



小世界网络上的自我质疑动力学演化博弈

杨波^{1,2*}, 张永文^{1,2}, 刘文奇^{1,2}, 陈晓松^{3,4}

1. 昆明理工大学数据科学研究中心, 昆明 650500;

2. 昆明理工大学理学院, 昆明 650500;

3. 中国科学院理论物理研究所, 理论物理前沿重点实验室, 北京 100190;

4. 中国科学院大学物理科学学院, 北京 100049

*联系人, E-mail: yangbo@kmust.edu.cn

收稿日期: 2018-02-03; 接受日期: 2018-02-26; 网络出版日期: 2018-04-09

国家自然科学基金(编号: 61573173)和昆明理工大学引进人才科研启动基金(编号: KKS201607047)资助

摘要 自我质疑更新规则是博弈个体对比各备选策略所得收益后选出最优策略的过程. 本文研究小世界网络上一类具有利他或恶意伤害属性的自我质疑演化博弈. 为获得长程连接和度的异质性对演化博弈模型的影响, 我们分别研究二维正方格子、以正方格子为基础构造的同质小世界网络(度分布不发生改变, 仅仅引入长程连接)和异质小世界网络(既有长程边也有度的异质性)三类空间结构. 通过Ising模型相变理论和蒙特卡罗模拟获得以下结论: 长程连接使博弈个体出现矛盾选择状态, 类似于物理中的阻挫; 度的异质性会影响作用在博弈个体上的外场, 邻居越多外场越大; 当存在正向外场时, 长程连接促进合作的产生, 而度的异质性抑制合作的产生.

关键词 Ising模型, 蒙特卡罗模拟, 自我质疑更新规则

PACS: 64.60.De, 05.40.Ca, 02.50.Le, 87.23.Ge, 64.60.aq

1 引言

策略更新规则和网络结构是空间演化博弈的两个研究热点^[1]. 传统的策略更新规则是通过模仿周围邻居本局的策略来决定自己下一局的策略, 包括学习邻居中收益最大的个体^[2]; 以一定的概率学习那些收益比自己高的个体们^[3,4]; 任意选择一个邻居, 比较收益差, 以较大的概率模仿收益高的个体^[5-7]. 自我质疑策略更新规则是在自身备选策略

中找出最优策略的过程^[8-10], 两策略博弈的具体操作为: 任意博弈个体先计算当前策略所得总收益, 然后采用自身反策略进行一次虚拟博弈, 并计算虚拟总收益, 通过比较当前博弈和虚拟博弈的收益差, 来决定自己下一局所采用的策略. 自我质疑更新规则与统计物理中Ising模型的单自旋翻转蒙特卡罗模拟方法十分类似, 基于此, 演化博弈模型与Ising模型的等价关系已经被找到^[11,12]. 值得一提的是, 经济学中广泛研究的随机最优反应均衡(Quantal Re-

引用格式: 杨波, 张永文, 刘文奇, 等. 小世界网络上的自我质疑动力学演化博弈. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 050501
Yang B, Zhang Y W, Liu W Q, et al. Self-questioning dynamical evolutionary game in small-world networks (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 050501, doi: [10.1360/SSPMA2018-00032](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00032)

sponse Equilibrium, QRE)与自我质疑机制十分类似, 它用随机反应代替传统的最优反应, 将纳什均衡作为它的一个特例进行处理 [13,14].

此外, 在社会生活中, 博弈者不可能只顾自身的收益而完全忽略自己合作伙伴的利益. 基于此, 我们引入了偏好参数 p , 即考虑自身收益的同时也以一定概率考虑合作伙伴的收益. $p > 0$ 时, 博弈个体具有利他性, 考虑自身收益的同时也兼顾对手的收益; $p = 0$ 时, 博弈个体只考虑自身收益; $p < 0$ 时, 博弈个体表现为损人不利己, 包含恶意, 自己得不到利益也不让别人得到利益. 在社会学和心理学模型中, 利他性已经得到了广泛研究 [15–20].

空间结构对演化博弈具有较大影响 [1,7]: 全连通网络上, 只要合作者的收益低于背叛者, 理性条件下, 博弈个体的最优选择必然是背叛, 从而整个博弈群体都会最终选择背叛; 二维规则网络上, 合作者通过形成团簇结构抵御背叛者的入侵 [2,3,21]; 小世界网络上, 长程边和节点度的差异性, 使其比规则网络更有利于合作的涌现 [22,23]; 无标度网络上, 大度节点首先被合作者占据, 紧接着受到大度节点的影响, 小度节点向收益远远高于自己的大度节点学习, 也将采用合作策略 [4,24,25]. 网络结构对演化博弈的影响, 主要由不同网络中长程连接的存在 [26]、网络度分布的异质性 [27]、度度相关性 [28]、聚类系数等统计特性引起的 [29]. 此外, 不少研究者把视角投向博弈规则和网络结构共同演化的研究中, 即网络结构随着博弈的进行不断发生变化, 删除博弈中长期背叛的节点或者断开与背叛者相连的边 [30–34]. 空间结构对具有偏好属性的自我质疑演化博弈的影响仍然未知. 本文将以小世界网络为切入点, 研究长程连接和度的异质性对演化博弈模型产生的影响. 为了便于比较, 我们将以二维正方格子为基础, 通过重连边的方法构造两类不同的小世界网络: 同质小世界网络(保证网络度不变的情况下, 加入了长程连接的作用)和异质小世界网络(既有长程连接的作用, 也有度异质性的作用).

本文内容安排如下: 第2部分首先引入模型, 并简要说明自我质疑演化博弈模型与Ising模型间的对应关系; 第3部分研究二维正方格子, 由二维正方格子重连边获得的同质小世界网络和异质小世界网络

上的自我质疑演化博弈; 第4部分得出结论.

2 模型

在两策略空间演化博弈模型中, 假设任意个体 i 有两种策略 $S_i = \pm 1$ 可供选择, 其中 $S_i = +1$ 表示合作, $S_i = -1$ 表示背叛. 两个博弈个体同时决定采用何种策略. 本文以弱囚徒困境为例: 相互合作获得收益 a ; 相互背叛收益为零; 混合选择中, 背叛者获得收益 $1 - a$, 合作者收益为零. 为满足囚徒困境和重复博弈的条件还需满足 $1/3 < a < 1/2$.

