中国科学: 数学 2013 年 第 43 卷 第 9 期: 871～892
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

非稳态电导介质中 Maxwell 方程组的反问题

李书敏, 盛丹丹*

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026
E-mail: shuminli@ustc.edu.cn, shdan@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2012-10-15; 接受日期: 2013-06-16; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11101391) 和安徽省自然科学基金 (批准号: 11040606M13) 资助项目

摘要 本文主要考虑非稳态电导介质的 Maxwell 方程组. 本文考查通过有限组的边界区域观测值决定关于本构方程中系数 ε, ζ, μ 和电导率系数 σ 的反问题, 利用 Carleman 估计证明该反问题的 Lipschitz 稳定性.

关键词 反问题 Maxwell 方程组 Carleman 估计 稳定性
MSC (2010) 主题分类 34D20, 45Q05, 65M32, 65L09

1 引言

本文考查如下的 Maxwell 方程组初 - 边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t D(x,t) - \nabla \times H(x,t) + \sigma(x) f(x,t) E(x,t) = 0, & (x,t) \in Q, \\ \partial_t B(x,t) + \nabla \times E(x,t) = 0, & (x,t) \in Q, \\ \nabla \cdot D(x,t) = \nabla \cdot B(x,t) = 0, & (x,t) \in Q, \\ D(x,0) = d(x), B(x,0) = b(x), & x \in \Omega, \\ \nu(x) \times E(x,t) = q(x,t), & (x,t) \in \Sigma, \end{cases} \tag{1.1}$$

而且 $D(x,t)$, $B(x,t)$, $E(x,t)$ 和 $H(x,t)$ 满足如下的本构关系:

$$\begin{cases} D(x,t) = \varepsilon(x) E(x,t) + \zeta(x) H(x,t), & (x,t) \in Q, \\ B(x,t) = \zeta(x) E(x,t) + \mu(x) H(x,t), & (x,t) \in Q, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $d(x)$, $b(x)$ 和 $q(x,t)$ 是给定的向量值函数, $\varepsilon(x)$, $\zeta(x)$, $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是实值函数. 在本文中 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial_t}$, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial_k}$, $k = 1, 2, 3$, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^{\mathrm{T}}$, T 表示向量或矩阵的转置, $Q = \Omega \times (-T, T)$, Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域, 并有 C^2 边界 $\partial\Omega$, $\Sigma = \partial\Omega \times (-T, T)$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))^{\mathrm{T}}$ 是 $\partial\Omega$ 在 x 处的单位外法向量. 在 (1.1) 中,

$$D(x,t) = (D_1(x,t), D_2(x,t), D_3(x,t))^{\mathrm{T}}: \text{ 电位移},$$
$$B(x,t) = (B_1(x,t), B_2(x,t), B_3(x,t))^{\mathrm{T}}: \text{ 磁流密度},$$

英文引用格式: Li S M, Sheng D D. An inverse problem for Maxwell's equations in non-stationary conducting media (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 871–892, doi: 10.1360/012012-499

$$E(x,t)=(E_1(x,t),E_2(x,t),E_3(x,t))^{\mathrm{T}}:\ \text{电场},$$
$$H(x,t)=(H_1(x,t),H_2(x,t),H_3(x,t))^{\mathrm{T}}:\ \text{磁场}.$$

下面简单介绍所考查方程组的物理背景[1]. 由 Maxwell-Ampère 定律知,

$$\partial_t D(x,t)-\nabla\times H(x,t)+J(x,t)=0,$$

其中 $J(x,t)$ 为传导电流密度. 再由 Ampère 定律知, $J(x,t)=\sigma_J E(x,t)$, 其中 σ_J 为电导率. 本文假设所考查的介质的电导率是非稳态和非均匀的, 即假设它具有 $\sigma_J=\sigma(x)f(x,t)$ 的形式. 对于非均匀双耦合各向同性介质而言, 它的本构关系为 (1.2), 其中 ε, ζ 和 μ 分别为电容率、耦合率和磁导率. 本文考虑的介质是非均匀的, 即 ε,ζ 和 μ 是关于 x 的实值函数, 但是假设 ε,ζ 和 μ 不依赖于 t.

本文主要讨论下述反问题: 设 $\varepsilon(x)$, $\zeta(x)$, $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是未知的 $C^2(\overline{\Omega})$ 函数, $f(x,t)$ 是已知的 $C^2(\overline{Q})$ 函数. 令 $\omega\subset\Omega$ 满足 $\partial\Omega\subset\partial\omega$, $T>0$ 被适当给定. 本文通过在区域 $Q_\omega\equiv\omega\times(-T,T)$ 上 $D(x,t)$ 和 $B(x,t)$ 的有限组观测数据来同时决定 $\varepsilon(x)$, $\zeta(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$, $x\in\Omega$.

