

# 基于BP神经网络的隐式曲线构造方法

李道伦<sup>1),2)</sup> 卢德唐<sup>2)</sup> 吴刚<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(中国科学技术大学计算机科学与技术系,合肥 230026) <sup>2)</sup>(中国科学技术大学工程科学软件研究所,合肥 230026)

<sup>3)</sup>(南京财经大学电子商务实验室,南京 210012)

**摘要** 隐式曲线与曲面是当前计算机图形学研究的热点之一。通过把BP神经网络与隐式曲线构造原理相结合,提出了一种构造隐式曲线的新方法,即首先由约束点构造神经网络的输入与输出,把描述物体边界曲线的隐式函数转化为显式函数;然后用BP神经网络对此显式函数进行逼近;最后由仿真曲面得到物体边界的拟合曲线。该方法不同于传统的对显式函数的逼近方法,因为传统方法无法描述封闭的曲线;也不同于基于优化的拟合隐式曲线方法,因为它无须考虑函数的形式或多项式的次数。实验表明,该新方法有很强的物体边界描述能力和缺损修复能力,因而在物体边界重建、缺损图像复原等领域有一定的应用前景。

**关键词** 隐式多项式曲线 拟合 BP神经网络 物体边界描述

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)09-1107-05

## Implicit Polynomial Curve Based on BP Neural Network

LI Dao-lun<sup>1),2)</sup>, LU De-tang<sup>2)</sup>, WU Gang<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(Department Computer Science & Technology, University of Science & Technology of China, Hefei 230026)

<sup>2)</sup>(Institute of Engineering and Science Software, University of Science & Technology of China, Hefei 230026)

<sup>3)</sup>(Laboratory of E-business, NanJing University of Finance & Economics, Nanjing 210012)

**Abstract** The implicit polynomial curves have a lot of merits, such as the capability to describe irregularly shaped objects, object recognition and insensitivity to noise, and are used widely in CAGD and computer graphics. A new method for closed curve construction is introduced which is based on the combination of BP neural network and principle of implicit curve construction. The algorithm, first constructs the input and output of the BP neural network from the constraint points and changes the implicit function that represents object boundary into explicit function, then uses BP neural network to fit the curve of the explicit function, and finally obtains the fitting curves that represent the object boundary from the simulation surface. The algorithm has more advancements than the method of fitting the curves of explicit functions by BP network, which can not fit the closed curves. It has good numerical stability and robustness in dealing with noisy or missing data. The Experimental results are given to verify the effectiveness of recovering incomplete images and object boundary reconstruction.

**Keywords** implicit function curves, fitting, BP neural network, object boundary representation

## 1 引言

研究表明,隐式曲线对物体描述非常有效,一个隐式曲线就可描述不规则的复杂物体形状,且具有对数据噪声和模型的轻微变形不敏感,能够修复物体部分缺失的信息等特点<sup>[1~10]</sup>。如今用于描述物体形状的隐式曲线方法已得到广泛应用<sup>[3]</sup>,目前主要

采用的方法分别为拟合隐式多项式方法<sup>[1~7]</sup>和插值隐式函数方法<sup>[8~10]</sup>。

二元隐式多项式的形式为  $f_n(x, y) = \sum_{i,j>0, i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$ , 其零集合  $\{(x, y) | f_n(x, y) = 0\}$  是一个二维图形,称为隐式多项式曲线。对一般形式的函数,其零集合统称为隐式曲线。由于物体边界是封闭有界的,因而描述物体边界的隐式曲线也应是封

闭有界的。

用隐式多项式曲线进行物体边界拟合的简单方法是寻求隐式多项式  $f_n(x, y)$  使  $\sum_{(x_i, y_i) \in s} f_n^2(x_i, y_i)$  最小, 这里,  $s$  表示图像边界点的集合。但是, 这种拟合效果很差, 其原因是  $f_n^2(x_i, y_i)$  并不是点  $(x_i, y_i)$  到曲线  $f_n(x, y) = 0$  的距离, 文献[2]给出了一种实用的最小化方法。

基于插值的隐式函数方法<sup>[8~10]</sup>与基于拟合的隐式多项式方法的原理相似。不过, 隐式函数是通过求解方程组得到的; 另外, 隐式函数往往不是多项式函数。

