

叶轮机械设计自变数在内外环壁面上的限制条件及轴流式叶轮机械 S_1 流面的翘曲

蔡 睿 贤

(中国科学院工程热物理研究所,北京)

摘 要

本文利用中心流面法的概念,指出叶轮机械设计自变数在内、外环壁面上应有附加的限制条件,并导得其具体简明方程。同时,还定性地分析了 S_1 流面的翘曲情况。

主 要 符 号

B	叶栅轴向宽度	W	相对速度
F	流面力	z	轴向坐标
h	叶高	β	$\arctg(V_\varphi/W_t)$
k	阶数	γ	$\arctg(-F_r/F_\varphi)$
l	子午面上流线向坐标	λ	$\arctg(-F_z/F_\varphi)$
n	子午面上流线法向坐标	ξ	$\nabla \times V$
r	半径、径向坐标	ρ	密度
S	栅距	σ	$\arctg(W_r/W_z)$
V	绝对速度	φ	叶轮机械切向坐标

上标

— 流面上偏导数

下标

l	l 向分量	φ	φ 向分量
n	n 向分量	1	叶栅前
r	r 向分量	2	叶栅后
z	z 向分量		

一、叶轮机械在 S_2 流面上的设计自变数

叶轮机械气动计算设计的经典文献[1]中正确地指出:当流面的流片厚度分布已定下,在

中心 S_2 流面上的设计自变数只能有一个,不可能再行另定其它任何设计条件. 这是叶轮机械气动热力学的最主要的结论或定律之一,在理论与实践上都有重大的价值.

文献[1]中还提出了中心流面法的概念,并给出了具体公式. 其基本想法是: 当某一个选定(中心) S_2 流面上的流动情况已给定时,即可通过流动基本方程导得各物理参数沿切向的各阶偏导数公式,并通过 Taylor 级数展开而求定流场及叶片几何形状. 其二元简化特例——中心流线法早已在工程上得到了广泛的应用^[2,3].

中心流面法是完全三元的. 它不要求 S_1 流面是任意迴转面. 或者反过来说,除非有一定的限制条件,由中心流面法展开所得的 S_1 流面一般不是任意迴转面. 但是如考虑在叶轮机械的内、外环面(最内及最外的 S_1 流面)上应用此法时,很明显,展开所得的 S_1 流面应该是任意迴转面,否则就不能构成合理的机匣(气缸)或转子轮毂形状. 由此可见,为保证叶轮机械流道的内、外壁面是合理的迴转面, S_2 流面上的唯一可选自变数在壁面上的分布,还得加上一些限制条件.

二、叶轮机械内、外环壁面上设计自变数限制条件的公式

如定义:

$$\sigma = \arctg(W_r/W_z), \tag{1}$$

则显而易见,内、外环壁上应有:

$$\frac{\partial^k \sigma}{\partial \varphi^k} = 0, \tag{2}$$

这就是叶轮机械内、外环壁上所要求附加的物理限制条件. 现在我们要把它转化为以气动设计自变数表达的形式.

由(1)式可得:

$$\frac{\partial \sigma}{r \partial \varphi} = \frac{1}{W_t} \left[\cos \sigma \frac{\partial W_r}{r \partial \varphi} - \sin \sigma \frac{\partial W_z}{r \partial \varphi} \right]. \tag{3}$$

又按旋量公式,有

$$\frac{\partial W_z}{r \partial \varphi} = \xi_r + \frac{\partial(V_{\varphi r})}{r \partial z}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial W_r}{r \partial \varphi} = \frac{\partial(V_{\varphi r})}{r \partial r} - \xi_z. \tag{5}$$

将(4),(5)两式代入(3)式,可得(文献[4]为论证 S_1 流面翘曲,已得出类似公式):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{r \partial \varphi} = \frac{1}{W_t} & \left[\frac{\partial(V_{\varphi r})}{r \partial r} \cos \sigma \right. \\ & \left. - \frac{\partial(V_{\varphi r})}{r \partial z} \sin \sigma - \xi_z \cos \sigma - \xi_r \sin \sigma \right]. \tag{6} \end{aligned}$$

在图 1 的坐标系中,显而易见:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \sigma \frac{\partial}{\partial r} - \sin \sigma \frac{\partial}{\partial z}$$