在重复博弈过程中, 任选博弈个体 i , 根据自我质疑机制决定是否改变当前策略. 即任意选定个体 i 后, 个体 i 采用当前策略与周围邻居博弈获得收益 g_i , 同时给邻居带来的总收益为 g'_i , 定义个体 i 的当前收益为 $G_i = g_i + pg'_i$, 其中参数 p 称为偏好参数, $p > 0$ 表示利他, $p < 0$ 表示恶意伤害, 损人不利己, $p = 0$ 则表示只考虑自身的自私个体; 然后, 采用当前策略的反策略与周围邻居进行一次虚拟博弈, 获得虚拟收益 G'_i (包括自身的虚拟收益和以 p 为权重的对手虚拟总收益). 最后, 个体 i 通过比较当前收益和虚拟收益, 以一定概率决定是否改变当前策略, 概率的选择为

$$W_i = \min\{1, e^{\frac{\Delta G_i}{T}}\}, \quad (1)$$

其中, $\Delta G_i = G'_i - G_i$, T 可以解释为理性参数或噪声强度.

在前期的研究中, 参考文献 [11] 已经推导得到与之等价的类Ising模型的有效哈密顿量:

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{4}(1 - 2a)(1 + p) \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + \frac{1}{4}(1 - 2a - p) \sum_i k_i S_i. \quad (2)$$

即耦合强度为 $J = -\frac{1}{4}(1 - 2a)(1 + p)$, 外场大小为 $h_i = -\frac{1}{4}(1 - 2a - p)k_i$.

从Ising模型的相变理论可知: (1) 耦合强度对应个体间的相互作用强度, $J > 0$ 称为铁磁相互作用(以自旋取向同方向为基态), 即噪声较小时, 系统表现为完全合作或完全背叛态; $J < 0$ 称为反铁磁

相互作用(以相邻自旋取向相反为基态), 即噪声较小时, 系统表现为合作者和背叛者成对出现, 相互依存; $J = 0$ 表示个体之间不存在相互作用(独立个体). (2) 外场是一种驱使自旋朝某一方向取向更占优的力场: $h_i > 0$ 驱使自旋 i 取向向上, 即促使博弈个体选择合作策略; $h_i < 0$ 驱使自旋 i 的取向向下, 即促使博弈个体选择背叛策略; $h_i = 0$ 表示不受到外界影响, 独立作出选择. (3) 当 $J > 0$ 时, 若 $h_i = 0$ 则系统处于完全合作或完全背叛状态, 两个状态相互对称; 若 $h_i \neq 0$, 则破坏了这种对称性, 系统的状态将随外场而定, 即 $h_i > 0$, 个体选择合作策略, $h_i < 0$, 个体选择背叛策略. (4) 当 $J < 0$ 时, 若 $h_i = 0$ 则系统处于合作者和背叛者交替出现的共存态, 若 $h_i \neq 0$, 则外场将和相互作用强度展开竞争, 外场强度较小时, 系统仍处于合作-背叛共存态; 外场强度等于临界外场时, 相互依存态和纯态(完全合作或完全背叛)随机共存; 外场强度较大时, 体系跟随外场的方向取完全合作或完全背叛的纯态, 临界外场的取值与网络结构密切相关 [35–44].

从耦合强度和外场的表达式可知, 耦合强度 J 只与博弈参数和利他参数有关, 与网络的空间结构无关. 外场 h_i 包含网络的度 k_i 且 $k_i > 0$, 即网络的空间结构不改变外场的方向, 不同个体受到的外场与邻居的个数相关, 度越大的节点受到外场的影响越大.

3 结果和讨论

小世界网络对博弈模型的影响是由长程边和节点度的异质性引起的. 为了便于与二维正方格子上的演化博弈模型进行对比, 研究者在二维网格的基础上通过随机重连边的办法获得小世界网络 [22], 包括同质小世界网络(Homogeneous Small-world Networks)也叫规则小世界网络和异质小世界网络(Heterogeneous Small-world Networks). 前者在保证网络中节点度不变的情况下引入长程连接, 后者属于 WS 小世界网络, 存在长程连接的同时, 度分布也具有异质性.

图 1 为二维正方格子的示意图, 以它为基础, 通过重连边可获得同质小世界网络(图 2)和异质小世界网络(图 3). 假设图 1 是 $L \times L$ 的正方格子, 节点总

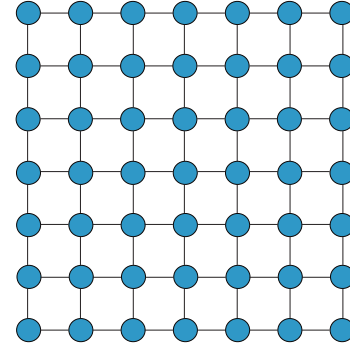


图 1 (网络版彩图)二维正方格子

Figure 1 (Color online) Two-dimensional square lattices.

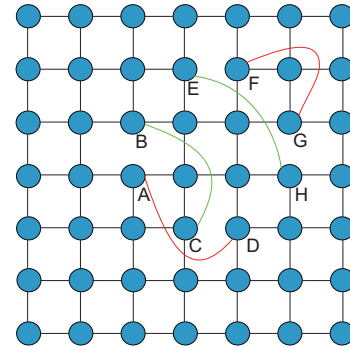


图 2 (网络版彩图)正方格子重连边获得同质小世界网络

Figure 2 (Color online) Homogeneous small-world networks.

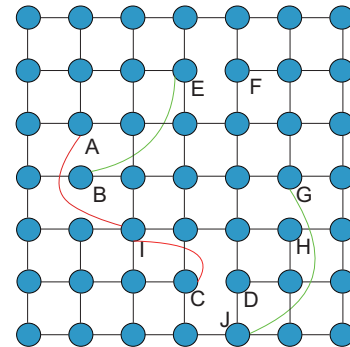


图 3 (网络版彩图)正方格子重连边获得异质小世界网络

Figure 3 (Color online) Heterogeneous small-world networks.

数为 N , 平均连接度为 z , 固定边的数量为 $E = Nz/2$.

同质小世界网络的构造方法: 首先引入一个无量纲的参数 f 表示边被随机重连的概率, $f = 0$ 表示规则图, 不做任何重连, 而 $f = 1$ 表示所有的边都被随机重连. 计算机算法包括以下两步, 迭代执行, 直

到有 fE 条边被随机重连为止. (1) 随机选择两条不同的边(前面没有被选过); (2) 交换两条边的终点. 如图 2 所示, 任意选择边AB和CD, 断开连接, 建立新的连接AD和CB.

异质小世界网络的构造方法: 以二维正方格子为基础, 以概率 f 随机地重新连接网络中原有的每条边, 即把每一条边的一个端点保持不变, 另一个端点改取为网络中随机选择的一个节点, 不能有重边和自环. 如图 3 所示, 断开短程的AB边, 建立长程的AI边.

在空间演化博弈模型的研究中, 通常选择合作者占比 f_{N_+} 作为观测量, 其表达式为

$$f_{N_+} = \frac{N_+}{N}, \quad (3)$$

其中, N 代表参与博弈的总人数, N_+ 代表总人数中采用合作策略的人数, N_- 代表总人数中采用背叛策略的人数, 满足关系 $N = N_+ + N_-$.