虽然隐式曲线对物体边界描述非常有效, 但也受到多方面的挑战, 如由拟合得到的隐式曲线容易出现且不易避免无界、自相交和有洞等现象, 二次隐式多项式曲线描述能力有限; 高次隐式多项式曲线虽然描述能力更强, 但十分复杂, 且难以控制<sup>[7]</sup>; 插值隐式函数的线性方程组阶数高, 其计算量大, 运算时间长, 且易出现奇异现象<sup>[9,10]</sup>。

本文利用 BP 神经网络强大的函数逼近能力<sup>[11]</sup>, 给出一种构造封闭拟合隐式曲线的新方法。该方法先用神经网络代替文献[2]中的最小化方法和文献[8~10]中的求解线性方程组方法来构造隐式曲线, 然后通过适当的输入输出变换, 将表示曲面的函数关系存储于神经网络的连接权值中, 最后就可由仿真曲面得到物体边界的拟合曲线。由于神经网络有较强的容错能力、联想能力和非线性逼近能力, 因而本文的方法有很强的修复缺损能力和抗噪声能力, 且具有很高的逼近精度。

本文给出的是基于 BP 神经网络构造隐式曲线的新方法, 有关 BP 神经网络的内容可参见文献[11], 本文从略。由于径向基神经网络是局部逼近网络, 只有对物体边界等作一系列处理后, 径向基神经网络才能应用于本文的方法中, 因此与本文的方法有较大的差异, 笔者将另文介绍。

## 2 相关术语

**定义 1** 零集合是指使函数输出为 0 的输入点集<sup>[2]</sup>, 即为  $\{(x, y) | f(x, y) = 0\}$ 。

为了与零集合的概念相区分, 本文给出了零曲线的定义。

**定义 2** 零曲线是对已训练的神经网络进行仿

真时, 使输出为 0 的输入点集合。  
为叙述方便, 称用于决定零曲线的点为约束点, 并把约束点分为边界点、外部点和内部点 3 类。本文约定这些点位于坐标平面上。

**定义 3** 物体边界上的点称为边界点, 简称为边点, 其对应的函数值为 0; 在物体边界之外的点为外部点, 简称为外点, 其对应的函数值一般为 1; 在物体边界之内的点为内部点, 简称为内点, 其对应的函数值一般为 -1。

图 1 给出的是约束点分布示意图, 其中封闭曲线为物体边界, “○”表示边点, 其在物体边界上; “\*”表示内点, 其在物体边界内部; “+”表示外点, 其在物体边界外部。边点决定拟合的效果, 内外点共同约束拟合曲线的形状。另外, 约束点的选择还有利于人机交互。

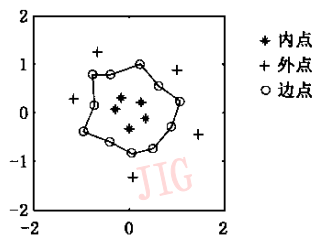


图 1 约束点分布图

内外点可以是多层的, 第 2 层外点的函数值应大于第 1 层外点的函数值, 一般为 2, 类似地, 第 3 层外点的函数值一般为 3, 而对多层内点, 取值情形则相反。

多层内外点能够很好地控制神经网络仿真曲面的形状, 并可使得到的物体边界拟合曲线不仅具有更高的精度, 而且也不会出现多余的曲线。图 2 给出的是单层内外点情形下的物体边界的拟合曲线, 其中“心”形的封闭曲线是物体边界的拟合曲线。当精度非常高时, 坐标原点附近出现了多余的曲线, 但加一层外点后, 多余曲线会消失, 只剩下“心”形的封闭曲线。

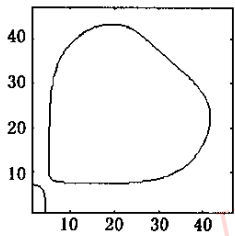


图 2 出现多余曲线

### 3 基于 BP 神经网络的拟合算法

#### 3.1 神经网络的输入与输出

为叙述方便,设约束点的个数为  $n$ ,其中边点的个数为  $k$ ,内点的个数为  $j$ ,则外点的个数为  $n-k-j$ 。为方便起见,不妨设只有一层内外点。约束点及其值构成了神经网络的输入与输出,其方法如下文所述。