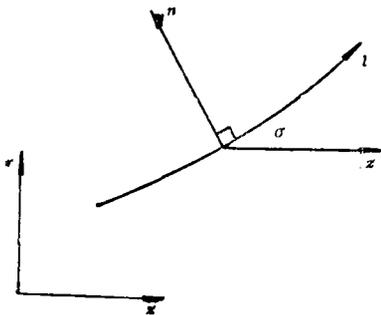


图 1 坐标系

及 $\xi_2 \cos \sigma + \xi_1 \sin \sigma = \xi_{i_0}$. 所以(6)式最后可简化为:

$$\frac{\partial \sigma}{r \partial \varphi} = \frac{1}{W_i} \left[\frac{\partial(V_{\varphi} r)}{r \partial n} - \xi_i \right]. \quad (7)$$

这就是大致判断 S_1 流面翘曲程度的最简化表达式. 而令 $\frac{\partial \sigma}{r \partial \varphi} = 0$, 得:

$$\frac{\partial(V_{\varphi} r)}{\partial n} = r \xi_i, \quad (8)$$

即所求的叶轮机内、外环壁上对设计自变数所需附加的一阶限制条件最简化形式.

(8) 式其实也可更简单地直接由 l 向旋度的公式 $\xi_i = \frac{\partial(V_{\varphi} r)}{r \partial n} - \frac{\partial V_n}{r \partial \varphi}$ 求得: 在环壁条件下应有 $V_n = 0$ 及 $\frac{\partial V_n}{\partial \varphi} = 0$, 于是同样可得(8)式. 但通过前面的推导办法, 得出的(6)和(7)式还可供以后分析翘曲情况之用.

在一般的设计中还进一步假定流体无粘性, 且 $\xi = 0$ 时, 这个限制条件更简化为物理概念很简单的:

$$\frac{\partial(V_{\varphi} r)}{\partial n} = 0, \quad (9)$$

亦即速度矩 $V_{\varphi} r$ 沿环壁法向的变化率为 0. 而在“纯”轴流或“纯”径流叶轮机中, 当内、外环壁面分别为 $r = \text{常数}$ 的圆柱面或 $z = \text{常数}$ 的平端面时, 再分别简化为:

$$\frac{\partial(V_{\varphi} r)}{\partial r} = 0$$

或

$$\frac{\partial(V_{\varphi} r)}{\partial z} = 0.$$

(8) 式只保证 σ 对 φ 的一阶偏导数值为 0. 为得出保证 σ 对 φ 的高阶偏导数值为 0 的条件, 可将(7)式两边逐次对 φ 求偏导数并令为 0, 且注意到这时的低阶 $\frac{\partial^k \sigma}{\partial \varphi^k}$ 已令为 0, 即可得在环壁上保证 $\frac{\partial^k \sigma}{\partial \varphi^k} = 0$ 的限制条件为:

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial \varphi^{k-1}} \left[\frac{\partial(V_{\varphi} r)}{\partial n} \right] = r \frac{\partial^{k-1} \xi_i}{\partial \varphi^{k-1}}. \quad (8a)$$

当 $V_{\varphi} r$ 为空间的高阶连续函数时, 则

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial^{k-1}(V_{\varphi} r)}{\partial \varphi^{k-1}} \right] = r \frac{\partial^{k-1} \xi_i}{\partial \varphi^{k-1}}. \quad (8b)$$

由此可见, 在环壁附近 $V_{\varphi} r$ 的变化是有较严格的限制的.

但如在全环壁上都能满足(8)式, 其实也就相当于满足了 $\frac{\partial^k \sigma}{\partial \varphi^k} = 0$ 的条件了. 因为如沿环面上都有 $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0$, 那么当然在此环面上 $\frac{\partial^k \sigma}{\partial \varphi^k}$ 也一定为 0. 所以在文献[1]的体系内, 全环壁上必须要满足的设计自变数限制条件是(8)式.