本文采用Metropolis算法, 在周期边界条件下, 分别对二维正方格子、同质小世界网络、异质小世界网络上的自我质疑演化博弈进行蒙特卡罗模拟. 空间格子的大小为 $N = 100 \times 100$, 用伪随机数生成任意初始构型后按照自我质疑机制进行演化. 首先, 随机选择群体中的任意博弈个体 i , 然后用自我质疑机制决定个体 i 是否改变当前策略, 重复以上操作, 直至系统趋于稳定状态为止. 为了保证计算的准确性, 扔掉前10000个蒙特卡罗步(N 次随机试验称为一个蒙特卡罗步). 计算接下来的 2×10^5 个蒙特卡罗步的平均值. 为消除初始条件对系统演化的影响, 再选择100个不同的初始构型进行系统平均.

3.1 二维正方格子上的演化博弈

二维正方格子是一种规则网络, 每个格点都有4个近邻, 将 $k_i = 4$ 带入有效哈密顿量的表达式可得

$$E_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i, \quad (4)$$

其中, 耦合强度 $J = -(1 - 2a)(1 + p)/4$, 外场 $h = 2a + p - 1$. 由以下3个方程可以获得博弈模型的基态

相图: (1) 耦合强度 $J = 0$, 解得 $a = 1/2$ 或 $p = -1$; (2) 外场 $h = 0$, 解得 $a = (1 - p)/2$; (3) 临界外场 $h = 4|J|$, $h = 4J$ 解得 $p = 0$, $h = -4J$ 解得 $a = 1/(2 + p)$. 如图 4 所示(参考文献[11]的Fig.1), 整个博弈空间包含3种相: 完全合作相(Ising中的铁磁序向上, 图中用4个向上的短箭头表示), 完全背叛相(铁磁序向下, 图中用4个向下的短箭头表示)和共存相(反铁磁序, 图中用向上向下交替的4个短箭头表示). 完全合作相和完全背叛相也称为纯相, 从图中可以看出纯相与共存相以反铁磁的两个临界外场($p = 0, a = 1/(2 + p)$)为分界线, 纯相以外场为零的直线($a = (1 - p)/2$)为分界线.

完全合作态、合作-背叛共存态和完全背叛态是该模型的3种基态. 完全合作态与合作-背叛共存态以 $a = 1/(2 + p)$ 为分界线, 分界线上的博弈个体将出现如图 5(a)中的矛盾状态, 即被合作者层层包围的个体选择合作和背叛具有相同的收益, 他们可以随机地选择自己的策略而不影响自身的收益. 从而

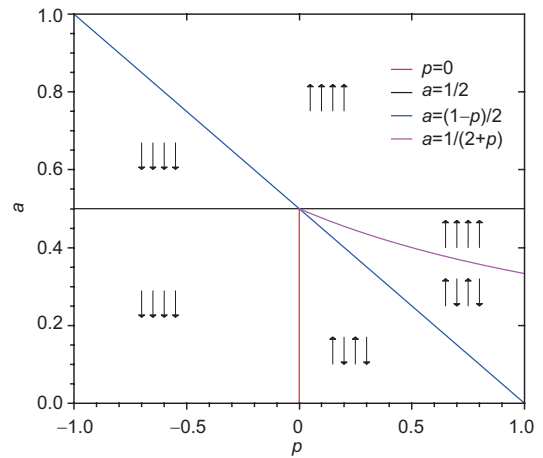


图 4 (网络版彩图)完全理性(零温)条件下博弈区域的划分(参考文献[11]的Fig.1). 图中存在3种状态: 4个完全向上的短箭头表示完全合作相(铁磁序向上); 4个完全向下的短箭头表示完全背叛相(铁磁序向下); 短箭头向上和向下交替出现表示合作-背叛共存相(反铁磁序)

Figure 4 (Color online) The ground state at zero temperature on the (a, p) parameter space (Ref. [11], Fig.1). Three phases can exist: four small upward arrows denote entirely cooperative phase (ferromagnetic order upward), four small downward arrows denote entirely defective phase (ferromagnetic order downward) and small arrows upward and downward alternatively denote cooperative and defective coexistence (anti-ferromagnetic order).

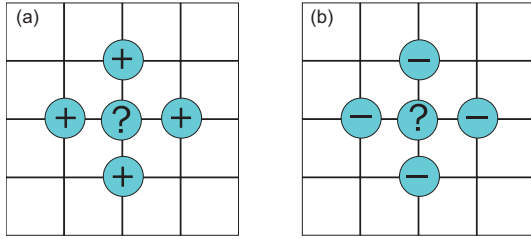


图 5 (网络版彩图)临界外场线上的矛盾状态. (a) 完全合作相与共存相分界线 $a = 1/(2 + p)$; (b) 完全背叛相与共存相的分界线 $p = 0$

Figure 5 (Color online) The disorder of choice for the individuals on the critical field lines. (a) The boundary between entirely cooperative phase and coexisting phase $a = 1/(2 + p)$; (b) the boundary between entirely defective phase and coexisting phase $p = 0$.

处于该分界线上的点合作者比率将大于背叛者的比率. p 或 a 参数的变化会打破这种被合作者团团包围着的个体所具有的这种对称性. 分界线以上的区域, 中心个体更愿意选择合作, 以期达到共赢的状态. 分界线以下的区域, 中心个体选背叛更为有利, 这样的个体抓住了周围人群比较善良的特点, 不断压榨和剥削着自己身边的合作者.

图 6表示: 零温时, 完全合作态与共存态分界线上任意一点 $a = 0.4, p = 0.5$ 的一种空间构型, 模型为 32×32 的二维规则方格点, 可以看到合作的人数明显多于背叛的人数, 合作者成团出现, 背叛者孤立出现. 图中群体总数为 $N = 1024$, 合作者占比为 $f_{N+} = 0.78$.

同理, 完全背叛态与合作-背叛共存态以 $p = 0$ 为分界线, 分界线上出现如**图 5(b)**所示的矛盾状态, 即被背叛者层层包裹的博弈者选择合作跟选择背叛具有相同的收益. 很明显, 在这样的情况下背叛者的比率大于合作者的比率. 而 p 参数的引入恰恰打破了这种对称性(被背叛者包围的个体具有随机性), $p > 0$ 时, 中心个体取合作能带来更大的利他收益, 即善良的个体愿意牺牲自己的利益, 让对手获得相应的收益. $p < 0$ 时, 中心个体选择恶意伤害周围的邻居, 自己得不到收益也不能让邻居白白占便宜.

图 7展示了完全背叛态与合作-背叛共存态分界线上任意一点的一种空间构型. 模拟中选择 $a = 0.4, p = 0$, 博弈总人数 $N = 1024$. 这种情况正好跟**图 6**相反, 背叛者占据上风, 合作者单独存在,

背叛者成团出现. 此时, 合作者占比为 $f_{N+} = 0.22$.