由每个约束点坐标  $(x_i, y_i)$  得到的列向量  $(x_i, y_i)^T$  构成输入矢量的第  $i$  列,所有约束点就构成一个 2 行  $n$  列的输入矢量矩阵  $P$ ,即

$$P = \begin{bmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,前  $k$  列为由边点坐标所得到的列向量,后  $n-k-j$  列为由外点坐标所得到的列向量,中间  $j$  列为由内点坐标所得到的列向量。

各约束点对应的函数值组成一个 1 行  $n$  列的输出矢量矩阵  $T$ ,即

$$T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad -1 \quad \cdots \quad -1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \quad (2)$$

其中,输出矢量矩阵  $T$  的前  $k$  个值为 0,后  $n-k-j$  个值为 1,中间  $j$  个值为  $-1$ 。

内点和外点的选择是必须的,否则,若仅取边点,则训练后的各神经元连接权值皆为 0,从而得不到物体边界的拟合曲线。

#### 3.2 算法的数学描述

由于 BP 神经网络只能对显式函数进行任意逼近,因而须先对描述物体边界的隐式函数显式化,然后才能用 BP 神经网络对显式化所得到的显式函数进行逼近。

设某物体边界曲线  $B$  可描述为  $B = \{(x, y) | f(x, y) = 0\}$ ,其中  $f(x, y)$  是隐式函数。现在由隐式函数  $f(x, y)$  来构造以下显式函数  $z$ :

$$z = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in B \\ -1 & (x, y) \in I \\ 1 & (x, y) \in O \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $B, I, O$  分别为给定的边点集、内点集和外点集。

由式(1)、式(2)及函数  $z$  的定义可得引理 1。

**引理 1** 输入矢量矩阵  $P$  第  $i$  列所对应的点的坐标  $(x_i, y_i)$  在函数  $z$  上的函数值为输出矢量矩阵  $T$  第  $i$  列的值。

由引理 1 易得如下引理:

**引理 2** 以式(1)为输入矢量矩阵,式(2)为输

出矢量矩阵,对 BP 神经网络进行训练,则训练后的神经网络就是对函数式(式(3))的逼近。

**定理 1** 训练后的 BP 神经网络的零曲线能对物体边界曲线  $\{(x, y) | f(x, y) = 0\}$  进行任意精度的逼近。

**证明** 先证明零曲线是对物体边界曲线  $\{(x, y) | f(x, y) = 0\}$  的逼近。

由引理 2 知,训练后的 BP 神经网络是对函数式(式 3)的逼近;由神经网络零曲线的定义知,零曲线是对函数式(式 3)中  $z = f(x, y), (x, y) \in B$  的逼近。又当  $(x, y) \in B$  时,  $f(x, y) = 0$ , 则有零曲线是对物体边界曲线  $\{(x, y) | f(x, y) = 0\}$  的逼近。

再证明零曲线能无限逼近物体边界:

由于 BP 神经网络可以以任意精度逼近一个具有有限间断点的非线性函数<sup>[11]</sup>,且内点集和外点集是有限集合,故在理论上,零曲线可以以任意精度逼近物体边界,证毕。

#### 3.3 基于 BP 神经网络的拟合算法描述

本文的 BP 神经网络是具有两个隐含层的三层神经网络,其隐含层的传递函数为  $\text{tansig}$ ,输出层的传递函数为  $\text{purelin}$ ,学习算法为引入动量因子的启发式学习算法。下面给出基于神经网络的拟合算法步骤。

基于 BP 神经网络的拟合算法步骤如下:

(1) 提取物体图像边界;

(2) 选取约束点 所选取的边界点应能反映物体轮廓的特征;内外点应根据物体轮廓的复杂程度,合理选择层数。对简单图形,一层内外点即可,而对复杂图形,应选择多层内外点,且内外点数一般少于边点数;

(3) 构造输入矢量矩阵与输出矢量矩阵 输入矢量矩阵  $P$  与输出矢量矩阵  $T$  分别由式(1)与式(2)给出;

(4) 选择神经网络及学习算法 采用 3 层 BP 神经网络,各隐含层的神经元数适当选取,隐含层的传递函数为  $\text{tansig}$ ,输出层的传递函数为  $\text{purelin}$ ;学习算法为引入动量因子的启发式学习算法;