当应用中心流面法时, 需要在某一选定的 S_2 流面上规定环壁条件, 则还要考虑下述特

点: 只能用沿该流面上的偏导数值来保证(2)式中的各阶 ($k \geq 1$) 情况。这时就不能直接使用(8)式。为此可与上述类似地将(3)式逐次对 φ 求偏导数, 并令为 0, 且注意到这时低阶的 $\frac{\partial^k \sigma}{\partial \varphi^k}$ 已令为 0, 即可得相当(2)式的公式为:

$$\frac{\partial^k W_r}{\partial \varphi^k} - \frac{\partial^k W_z}{\partial \varphi^k} \cdot \operatorname{tg} \sigma = 0. \quad (10)$$

再将中心流面法^[1]所得的分速度各阶偏导数方程代入(10)式, 即可得所需公式。例如为保证一阶的 $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0$, 可将文献[1]中的(120)及(121)式代入 $k = 1$ 的本文(10)式, 而得出内、外壁上应有:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial r} - r \xi_z \right] (\sec^2 \lambda - \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \gamma) \\ & - \left[\frac{\partial(V_{\varphi z})}{\partial z} + r \xi_r \right] \cdot (\operatorname{tg} \sigma \sec^2 \gamma + \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \gamma) \\ & \cdot (\operatorname{tg} \gamma + \sigma \lambda \operatorname{tg} \sigma) = 0, + \left[\frac{\partial(\rho W_{r r})}{\rho \partial r} + \frac{\partial(\rho W_{z r})}{\rho \partial z} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

其中 λ 和 γ 为流面倾角:

$$\operatorname{tg} \lambda = -F_z / F_{\varphi}, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = -F_r / F_{\varphi}. \quad (13)$$

(11)式和(8)式是完全相当的。如果一开始就在 S_2 流面上考虑内、外环壁上的限制条件, 而先得出(11)式, 同样也可以通过数学推导得出简单的(8)式。

在中心流面法中实际应用(11)式时, 由于式中各参数还另有关连关系, 所以是需要迭代求解的。

三、轴流式叶轮机械 S_1 流面的翘曲

文献[1]中早已指出, S_1 流面的翘曲程度随叶道内流程长度、 $V_{\varphi r}$ 的变化率及 ξ 三者的增大而增大。文献[4]得出了类似于(6)式的方程可大致估定翘曲。本文下面将利用(6)式并根据轴流式叶轮机械的通常选用参数值, 在数量级上大致定量估计 S_1 流面的翘曲。

大致计算叶轮机械时通常可设 $\xi = 0$, 所以下面的分析忽略了 ξ 的影响。

如考虑一般的轴流式叶轮机械(参阅图2), 则其叶道中 S_1 流面上相对于中心流线的最大相对翘曲量(约在平均半径处)可大致写为(因 σ 较小, 故 $\sin \sigma \doteq \sigma$, $\cos \sigma \doteq 1$):

$$\frac{\Delta r}{r} \doteq \frac{B \Delta \sigma}{r} \doteq \frac{B}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \Delta \varphi \doteq \frac{B}{r} \frac{S}{2r} \left[\frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial r} - \sigma \frac{\partial(V_{\varphi z})}{\partial z} \right] \frac{1}{W_i}. \quad (14)$$

先考虑自由旋流流型, 则(14)式可写成:

$$\frac{\Delta r}{r} \doteq B \sigma \frac{S}{2r} \frac{1}{W_i} \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial z} \doteq B \sigma \frac{S}{2r} \frac{(\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1)}{B}.$$

按以前的计算经验, 轴流式压气机中流线波动引起的 $B \sigma$ 最大值约为 $0.01h^{[5]}$, 所以上式可再化为:

$$\frac{\Delta r}{r} \doteq 0.005 \frac{h}{r} \frac{S}{B} (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1). \quad (15)$$

一般的压气机级大致有: $h/r < 1$, $S/B \doteq 1$, $|\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1| \doteq 0.5$ 。所以由(15)式可见, 这时的

相对翘曲是 10^{-3} 的数量级,基本可忽略不计. 对于自由旋流透平级, $|\text{tg } \beta_2 - \text{tg } \beta_1|$ 较大, $B\sigma$ 也可能比 $0.01h$ 略大;但叶片较厚,以 $S/2r$ 代替 $\Delta\varphi$, 偏大了点. 所以总的来说其相对翘曲会比压气机中略大,但其数量级也差不多.