合作-背叛共存区域内存在一条外场为零的分界线 $a = (1 - p)/2$, 分界线以上受到正向外场的作用(即存在促进合作的外场), 而分界线以下受到反向外场的作用(即存在抑制合作促进背叛的外场).

此外, 两条分界线的交点($a = 0.5, p = 0$), 表

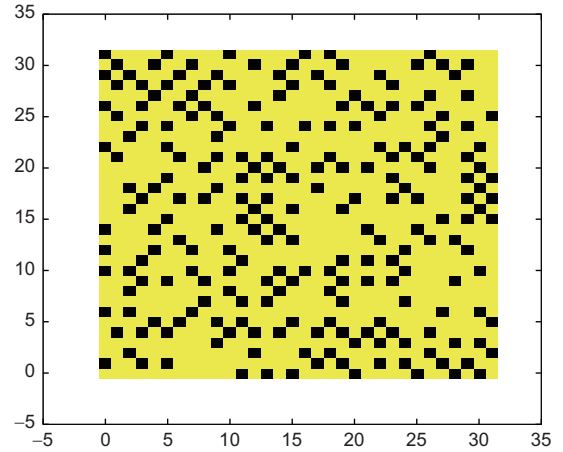


图 6 (网络版彩图)完全合作与合作-背叛共存态分界线上的一种空间构型, 图中浅色(黄色)和深色(黑色)表示博弈个体采用的两种状态, 浅色表示合作, 深色表示背叛

Figure 6 (Color online) A configuration on the borderline between entirely cooperative phase and coexisting phase, the yellow and black cubic block represent respectively adopting cooperative and defective strategy.

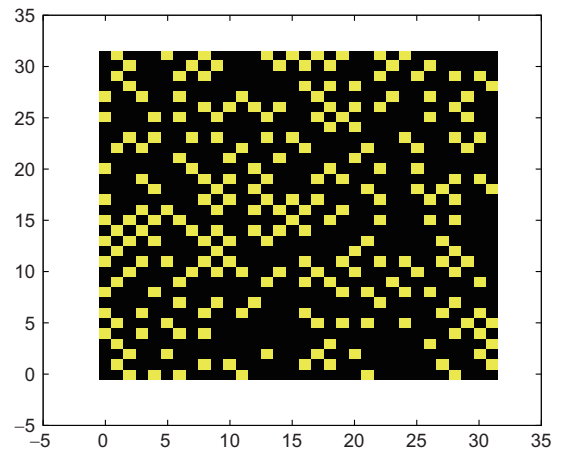


图 7 (网络版彩图)完全背叛与合作-背叛共存态分界线上的一种空间构型, 浅色(黄色)表示合作, 深色(黑色)表示背叛

Figure 7 (Color online) A configuration on the borderline between entirely defective phase and coexisting phase, the yellow and black cubic block represent respectively adopting cooperative and defective strategy.

现出一种完全独立、自由的特性, 即当任意博弈者遇到对手采用合作策略时, 如果采用合作, 那他将获得 $a = 0.5$ 的收益, 如果采用背叛, 那他将获得 $1 - a = 0.5$ 的收益, 这样的个体将随机做出判断; 而对于任意个体遇到背叛者, 他无论做出什么决策, 他都将得不到任何收益, 所以这样的个体也将采用随机策略. a 的变小直接导致了完全背叛态与合作-背叛共存态分界线的存在, 而 a 和 p 的共同作用导致完全合作态和合作-背叛共存态分界线的存在. 可以看出在某些特定区域, 即使背叛能获得更多的收益, 但由于偏好参数的存在, 人们仍然会选择合作策略, 说明偏好参数的引入能很好地促进合作的涌现.

接下来, 我们将任选合作-背叛共存区域中的一个参数点, 研究随着人的理性程度不断降低, 即人变得越来越浮躁(社会温度升高, 参数 T 变大), 人群中合作频率的改变. 在本文接下来的讨论中, 固定参数 $a = 0.35$, 讨论不同 p 值下合作频率随理性程度的变化.

图 8 显示了当 $a = 0.35$ 时合作占比随理性程度 T 的变化, p 的取值范围从 $p = -0.2$ 到 1, 共穿越了 3 个区域(完全合作、合作-背叛共存、完全背叛), 以 $p = 0$ 和 $p = 0.857$ 为分界线. 当 $T = 0$ 时, $p < 0$ 系统处于完全背叛区, $p \in (0, 0.857)$ 系统处于合作-背叛共存区, $p > 0.857$ 系统处于完全合作区. 随着温度的变化, 3 个区域表现出 4 种变化形式, 其中合作-背叛共存区又以零外场线为界, 即 $p = 0.3$. $p > 0.3$ 时,

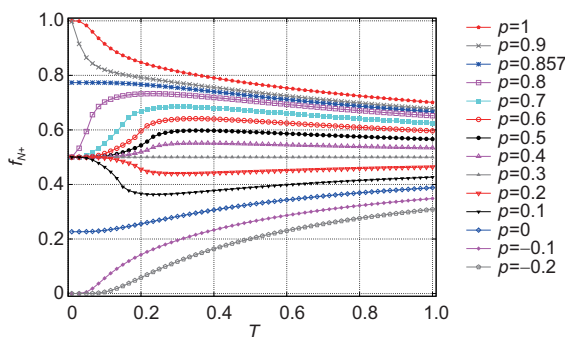


图 8 (网络版彩图) $a = 0.35$ 时, 不同偏好参数下, 合作者占比随噪声的变化

Figure 8 (Color online) Frequency of cooperators f_{N+} as a function of noise T for several preference parameter p in two-dimensional square lattices, at $a = 0.35$.

系统受到正向的作用力, 背叛个体更容易改变自己的策略, $p < 0.3$ 时, 系统受到负向的作用力, 合作个体更容易受到外界的影响. 4 个区域的性质如下.

(1) 完全合作区域($p > 0.857$): 图 8 中 $p = 0.9$, $p = 1$, 可以看到随着理性程度的逐渐降低(温度逐渐升高)合作者所占比率逐渐下降, 当温度足够高时系统进入完全随机状态, 即合作频率接近 0.5.

(2) 具有正向外场的合作-背叛共存区域($0.3 < p < 0.857$): 图 8 中 $p = 0.8$, $p = 0.7$, $p = 0.6$, $p = 0.5$, $p = 0.4$, 低温能够促进合作频率的升高, 主要由于受到正向外场以及温度的双重作用, 导致该区域中的背叛者更容易改变自己的策略, 群体向着正向发展. 合作频率的升高以 $p = 0.857$ 为上界, 即合作的频率总是低于 $p = 0.857$ 时的合作水平.

