{m+n} + \ _{m}\right)$,由引理1知 $h(0)<0$,因此 $h(t)<0$,由此 $S(t)$ 也是单调递减函数,而 $S(0)=1$,故有 $S(t)<1$。

定理3 如果 $f^{(n+m)}(t)$ 在 $[0, x]$ 上连续,并且 $f^{(n+j+1)}(0) = 0$, $(1\leq j<m)$,则存在 $\in(0,x)$ 使得 $f(x) = \ _{n}(x) + R_{n}(x)$

其中 $_{n}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k} + f^{(n)}(\ _{m}x)\frac{x^{n}}{n!}$,

$$R_{n}(x) = \left[1 - \left(1+\frac{n}{m+1}\right) \ _{m}\right] \frac{f^{(m+n+1)}(\ )}{(m+n+1)!}x^{m+n+1}$$

证明 运用 Taylor 定理将 $f(x)$ 在 $x=0$ 点展开,并采用积分余项,注意到 $f^{(n+j)}(0)=0$, $(1\leq j<m)$ 则有

$$f^{(n)}(\ _{m}x) = f^{(n)}(0) + \frac{1}{m!}f^{(m+n)}(0)(\ _{m}x)^{m} + \frac{1}{m!}\int_{0}^{_{m}x} f^{(m+n+1)}(t)(\ _{m}x - t)^{m}\mathrm{d}t$$

将上式及 $_{m}$ 代入 $_{n}(x)$,所以

$$_{n}(x) = \sum_{k=0}^{m+n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k} + \frac{x^{n}}{(m+n)!}\int_{0}^{_{m}x} f^{(m+n+1)}(t)(\ _{m}x-t)^{m}\mathrm{d}t$$

另外,再对 $f(x)$ 运用 Taylor 定理可得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m+n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k} + \frac{1}{(m+n)!}\int_{0}^{x} f^{(m+n+1)}(t)(x-t)^{m+n}\mathrm{d}t$$

因此 $R_{n}(x) = f(x) - \ _{n}(x) =$

$$\frac{1}{(m+n)!}\int_{0}^{x} f^{(m+n+1)}(t)(x-t)^{m+n}\mathrm{d}t - \frac{x^{n}}{m!n!}\int_{0}^{_{m}x} f^{(m+n+1)}(t)(\ _{m}x-t)^{m}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{(m+n)!}\int_{0}^{_{m}x} f^{(m+n+1)}(t)(x-t)^{m+n}[1-S(t)]\mathrm{d}t + \frac{1}{(m+n)!}\int_{_{m}x}^{x} f^{(m+n+1)}(t)(x-t)^{m+n}\mathrm{d}t$$

由引理2及积分中值定理, 一定存在 $_1$, $_2 \in (0, x)$ 使得

$$R_n(x) = \left[1 - \left(1 + \frac{n}{m+1}\right)_m\right]\left[f^{(m+n+1)}(_1) + f^{(m+n+1)}(_2)\right] \frac{1}{(m+n+1)!} x^{m+n+1}$$

其中 $+ = 1$, $= \dfrac{(1 - _m)^{m+n+1}}{1 - \left(1 + \dfrac{n}{m+1}\right)_m}$

根据引理1易证 > 0, 而据 Bernoulli 不等式可证 < 1, 事实上

$$\frac{1}{(1 - _m)^{m+n+1}} = \left(1 + \frac{_m}{1 - _m}\right)^{m+n+1} > 1 + \frac{(m+n+1)_m}{1 - _m}$$

又由引理1可得

$$1 + \frac{(m+n+1)_m}{1 - _m} > 1 + \frac{(m+n+1)_m}{m + 1 - (m+n+1)_m} = \frac{1}{1 - \left(1 + \dfrac{n}{m+1}\right)_m}$$

所以0< < 1。再根据介值定理, 一定存在 $\in (0, x)$ 使得

$$R_n(x) = \left[1 - \left(1 + \frac{n}{m+1}\right)_m\right] \frac{f^{(m+n+1)}(\ )}{(m+n+1)!} x^{m+n+1}$$