但当采用非自由旋流流型时, $\frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial r}$ 值通常不小,例如在对称速度图流型中,可证 $\frac{1}{W_1} \frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial r}$ 的数量级为 1. 此时(14)式可写成(忽略了 $\sigma \frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial z}$ 项):

$$\frac{\Delta r}{r} \doteq \frac{B}{r} \frac{S}{2r}.$$

通常 B 与 S 大小差不多,而 $B/r \ll 1$, 一般约为几分之一以下,所以可见此时 S_1 流面的相对翘曲为 10^{-2} 的数量级,远比自由

旋流流型的大. 亦即轴流式叶轮机械 S_1 流面翘曲主要取决于 $\frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial r}$. 所以在对称速度图压气机级和可控涡透平级等中的 S_1 流面翘曲有可能较大. 但总的来说,在轴流式叶轮机械中 S_1 流面的相对翘曲都不会太大,不会超过 10^{-2} 的数量级. 这也说明了为什么通常采用的基元级假设以及把 S_1 流面简化为任意迴转面能够取得比较满意的效果.

由于翘曲主要取决于 $\frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial r}$, 而叶道内此参数通常总为正值,亦即 $\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}$ 总大于 0, 所以可按此判断一般非自由旋流设计中 S_1 流面的翘曲方向. 参阅图 3 可见,非自由旋流设计使得

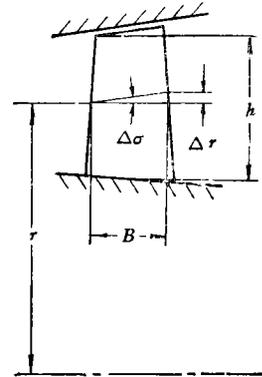
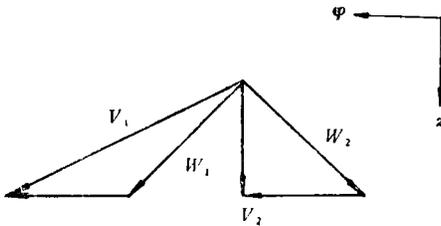
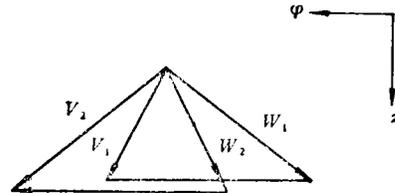


图 2 估计翘曲用简图



(a) 透平



(b) 压气机

图 3 叶轮机械的及速度三角形

S_1 流面在透平静叶吸力面处往外翘曲,而在动叶中则是压力面处往外翘曲. 但在不是反预旋的压气机级中,则正好相反: S_1 流面在动叶的吸力面及静叶的压力面处往外翘曲. 在反预旋的压气机级中,则叶道内前、后翘曲可能相反,亦即总的翘曲比较不明显.

按照上述讨论的结果,可以认为原来文献[1]中定性示出 S_1 流面翘曲的图 3 (一张在叶轮机械中广为引用的示意图)是描绘一排压气机动叶或透平静叶.

四、结 论

1. 对于目前通用的设计体系,叶轮机械的设计自变数在内、外环壁面上还应有一个附加的

限制条件:

$$\frac{\partial(V_{\varphi r})}{\partial n} = r\xi_1.$$

2. 轴流式叶轮机械 S_1 流面相对翘曲 $\Delta r/r$ 的数量级在非自由旋流设计中为 10^{-2} 级;而在自由旋流设计中则为 10^{-3} 级,基本可略去不计.

3. 轴流式叶轮机械在 S_1 流面翘曲比较明显(非自由旋流设计)时,大多情况下透平静叶和压气机动叶是在叶片的吸力面处往外翘,而在透平动叶和压气机静叶中则正好相反.

参 考 文 献

- [1] 吴仲华, *Trans. ASME*, **74** (1952), 1363—1380.
- [2] 吴仲华, Brown, C. A., *JAS*, **19**(1952), 183—196.
- [3] 吴仲华, *机械工程学报*, **4**(1956), 21—46.
- [4] 李根深、陈乃兴、强国芳, *船用燃气轮机轴流式叶轮机械气动热力学(上册)*, 国防工业出版社, 1980, 135.
- [5] 吴仲华, Wolfenstein, L., *NACA Rep.*, 955, 1950.