(3) 具有负向外场的合作-背叛共存区域($0 < p < 0.3$): 图 8 中 $p = 0.2$, $p = 0.1$, 低温抑制合作频率的升高, 主要由于受到负向外场以及温度的双重作用, 导致该区域中的合作者更容易改变自己的策略, 群体向着不良方向发展. 合作频率的降低以 $p = 0$ 为上界, 即合作的频率总是高于 $p = 0$ 时的合作水平.

(4) 完全背叛区域($p < 0$): 图 8 中 $p = -0.1$, $p = -0.2$, 可以看到随着理性程度的逐渐降低(温度逐渐升高)合作者所占比率逐渐升高, 当温度足够高时系统进入完全随机状态, 即合作频率接近 0.5.

3.2 同质小世界网络上的演化博弈

同质小世界网络与规则正方格子一样具有相同的度分布, 即每个格点具有相同的度, 差别仅仅在于规则小世界网络引入了长程连接. 为了和 3.1 部分的二维正方格子进行比较, 我们先研究, 不同偏好参数条件下, 合作者占比随社会温度的变化. 图 9 限定连边概率 $f = 0.1$, 总体上看跟二维规则格点类似, 但在两条分界线中间可以明显地看到, 零温时, 存在正向外场的曲线 $p = 0.7$ 的合作频率偏离中心点 0.5, 即这一区域合作频率得到了促进, 与之相反, 对于曲线 $p = 0.1$, 合作频率降低, 背叛得到促进. 为了深入研究的需要, 我们将图 9 的曲线划分为 4 个区域: (1) $p < 0$ 完全背叛区域, 物理上的铁磁向下区域; (2) $0 < p < 0.3$ 合作与背叛共存, 但是受到负向的外场,

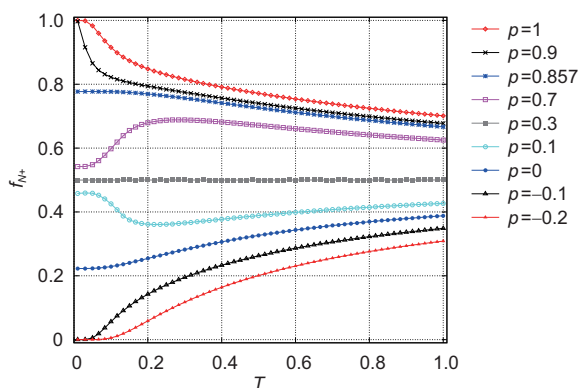


图 9 (网络版彩图) 同质小世界网络上, 合作者占比随噪声的变化

Figure 9 (Color online) Frequency of cooperators f_{N+} as a function of noise T for several preference parameter p in homogeneous small-world networks, at $a = 0.35$ and the fraction of rewired edges $f = 0.1$.

物理上反铁磁加负向外场; (3) $0.3 < p < 0.857$ 具有正向外场的合作背叛共存区, 即物理上的反铁磁加正向外场; (4) $p > 0.857$ 完全合作区域, 即物理上的铁磁向上。

从二维正方格子出发, 通过重连边获得规则小世界网络的过程, 是一个长程连接不断增多的过程, 不同的重连边概率将会引起合作者占比的变化。模拟发现, 在完全合作和完全背叛区域重连边对博弈模型的影响是很微弱的, 在合作背叛共存区域则有显著的影响。下面的研究将把研究重心放在合作背叛共存区域, 即物理上的反铁磁区域。

任选正向外场作用下, 合作背叛交错排列区域内的一个偏好参数值 $p = 0.7$, 研究合作者占比随温度的变化, 不同的连边概率 f 被考虑。图 10 展示了这一区域的一些演化性质。可以清晰地看到, 随着重连边概率的不断增多, 长程边不断增多, 低温时, 系统的合作频率得到一定的促进, 高温则没有太大影响。出现这种现象的原因是, 在反铁磁区域加入长程连接会诱导阻挫的出现, 使系统出现自旋玻璃相, 外场为零时, 阻挫个体随机选择策略, 外场的存在打破了这种随机对称性, 在正向外场的作用下, 阻挫个体偏向于与外场的方向保持一致, 所以在正向外场区域, 长程连接导致了阻挫个体的存在, 而外场又引导阻挫个体选择合作策略, 所以体系中合作者占比得到增强。可以预想, 当存在负向外场时, 体系的合作

者占比将会下降。计算机模拟结果很好地证明了我们的预想, 如图 11 所示, 随着重连边概率的增加, 合作频率逐渐降低, 也就是说在这一区域背叛得到了促进而合作受到了抑制。

如图 12 中所示, 标问号的个体可以选择加入左边的集团(选择背叛作为反铁磁基态), 也可以选择加入右边的集团(选择合作策略)。这和物理上的阻挫十分相似。外场的出现将会破坏这种矛盾选择状况, 即只有在外场为零的分界线上才会出现这种类似阻挫的现象。外场大于零时, 矛盾个体会选择合作策略, 外场小于零时, 矛盾个体选择背叛策略。

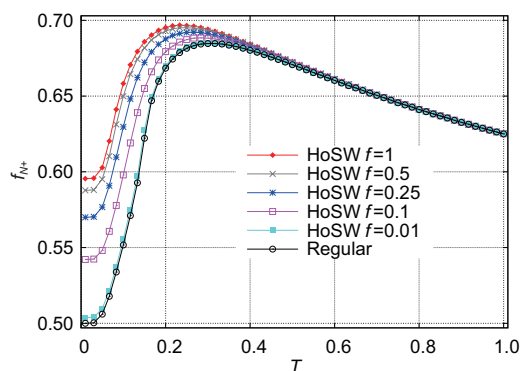


图 10 (网络版彩图) 正向外场作用下, 共存区内合作者占比随噪声的变化

Figure 10 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f which gives the fraction of edges to be randomly rewired, at $a = 0.35$ and $p = 0.7$.

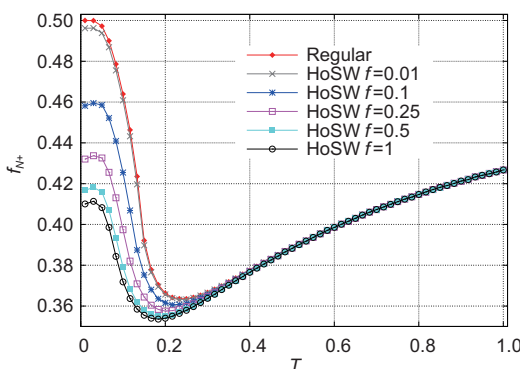


图 11 (网络版彩图) 负向外场作用下, 共存区内合作者占比随噪声的变化

Figure 11 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f , at $a = 0.35$ and $p = 0.1$.