3 定理3的应用

记 $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k$, 在近似计算中经常利用 Taylor 定理的前 n 项去近似代替原函数, 即用 $Q_n(x)$ 去近似代替 $f(x)$, 其余项为 $\frac{f^{(n)}(\ )}{n!} x^n$; 而文献 [4] 用 $Q(x) + f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right) \frac{x^n}{n!}$ 去近似 $f(x)$, 余项为 $\frac{n}{2(n+1)} \frac{f^{(n+2)}(\ )}{(n+2)!} x^{n+2}$; 文献 [5] 在有 $f^{(n+1)}(0) = 0$, 即存在一项断裂项时, 用 $Q(x) + f^{(n)}\left(\sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}\,x\right) \frac{x^n}{n!}$ 去近似代替 $f(x)$, 其余项为 $\left(1 - \left(\frac{n}{3} + 1\right)\sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}\right) \frac{f^{(n+3)}(\ )}{(n+3)!} x^{n+3}$。

如果 $f(x)$ 存在 $m - 1$ 项断裂项时则可用定理3的前 $n + 1$ 次近似 $f(x)$。当 $f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0$ 时, 在定理3中取 $n = 1, m = 3$, 在文献 [4, 5] 中也取 $n = 1$, 分别得到 $f(x)$ 的展开式

$$f(x) = f(0) + f'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} x\right) x + \left(1 - \frac{5}{4\sqrt[3]{4}}\right) \frac{f^{(5)}(\ )}{5!} x^5 \tag{6}$$

$$f(x) = f(0) + f'\left(\frac{x}{2}\right) x + \frac{f^{(4)}(\ )}{4!} x^4 \tag{7}$$

$$f(x) = f(0) + f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x\right) x + \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \frac{f^{(4)}(\ )}{4!} x^4 \tag{8}$$

而由 Taylor 定理得

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + \frac{f^{(4)}(\ )}{4!} x^4 \tag{9}$$

例3: 设 $f(x) = x + \ln(1 + x^4)$, 则 $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$, 由(6～9) 分别得 $f(x)$ 的近

似表达式为$f_1(x) = x + \dfrac{64x^4}{64 + x^4}$, $f_2(x) = x + \dfrac{8x^4}{16 + x^4}$, $f_3(x) = x + \dfrac{4\sqrt{3}x^4}{9 + x^4}$, $f_4(x) = x$。下面将$f(x) - x$, $f_i(x) - x$ $(i = 1,2,3,4)$ 在点$x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$上求数值解, 其解分别列表如下.

表**1** $\ln(1+x^4)$的近似计算表

Table 1 Approximate calculation of $\ln(1+x^4)$

	x						
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
精确值	0.000 099	0.001 599	0.008 067	0.025 278	0.060 625	0.121 864	0.215 192
(6) 式近似值	0.000 099	0.001 599	0.008 098	0.025 590	0.062 439	0.129 338	0.239 203
(7) 式近似值	0.000 499	0.000 799	0.004 048	0.012 779	0.031 128	0.064 279	0.118 275
(8) 式近似值	0.000 077	0.001 231	0.006 229	0.019 651	0.047 781	0.098 349	0.180 026
(9) 式近似值	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000

由上表可知(6)优越(8), 而(8)优于(7), (7)又优于(9)。因此在$f(x)$存在断裂项且x较小时定理3比其余三种渐近表达式精度可能更高。

参 考 文 献

1 Alfonso G A. On the lagranger remainder of the Taylor formula. American Mathematical Monthly, 1982, 89(5): 101～103

2 Bemard Jacobson. On the mean value theorem for integrals. A M M, 1982, 89(5): 300～301

3 张广梵. 关于微分中值定理的一个注记. 数学实践和认识, 1988, (1): 87

4 Poffald E I. The remainder in Taylors formula. A. M. M., 1989, 96(4): 205～213

5 费荣昌. 泰勒公式的拓广. 工科数学, 1992, 8(2): 70～72

ASYMPTOTIC CHARACTERISTIC AND POPULARIZATION OF TAYLOR THEOREM REMAINDER

Zhou Weican
(Department of Basic Courses, NIM, Nanjing 210044)

Wang Lixia
(Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212013)

Abstract Asymptotic estimation of Taylor theorem remainder is given through $m-1$ breaks in $n+m$ order by formula

$$= \left(\begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix}\right)^{-\frac{1}{m}} + o(x)$$

based on which Taylor theorem can be popularized into

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + f^{(n)}\left[\ _n x\right] \frac{x^n}{n!} + R_n$$

where R_n is the remainder,

$$R_n = \left[1 - \left(1 + \frac{n}{m+n}\right)_m\right] \frac{f^{(m+n+1)}(\ )}{(m+n+1)!} x^{m+n+1}.$$

Its superiority of extension in approximate computation is shown with examples.

Keywords asymptotic characteristic, popularization, approximate computation