(5) 求拟合的物体边界曲线 训练仿真后神经网络的零曲线即为所求的物体边界拟合曲线。

### 4 数值实验及其分析

为了验证本文方法对物体边界的描述能力及其缺

损修复能力,选择了两个图形进行了实验,实验结果见图 3、图 4。图中的 \* 号表示边点。所有的图形都是用本文的方法在 Matlab 6.5 上进行实验的结果。

实验 1 五角形轮廓的重建

实验 1 是一个较复杂五角形物体。原始图形(见图 3(a))共有 166 个边界点。图 3(b)与图 3(c)是用本文的方法构造的曲线,图 3(c)的约束点为图 3(b)的一半。为了便于进行精度上的比较,在图 3(b)与图 3(c)中给出了用 \* 号标识的边点。

图 3(c)的约束点数是图 3(b)的一半,但图形重

建结果几乎相同。这表明,本文的方法对约束点的数量不甚敏感。

实验 2 缺损五角形的修复

图 4(a)与图 4(b)分别给出了五角形部分缺损的情形与及其修复结果。另外,为了便于比较,在图 4(b)中用 \* 号标出了所有的边点。由图 4 不难看出,只要缺损部分不丢失重要信息,而且与缺损相连的两端能反映图形的走势,那么本文的方法就能很好地恢复原图。这表明本文的方法具有很强的缺损修复能力。