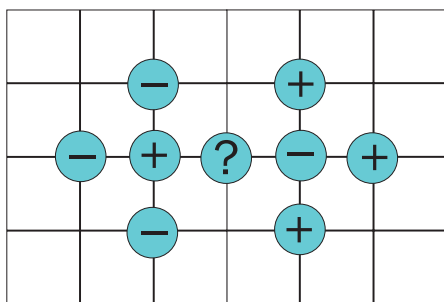


图 12 (网络版彩图) 博弈模型中的选择困惑

Figure 12 (Color online) The disorder of choice for the individuals in coexisting areas, which is similar to the state of frustration in spin glass phase.

图 10 显示, 随着连边概率不断增加合作者占比也持续增大. 原因是长程边的增加会引起阻错个体数量的增加, 由于外场的存在又导致阻错个体偏向于选择合作策略. 那么, 随着重连边概率的持续增大是否会带来合作者占比增长到接近于 1 呢? 显然, 这一极限情况将不会出现, 合作者占比的增长以分界线 $p = 0.857$ 为极限状态. 原因是图 12 和图 5 都伴随阻挫状态的出现, 但前者出现的难度比后者大, 后者作为前者的极限状态存在. 同理, 图 11 的极限状态为分界线 $p = 0$. 此外, 极值点对应的临界噪声强度可通过演化博弈模型的相变知识求解 [11].

综合上面研究可以得出结论: 在规则小世界网络模型上, 长程边的引入对完全合作和完全背叛区域的影响是很微弱的, 而对合作背叛共存区域则具有较强的影响. 其变化趋势跟随外场的方向, 在正向外场作用下, 合作得到了促进, 在负向外场作用下, 合作则受到抑制. 对比二维正方格点和规则小世界网络, 二者度分布相同, 区别仅在于长程边的引入, 从而得出结论: 在正向外场区域, 长程边促进了合作的涌现, 在负向外场区域, 长程边抑制了合作的涌现.

3.3 异质小世界网络上的演化博弈

前面的研究主要针对同质小世界网络(规则小世界网络), 接下来将讨论异质小世界网络, 异质小世界网络既有长程边的影响也有度异质性的影响, 因此, 本部分的研究暗含了两层因素的影响. 它们可能互相促进, 也可能互相抑制, 此消彼长, 相互竞争.

这部分我们仍然对 4 个区域进行分别讨论, 并讨论两条分界线上的演化性质.

通过对完全合作(图 13)和完全背叛区域(图 14)的研究发现, 在完全合作区, 小世界网络加速了背叛出现, 抑制了合作的涌现. 这与学习机制下度的异质性促进合作的涌现截然不同 [22]. 从规则小世界网络的研究发现: 长程边对完全合作区合作者占比几乎没有影响, 所以此处异质小世界网络对合作的抑制是由度异质性造成的, 也就是说, 度异质性的引入抑制了合作区合作的涌现. 而在完全背叛区

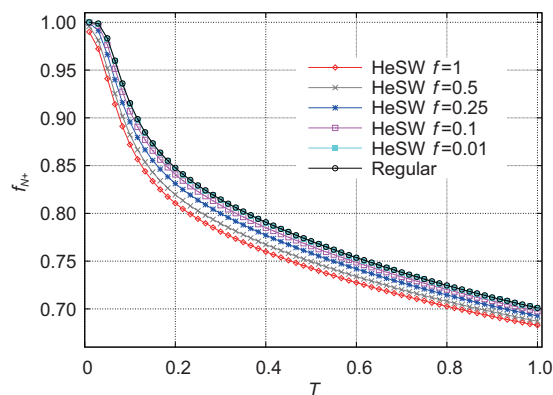


图 13 (网络版彩图) 完全合作区域内, 合作者占比随噪声的变化

Figure 13 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f in entirely cooperative areas.

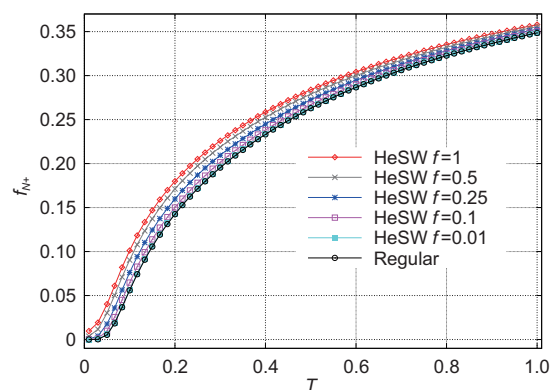


图 14 (网络版彩图) 完全背叛区域内, 合作者占比随噪声的变化

Figure 14 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f in entirely defective areas.

域, 则表现出相反的性质, 促进了合作的涌现, 抑制了背叛.

图 15 和 16 显示, 由于度的异质性, 带来了临界曲线的移动, 这样的现象在同质小世界网络中是没法看到的. 随着连边概率的不断增加, 合作区与共存区的分界线向下移动, 而共存区与背叛区的分界线向上移动, 共存区的大小被逐步压缩, 但仍然保持着分界线的作用. 图 17 显示了正向外场作用下的共存区内合作者占比随社会温度的变化, 随着连边概率的不断增加, 低温时, 合作者占比表现出非单调的特性, 当连边概率较低时, 长程边促进了合作的涌现, 随着连边概率增加, 度的异质性开始起负面效应, 导致合作者占比下降. 此外, 重连边在低温时促进了合作的产生, 而高温则抑制了合作的产生. 在图 18 中可以看到与图 17 相反的现象, 低温抑制合作, 高温促进合作.

通过前面的研究, 我们可以得出结论, 当存在正向外场时, 长程连边促进了合作的涌现, 而度的异质性则抑制了合作的产生. 当存在负向外场时, 长程连边抑制了合作的产生, 而度的异质性促进了合作的产生. 可以预想, 在共存区, 系统即受到长程连边的作用也受到度异质性的影响, 而二者的作用又恰恰

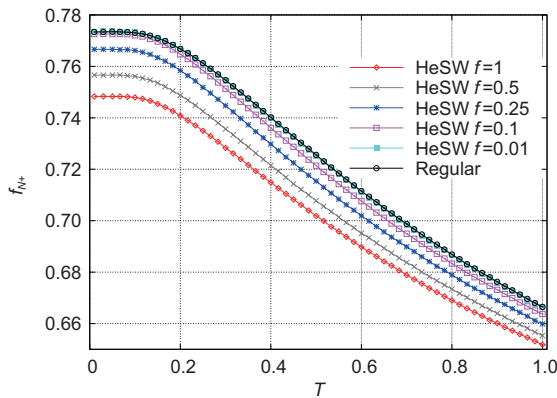


图 15 (网络版彩图)合作区与共存区分界线上, 合作者占比随噪声的变化

Figure 15 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f on the borderline between entirely cooperative phase and coexisting phase.