在以往的关于 Maxwell 方程组的反问题中, 大多数考虑的是电流密度 $J=0$ 情况下在各向同性介质或非均匀双耦合各向同性介质中, 决定本构关系中物理系数的反问题或反源问题. 如文献 [2–10] 等. 在本文所考虑的反问题中, 我们不仅不假设 Maxwell 方程组中的传导电流密度 $J\equiv 0$, 而且认为电导率是非稳态非均匀的, 同时所考虑的介质不是传统的各向同性介质, 而是非均匀双耦合各向同性介质. 通过边界邻域中关于电位移 D 和磁流密度 B 的有限组观测数据, 我们在决定本构关系中物理系数电容率 ε、耦合率 ζ 和磁导率 μ 的同时还决定与传导电流有关的电导率 σ_J 中不依赖于 t 的部分信息 σ.

为了保证反问题的唯一性, 我们使用两组初值和边界值, $\Phi(j)=(d^j,b^j,q^j)$, $j=1,2$. 为了简化问题, 我们不妨设 d^j, b^j 和 q^j, $j=1,2$ 充分光滑并且满足充分的相容性条件, 使得当 ϵ 充分光滑时, 问题 (1.1) 和 (1.2) 的解, 记为 $D[\epsilon;\Phi(j)](x,t)$, $B[\epsilon;\Phi(j)](x,t)$, 满足 $D[\epsilon;\Phi(j)]$, $B[\epsilon;\Phi(j)]\in(W^{2,\infty}(Q))^3$ (如文献 [10,11] 等), 其中 $\epsilon=(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)$ 为问题 (1.1) 和 (1.2) 中的系数, 初值和边值条件 $(d,b,q)=\Phi(j)$ $=(d^j,b^j,q^j)$. 记 G 为如下 12×9 阶矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & e_1\times d^1 & e_1\times b^1 & 0 & e_2\times d^1 & e_2\times b^1 & 0 & e_3\times d^1 & e_3\times b^1\\ e_1\times d^1 & e_1\times b^1 & 0 & e_2\times d^1 & e_2\times b^1 & 0 & e_3\times d^1 & e_3\times b^1 & 0\\ 0 & e_1\times d^2 & e_1\times b^2 & 0 & e_2\times d^2 & e_2\times b^2 & 0 & e_3\times d^2 & e_3\times b^2\\ e_1\times d^2 & e_1\times b^2 & 0 & e_2\times d^2 & e_2\times b^2 & 0 & e_3\times d^2 & e_3\times b^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

其中 $e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $e_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $e_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 记

$$G_1=\begin{pmatrix} & d^1\\ G & 0\\ & d^2\\ & 0\end{pmatrix},\quad G_2=\begin{pmatrix} & b^1\\ G & 0\\ & b^2\\ & 0\end{pmatrix}.$$

为了叙述本文的主要定理, 我们进一步引入如下记号: $\forall\, W=(w_1,w_2,\dots,w_n)^{\mathrm{T}}$, $|W|^2=\sum_{k=1}^n|w_k|^2$. 令 $\lambda=\inf_{x\in\overline{\Omega}}|x|$, $\Lambda=\sup_{x\in\overline{\Omega}}|x|$, 且满足条件

$$0<\Lambda^2<2\lambda^2. \tag{1.4}$$

下面引入未知系数 $(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)$, $(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\zeta},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})$ 的容许集合

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}&=\mathcal{U}_{M,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\epsilon_0}\\
&=\Big\{\epsilon(x)=(\varepsilon(x),\zeta(x),\mu(x),\sigma(x))\in(C^2(\overline{\Omega}))^4:(\varepsilon,\zeta,\mu)=\epsilon_0,\text{在 }\partial\Omega\text{上};\\
&\quad\|\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})},\|\zeta\|_{C^2(\overline{\Omega})},\|\mu\|_{C^2(\overline{\Omega})},\|\sigma\|_{C^2(\overline{\Omega})},\|\nabla(\varepsilon\mu-\zeta^2)\|_{(C^2(\overline{\Omega}))^3},\|\varepsilon\mu-\zeta^2\|_{(C^2(\overline{\Omega}))^3}<M;\\
&\quad\varepsilon,\mu,\varepsilon\mu-\zeta^2>\theta_1,\mu-|\zeta|>\theta_2,\text{在 }\overline{\Omega}\text{ 上};\ \frac{x\cdot\nabla(\varepsilon\mu-\zeta^2)}{2(\varepsilon\mu-\zeta^2)}>-\theta_0,\text{ 在 }\overline{\Omega}\text{ 上};\\
&\quad\|D[\epsilon;\Phi(j)]\|_{(W^{2,\infty}(Q))^3},\|B[\epsilon;\Phi(j)]\|_{(W^{2,\infty}(Q))^3}<M,\forall j=1,2\Big\},
\end{aligned}$$