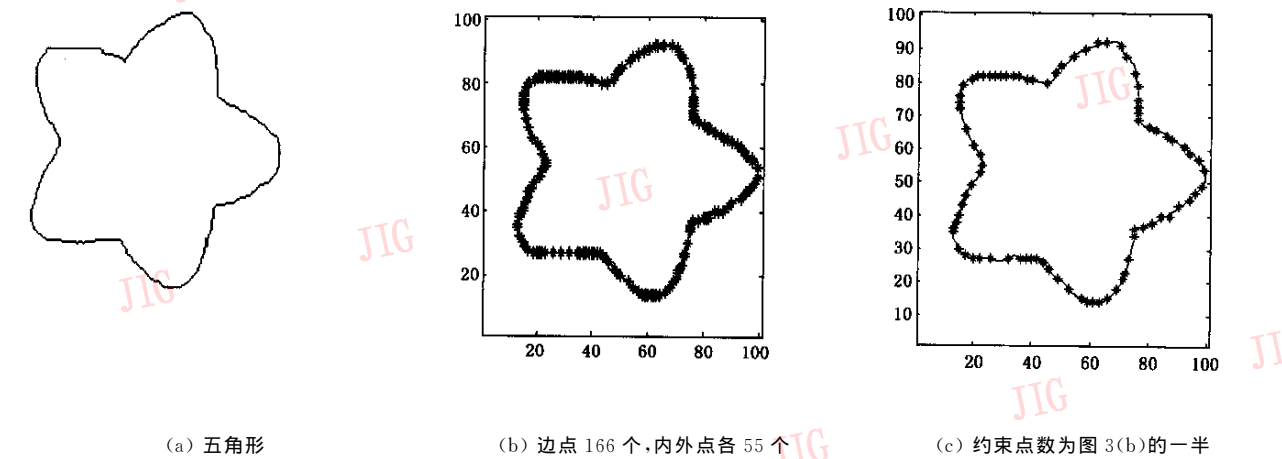


图 3 用不同约束点构造的曲线

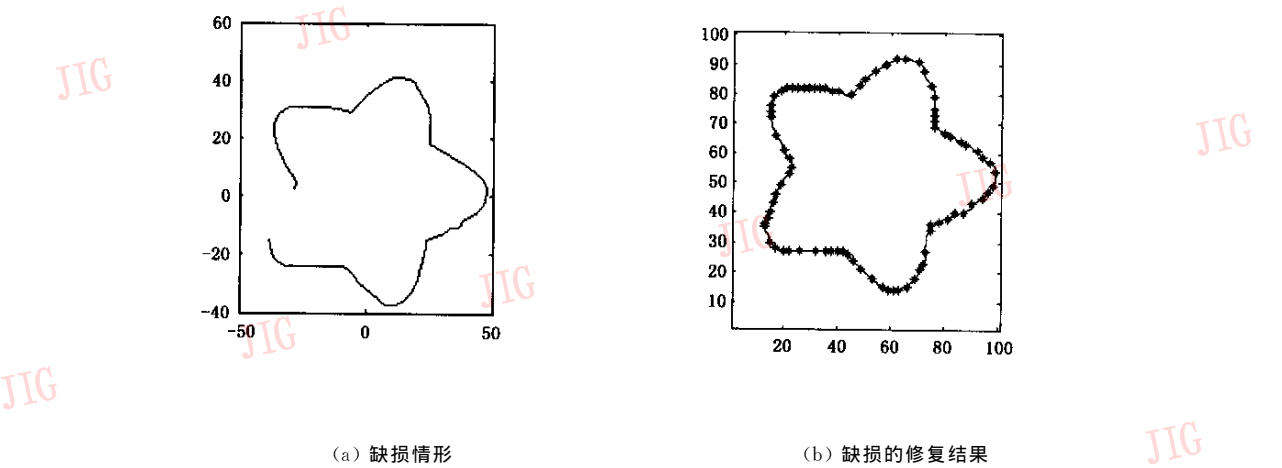


图 4 缺损图形修复

另外,本文方法还适用于自相交的封闭曲线。

5 结 论

(1)本文提出了一种基于 BP 神经网络的构造隐式曲线的新方法,实验证明,该方法在物体边界描述上十分有效。它不同于传统的对显式函数的逼近

方法,因为传统方法无法描述封闭的曲线;也不同于基于优化的拟合隐式曲线方法,因为本文方法无须考虑函数的形式或多项式的次数。

(2)拟合的隐式多项式曲线对多项式次数敏感。由于文献[3]提出的用于估计多项式次数下限的方法,只具有一般性的指导意义,因而需要多次尝试才能找到合适的多项式函数,而由于本文的方法对约

束点数量不敏感,只需边界点能反映图形的特征即可,因而本文的方法使用起来较为方便。

(3)本文的方法至少还可从以下两个方面深入研究:(1)本文的内外点的选取,由于缺乏理论依据,致使计算机无法自动完成,因此如何从理论上给出一个可行的确定内外点的方法,以实现本文方法的自动化;(2)能否从权值之间的关系来分析出图形的性质,如对称性等,以便使本文方法在更多领域应用。今后将对此深入研究。

参 考 文 献

1 Sampson P D. Fitting conic section to very scattered data: an interactive improvement of the book stein algorithm [J]. Computer Vision Graphics and Image Processing, 1982, 18 (1): 97~108.

2 Taubin G. Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13 (11): 1115~1138.

3 吴刚,李道伦.基于隐含多项式曲线的物体描述与对称性检测[J].计算机研究与发展,2002,39 (10): 1337~1344.

4 Subrahmonia J, Cooper D, Kenren D. Practical reliable bayesian recognition of 2D and 3D objects using implicit polynomials and algebraic invariants[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(5): 505~519.

5 Lei Z, Cooper D. Linear programming fitting of implicit polynomials[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(2): 212~217.

6 Taubin G, Cukirman F, Sullivan S, et al. Kriegman. Parameterized families of polynomials for bounded algebraic curve and surface fitting [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(3): 286~303.

7 陈发来.有理曲线的近似隐式化表示[J].计算机学报,1998,21 (9): 855~859.

8 Turk G, Huong Quynh Dinh, O'Brien J F, et al. Implicit surfaces that interpolate[A]. In: International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI)[C], Genova, Italy, 2001: 62~71.

9 Morse B S, Yoo T S, Rheingans P, et al. Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis functions[A]. In: International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI)[C], Genova, Italy, 2001: 89~98.

10 Turk G, O'Brien J. Shape transformation using variational implicit functions [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series[C]. Los Angeles, California USA, 1999: 335~342.

11 许东,吴铮.基于 MATLAB6.X 的系统分析与设计——神经网络[M].西安:电子科技大学出版社,2002.



李道伦 1972 年生,1998 年获合肥工业大学计算数学专业硕士学位,现为中国科技大学计算机科学与技术系讲师,在职博士生。主要研究方向为计算机辅助设计、图像理解及神经网络等。  
E-mail: ldao@ustc.edu.cn



卢德唐 1966 年生,1999 年获中国科学技术大学硕士学位,现为中国科技大学教授、博士生导师、工程科学软件研究所所长。目前主要从事大型工程科学软件开发及数字化大桥等研究工作。曾多次荣获国家及省部级科学进步奖,并获中国科学院青年科学家奖。



吴刚 1969 年生,2001 年获合肥工业大学计算机应用博士学位,现为南京财经大学讲师。主要研究方向为图像理解、多媒体数据库、模式识别等。