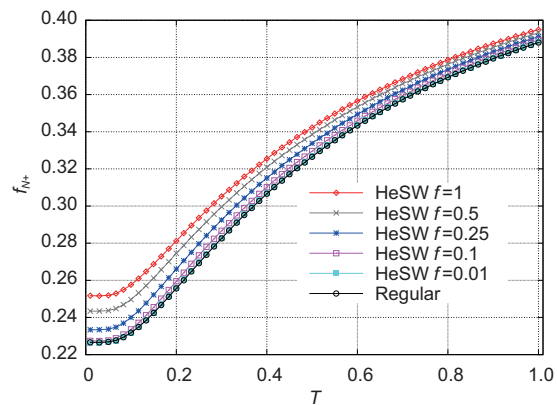


图 16 (网络版彩图)背叛区与共存区分界线上, 合作者占比随噪声的变化

Figure 16 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f on the borderline between entirely defective phase and coexisting phase.

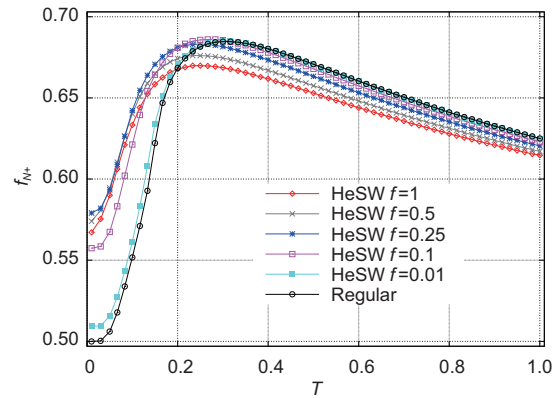


图 17 (网络版彩图)正向外场作用下, 共存区内合作者占比随噪声的变化

Figure 17 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f in coexisting areas with positive field.

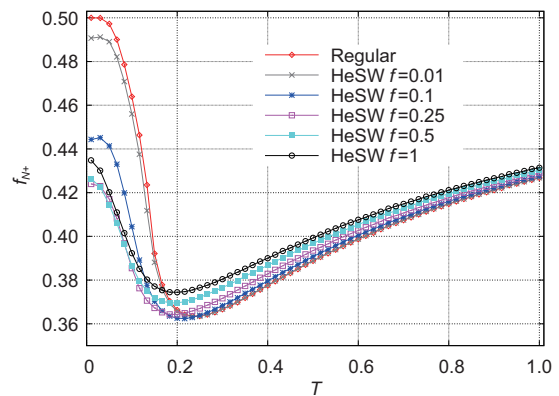


图 18 (网络版彩图)负向外场作用下, 共存区内合作者占比随噪声的变化

Figure 18 (Color online) f_{N+} as a function of T for several f in coexisting areas with negative field.

相反, 所以, 共存区应该是二者共同竞争, 相互影响后的结果. 图 17 和 18 分别展现了正向外场和负向外场两个区域的变化曲线. 可以看到, 当外场为正时, 温度较低时, 合作得到了促进, 而温度较高时, 合作受到了抑制, 即低温时, 长程边的影响比较强烈, 当温度升高到一定程度时, 度异质性起到较大的作用. 当外场为负时, 低温抑制了合作的涌现, 高温则促进了合作的涌现.

4 结论

分别研究了二维正方格子, 同质小世界网络和异质小世界网络上的自我质疑演化博弈, 由易到难, 从简单的二维正方格子出发, 并以此为模板通过重连边的形式构造小世界网络, 先在规则网络的基础上引入长程连接(同质小世界网络), 研究清楚长程

连接的作用后再引入度的异质性(异质小世界网络). 结果显示: 在正向外场作用下, 长程边将促进合作的产生, 而度的异质性将会抑制合作的产生. 这跟学习机制下所得结果完全相反, 原因是: 自我质疑机制比学习机制更加智能, 博弈者更理性地考虑自身收益状况, 而不是盲目地跟随周围的邻居. 此外, 本文还结合相应的类 Ising 模型对蒙特卡罗模拟结果进行了解释: 外场为零时, 长程边引发反铁磁系统出现阻挫状态, 阻挫个体出现选择矛盾, 即选择合作或背叛获得相同的收益. 外场非零时, 这种矛盾选择状态被打破, 外场为正时, 长程边促进了合作的产生, 外场为负时, 长程边抑制合作的出现; 度的异质性影响了作用在博弈个体上的外场, 加剧了个体间的差异性, 度较大的节点受到的外场较大, 稳定性较好, 而度较小的节点受到的外场小, 策略选择相对随意.

致谢 感谢编委与审稿人对本文初稿提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Szabó G, Fáth G. Evolutionary games on graphs. *Phys Rep*, 2007, 446: 97–216
- 2 Nowak M A, May R M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 1992, 359: 826–829
- 3 Hauert C, Doebeli M. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature*, 2004, 428: 643–646
- 4 Santos F C, Santos M D, Pacheco J M. Social diversity promotes the emergence of cooperation in public goods games. *Nature*, 2008, 454: 213–216
- 5 Szabó G, Töke C. Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice. *Phys Rev E*, 1998, 58: 69–73
- 6 Szabó G, Hauert C. Phase transitions and volunteering in spatial public goods games. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 118101
- 7 Szabó G, Vukov J, Szolnoki A. Phase diagrams for an evolutionary prisoner's dilemma game on two-dimensional lattices. *Phys Rev E*, 2005, 72: 047107
- 8 Wang W X, Ren J, Chen G, et al. Memory-based snowdrift game on networks. *Phys Rev E*, 2006, 74: 056113
- 9 Gao K, Wang W X, Wang B H. Self-questioning games and ping-pong effect in the BA network. *Physica A*, 2007, 380: 528–538
- 10 Liu Y K, Li Z, Chen X J, et al. Cross-disciplinary physics and related areas of science and technology: Evolutionary self-questioning games with local contribution. *Chin Phys Lett*, 2009, 26: 088902
- 11 Yang B, Li X T, Chen W, et al. Critical behavior of spatial evolutionary game with altruistic to spiteful preferences on two-dimensional lattices. *Commun Theor Phys*, 2016, 66: 439–446
- 12 Yang B, Fan M, Liu W Q, et al. Phase transition properties for the spatial public goods game with self-questioning mechanism (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2017, 66: 196401 [杨波, 范敏, 刘文奇, 等. 自我质疑机制下公共物品博弈模型的相变特性. *物理学报*, 2017, 66: 196401]
- 13 McKelvey R D, Palfrey T R. Quantal response equilibria for normal form games. *Games Econ Behav*, 1995, 10: 6–38
- 14 Zhuang Q, Di Z R, Wu J S. Stability of mixed-strategy-based iterative logit quantal response dynamics in game theory. *PLoS ONE*, 2014, 9: e105391
- 15 Levine D K. Modeling altruism and spitefulness in experiments. *Rev Econ Dyn*, 1998, 1: 593–622
- 16 Bester H, Güth W. Is altruism evolutionarily stable? *J Econ Behav Org*, 1998, 34: 193–209
- 17 Bolle F. Is altruism evolutionarily stable? And envy and malevolence? *J Econ Behav Org*, 2000, 42: 131–133
- 18 Possajennikov A. On the evolutionary stability of altruistic and spiteful preferences. *J Econ Behav Org*, 2000, 42: 125–129