其中 $M>0$, $0<\theta_0<1$, $\theta_1>0$, $\theta_2>0$ 是常数, $\epsilon_0=(\varepsilon_0,\zeta_0,\mu_0)$ 是 $\partial\Omega$ 上的光滑函数. 我们取定正常数 β, 满足如下条件:

$$0<\beta<\frac{-\lambda\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\lambda^2\theta_1+4\theta_1^2(1-\theta_0)}}{2M\theta_1}. \tag{1.5}$$

下面介绍本文的主要定理.

定理 1.1　设 Ω 满足 (1.4), β 满足 (1.5), 且

$$\frac{\sqrt{\Lambda^2-\lambda^2}}{\beta}<T \tag{1.6}$$

成立. 假设存在 $\theta_3>0$, 使得 12×10 阶矩阵 G_1 和 G_2 能分别在相同的行列取得 10×10 阶子矩阵 G_{10} 和 G_{20}, 满足

$$|\det G_{10}(x)|>\theta_3>0,\quad |\det G_{10}(x)|>|\det G_{20}(x)|, \tag{1.7}$$

在 $\overline{\Omega}$ 上. 另外假设 $f(x,t)\in C^2(\overline{Q})$, 而且存在常数 $\theta_4>0$, 使得在 $\overline{\Omega}$ 上, 有 $f(x,0)>\theta_4>0$ 成立. 则存在常数 $K=K(\Omega,T,\Phi(1),\Phi(2),M,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\epsilon_0,f)>0$, 使得对任意的 $\epsilon=(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U},\widetilde{\epsilon}=(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\zeta},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})\in\mathcal{U}$, 有

$$\|\widetilde{\varepsilon}-\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\zeta}-\zeta\|_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\mu}-\mu\|_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\sigma}-\sigma\|_{L^2(\Omega)}\leqslant K\Theta \tag{1.8}$$

成立, 其中

$$\Theta=\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\{\|\partial_t^k(D[\epsilon;\Phi(j)]-D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)])\|_{(H^1(Q_\omega))^3}+\|\partial_t^k(B[\epsilon;\Phi(j)]-B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)])\|_{(H^1(Q_\omega))^3}\}. \tag{1.9}$$

Bukhgeim 和 Klibanov [12] 首先提出了利用 Carleman 估计求解反问题的方法. 文献 [6,13–23] 等进一步发展完善了该方法. 基于该方法, 关于通过有限组观测的 Maxwell 方程组反问题, 我们可以参见文献 [6–10] 等. 本文将遵循文献 [9] 中的方法, 利用基于 Carleman 估计的方法和能量守恒定律证明定理 1.1, 即我们所考查反问题的 Lipschitz 稳定性. 与已知结果 [8–10] 相比, 特别是与文献 [9] 相比, 非稳态电导介质 Maxwell 方程组 (1.1) 中的新增项 $\sigma(x)f(x,t)E(x,t)$ 增加了证明反问题稳定性的难度. 为了克服这一难度, 我们首先在第 2 节中证明了一个与文献 [9] 不同的新的 Carleman 估计; 然后在第 3 节中, 我们在遵循文献 [9] 的证明方法的同时, 利用这一新的 Carleman 估计克服了由方程 (1.1) 的新增项引起的对证明的影响, 完成了定理 1.1 的证明, 推广了文献 [9] 的结果.

此外, 需要指出的是, Li [9] 利用两组观测数据, 决定了三个未知系数函数. 而本文需要同时决定 4 个未知系数函数. 为了建立稳定性, 我们没有增加观测数据, 而是仍然采用两组观测数据, 即仍然使用

两组初值和边界值, 但是需要更加小心地选择它们, 我们选取了满足条件 (1.7) 的两组初值. 由行列式的运算性质易知, 条件 (1.7) 关于初值 b^j 和 d^j, $j=1,2$ 是稳定的, 即对满足条件 (1.7) 的初值 b^j 和 d^j, $j=1,2$ 添加小的扰动后仍然满足条件 (1.7). 虽然假设条件 (1.7) 有点强, 但是它能够保证数据 (d^1,b^1) 与 (d^2,b^2) 是相互独立的, 从而使得相应的两组在边界领域的观测值就能保证所讨论的同时决定 4 个未知系数函数的反问题的稳定性. 而满足条件 (1.7) 的初始条件是存在的. 例如, 取 $d^1(x)=e_1$, $b^1(x)=d^2(x)=e_2$ 和 $b^2(x)=e_3$, 将矩阵 G_1 和 G_2 的第 2 和 9 行去掉, 得到的两个 10×10 阶矩阵满足条件 (1.7). 另一方面, 类似 (1.7) 的关于初值的条件, 在利用 Carleman 估计求解反问题的方法中, 通常是无法避免的, 可以参见上文中提到的相关文献.