- 19 Liu W Q. Modeling data quality control system for Chinese public database and its empirical analysis (in Chinese). *Sci Sin-Inform*, 2014, 44: 836–856 [刘文奇. 中国公共数据库数据质量控制模型体系及实证. *中国科学: 信息科学*, 2014, 44: 836–856]
- 20 Liu W Q. Public data evolution games on complex networks and data quality control (in Chinese). *Sci Sin-Inform*, 2016, 46: 1569–1590 [刘文奇. 复杂网络上的公共数据演化博弈与数据质量控制. *中国科学: 信息科学*, 2016, 46: 1569–1590]
- 21 Nowak M A, Sasaki A, Taylor C, et al. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. *Nature*, 2004, 428: 646–650
- 22 Santos F C, Rodrigues J F, Pacheco J M. Epidemic spreading and cooperation dynamics on homogeneous small-world networks. *Phys Rev E*, 2005, 72: 056128
- 23 Szabó G, Vukov J. Cooperation for volunteering and partially random partnerships. *Phys Rev E*, 2004, 69: 036107
- 24 Santos F C, Pacheco J M. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 098104
- 25 Santos F C, Rodrigues J F, Pacheco J M. Graph topology plays a determinant role in the evolution of cooperation. *Proc R Soc B-Biol Sci*, 2006, 273: 51–55
- 26 Ren J, Wang W X, Qi F. Randomness enhances cooperation: A resonance-type phenomenon in evolutionary games. *Phys Rev E*, 2007, 75: 045101
- 27 Tang C L, Wang W X, Wu X, et al. Effects of average degree on cooperation in networked evolutionary game. *Eur Phys J B*, 2006, 53: 411–415
- 28 Rong Z, Li X, Wang X. Roles of mixing patterns in cooperation on a scale-free networked game. *Phys Rev E*, 2007, 76: 027101
- 29 Rong Z, Yang H X, Wang W X. Feedback reciprocity mechanism promotes the cooperation of highly clustered scale-free networks. *Phys Rev E*, 2010, 82: 047101
- 30 Zimmermann M G, Eguíluz V M, San Miguel M. Coevolution of dynamical states and interactions in dynamic networks. *Phys Rev E*, 2004, 69: 065102
- 31 Zimmermann M G, Eguíluz V M. Cooperation, social networks, and the emergence of leadership in a prisoner's dilemma with adaptive local interactions. *Phys Rev E*, 2005, 72: 056118
- 32 Helbing D, Yu W. From the Cover: The outbreak of cooperation among success-driven individuals under noisy conditions. *Proc Natl Acad Sci*, 2009, 106: 3680–3685
- 33 Meloni S, Buscarino A, Fortuna L, et al. Effects of mobility in a population of prisoner's dilemma players. *Phys Rev E*, 2009, 79: 067101
- 34 Yang H X, Wu Z X, Wang B H. Role of aspiration-induced migration in cooperation. *Phys Rev E*, 2010, 81: 065101
- 35 Fisher M E. The theory of equilibrium critical phenomena. *Rep Prog Phys*, 1967, 30: 615–730
- 36 Müller-Hartmann E, Zittartz J. Interface free energy and transition temperature of the square-lattice Ising antiferromagnet at finite magnetic field. *Z Physik B*, 1977, 27: 261–266
- 37 Wu X N, Wu F Y. Critical line of the square-lattice antiferromagnetic Ising model in a magnetic field. *Phys Lett A*, 1990, 144: 123–126
- 38 Wu F Y, Wu X N, Blöte H W J. Critical frontier of the antiferromagnetic Ising model in a magnetic field: The honeycomb lattice. *Phys Rev Lett*, 1989, 62: 2773–2776
- 39 Wang X Z, Kim J S. The critical line of an Ising antiferromagnet on square and honeycomb lattices. *Phys Rev Lett*, 1997, 78: 413–416
- 40 Penney S J, Cumyn V K, Betts D D. A new method for the antiferromagnetic Ising model's properties at any temperature and any magnetic field on the infinite square lattice. *Physica A*, 2003, 330: 507–518
- 41 Metcalf B D, Yang C P. Degeneracy of antiferromagnetic Ising lattices at critical magnetic field and zero temperature. *Phys Rev B*, 1978, 18: 2304–2307
- 42 Kim S Y. Ising antiferromagnets on honeycomb and square lattices in the critical magnetic field. *J Korean Phys Soc*, 2012, 61: 1950–1955
- 43 Kim B J, Hong H. Dynamic phase transition of the globally-coupled kinetic Ising model in the low-frequency region. *J Korean Phys Soc*, 2008, 52: 203–208
- 44 Hwang C O, Kim S Y, Kang D, et al. LETTER: Ising antiferromagnets in a nonzero uniform magnetic field. *J Stat Mech*, 2007, 2007: L05001

Self-questioning dynamical evolutionary game in small-world networks

YANG Bo^{1,2*}, ZHANG YongWen^{1,2}, LIU WenQi^{1,2} & CHEN XiaoSong^{3,4}

¹Data Science Research Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China;

²Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China;

³Key Laboratory of Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

⁴School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Self-questioning update rules is the selected process of the optimal strategy of the individuals by comparing the payoff from various alternative strategies. In this paper, a self-questioning dynamical evolutionary game with altruistic or spiteful preferences via weighted sums of own and opponent's payoffs is studied. In order to obtain the influence of long-range connections and degree heterogeneity on evolutionary game model, we study three kinds of spatial structure: the two-dimensional lattice, homogeneous small-world networks (only the introduction of long-range connections) and heterogeneous small-world networks (both long-range connections and degree heterogeneity). Through the Ising model theory and Monte Carlo simulation the following conclusions are obtained: long-range connections make the individuals perplex in strategic choice which is similar to the state of frustration in spin glass; the degree heterogeneity makes the different individual has the different field (the more neighbours, the larger of field); when the field is positive, long-range connections promote cooperation, but the heterogeneity of degree inhibits the production of cooperation.

Ising model, Monte Carlo simulations, self-questioning update rules

PACS: 64.60.De, 05.40.Ca, 02.50.Le, 87.23.Ge, 64.60.aq

doi: [10.1360/SSPMA2018-00032](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00032)