另外, 如果我们采用多组观测值, 则条件 (1.7) 可以被弱化. 下面给出一个推论来说明这一点.

推论 1.2 设 Ω, β 和 T 分别满足 (1.4), (1.5) 和 (1.6), $f(x,t)$ 满足与定理 1.1 相同的条件. 对问题 (1.1) 和 (1.2), 我们使用 $2N$ 组充分光滑且满足充分的相容性条件的初边值 $\Phi(j)=(d^j,b^j,q^j)$, $j=1,\dots,2N$, 其中 $N\in\{1,2,\dots\}$. 记矩阵 $G^l=G^l(d^{2l-1},b^{2l-1},d^{2l},b^{2l})$ 为如下 12×9 阶矩阵:

$$G^l=(G^{l,1},G^{l,2},G^{l,3}),\quad l=1,2,\dots,N,$$

其中

$$G^{l,k}=\begin{pmatrix} 0 & e_k\times d^{2l-1} & e_k\times b^{2l-1} \\ e_k\times d^{2l-1} & e_k\times b^{2l-1} & 0 \\ 0 & e_k\times d^{2l} & e_k\times b^{2l} \\ e_k\times d^{2l} & e_k\times b^{2l} & 0 \end{pmatrix},\quad l=1,2,\dots,N,\quad k=1,2,3,$$

并且记

$$G_1^l=\begin{pmatrix} & d^{2l-1} \\ G^l & 0 \\ & d^{2l} \\ & 0 \end{pmatrix},\quad G_2^l=\begin{pmatrix} & b^{2l-1} \\ G^l & 0 \\ & b^{2l} \\ & 0 \end{pmatrix},\quad l=1,2,\dots,N.$$

假设存在 $\theta_3>0$, 使得 12×10 阶矩阵 G_1^l 和 G_2^l, $l=1,2,\dots,N$ 能分别在相同的行列取得 10×10 阶子矩阵 G_{10}^l 和 G_{20}^l 满足如下性质:

$$\bigcup_{l=1}^N\Omega_l=\Omega,\tag{1.10}$$

其中

$$\Omega_l=\{x\in\Omega:|\det G_{10}^l(x)|>\theta_3>0,|\det G_{10}^l(x)|>|\det G_{20}^l(x)|\},\quad l=1,2,\dots,N.\tag{1.11}$$

则存在常数 $K=K(\Omega,T,\Phi(1),\dots,\Phi(2N),M,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\epsilon_0,f)>0$, 使得对任意 $\epsilon=(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$, $\widetilde{\epsilon}=(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\zeta},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})\in\mathcal{U}$, 有 (1.8) 成立, 其中

$$\Theta=\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{2N}\{\|\partial_t^k(D[\epsilon;\Phi(j)]-D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)])\|_{(H^1(Q_\omega))^3}+\|\partial_t^k(B[\epsilon;\Phi(j)]-B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)])\|_{(H^1(Q_\omega))^3}\}.$$

注 1.3 在定理 1.1 中, 我们需要假设波速 $(\varepsilon\mu-\zeta^2)^{-(1/2)}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上满足一个单调性条件

$$\frac{x\cdot\nabla(\varepsilon\mu-\zeta^2)}{2(\varepsilon\mu-\zeta^2)}>-\theta_0,\quad 0<\theta_0<1.$$

为了能够在边界层得到观测值, 我们需要确保入射电磁波从边界射入后, 经过在介质内部的传播还可以从边界射出. 由折射定律 (Snell 定律), 我们知道电磁波在非均匀介质中将发生折射. 波速满足的单调性条件则是一个可以保证我们在边界层得到观测数据的充分条件. 因此, 此单调性条件可以解释为一个可以接受的保证所考查反问题的唯一性和稳定性的充分条件. 特别地, 若波速 $(\varepsilon\mu-\zeta^2)^{-(1/2)}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是常值函数或 $|\nabla(\varepsilon\mu-\zeta^2)|$ 在 $\overline{\Omega}$ 上充分小, 此时单调性条件成立. 另外, 此单调性条件是证明 Carleman 估计时通常被使用的一个充分性条件 (如文献 [6, 9, 10, 14, 17, 19] 等), 而 Carleman 估计是我们在证明定理 1.1 时使用的主要工具. 此单调性条件也许可以被弱化, 但是很难找到一个保证所需 Carleman 估计成立的充要条件.

注 1.4 在定理 1.1 中, 我们采用在整个边界层 (即在 Ω 中满足 $\partial\omega\supset\partial\Omega$ 的子区域 ω) 中的关于电位移 D 和磁流密度 B 的观测值来同时决定本构关系中未知的物理系数电容率 ε、耦合率 ζ 和磁导率 μ 以及与传导电流有关的电导率 σ_J 中不依赖于 t 的部分信息 σ. 在电磁波传播的物体中, 通过在靠近边界的区域中对电位移和磁流密度的观测值来决定该物体内部的反映电磁性质的物理系数, 这样的反问题有重要的应用背景, 如地球物理学.

本文由 4 部分构成. 第 2 节给出关于 Maxwell 方程组的 Carleman 估计; 第 3 节证明定理 1.1; 第 4 节简要地证明推论 1.2.

2 Maxwell 方程组的 Carleman 估计

对于 β 和 λ , 我们定义函数 $\varphi(x,t)$:

$$\varphi(x,t)=\mathrm{e}^{\varrho(|x|^2-\beta^2t^2-\lambda^2)}, \tag{2.1}$$

其中 $\varrho>0$ 是充分大的正常数. 对于 $(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$, 记

$$\xi=\varepsilon\mu-\zeta^2,\quad \gamma_1=\frac{\mu}{\xi},\quad \gamma_2=-\frac{\zeta}{\xi},\quad \gamma_3=\frac{\varepsilon}{\xi}, \tag{2.2}$$

在 $\overline{\Omega}$ 上. 在文献 [9] 中, 证明了如下命题.

命题 2.1 令 $\varphi(x,t)$ 如 (2.1) 给出, 区域 Ω 满足 (1.4). 假设 $(\varepsilon,\zeta,\mu)\in\mathcal{U}^{[9]}$, 且 $0<T<\frac{\lambda}{\beta}$, 其中 β 满足 (1.5). 设 $D,B\in(H_0^1(Q))^3$ 且在 Q 内满足

$$\begin{aligned}&\partial_tD-\nabla\times H=R_1,\quad \partial_tB+\nabla\times E=R_2,\\&D=\varepsilon E+\zeta H,\quad B=\zeta E+\mu H,\\&\nabla\cdot D=r_1,\quad \nabla\cdot B=r_2,\end{aligned}$$

则存在 $s_0=s_0(\varrho)>0$, $K_1=K_1(s_0,\beta,\varrho,M,\theta_0,\theta_1,\Omega,T)>0$, 使得对于 $\forall\, s>s_0$, 有

$$s\int_Q(|D|^2+|B|^2+|E|^2+|H|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\leqslant K_1\sum_{k=1}^{2}\int_Q(|R_k|^2+|r_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt$$

成立, 其中 $\mathcal{U}^{[9]}$ 表示文献 [9] 中相应的未知函数 (ε,ζ,μ) 的容许集合, 即

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{[8]}&=\mathcal{U}^{[8]}_{M,\theta_0,\theta_1,\epsilon_0}\\&=\Big\{(\varepsilon(x),\zeta(x),\mu(x))\in(C^2(\overline{\Omega}))^3:(\varepsilon,\zeta,\mu)=\epsilon_0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上};\end{aligned}$$

$$\|\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})}, \|\zeta\|_{C^2(\overline{\Omega})}, \|\mu\|_{C^2(\overline{\Omega})}, \|\nabla(\varepsilon\mu-\zeta^2)\|_{(C^2(\overline{\Omega}))^3} < M;$$
$$\varepsilon, \mu, \varepsilon\mu-\zeta^2 > \theta_1, \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 上}; \ \frac{x\cdot\nabla(\varepsilon\mu-\zeta^2)}{2(\varepsilon\mu-\zeta^2)} > -\theta_0, \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 上};$$
$$\left.\|D[\epsilon;\Phi(j)]\|_{(W^{2,\infty}(Q))^3}, \|B[\epsilon;\Phi(j)]\|_{(W^{2,\infty}(Q))^3} < M, \forall j=1,2\right\},$$

其中 $M>0$, $0<\theta_0<1$, $\theta_1>0$ 是常数, $\epsilon_0=(\varepsilon_0,\zeta_0,\mu_0)$ 是 $\partial\Omega$ 上的光滑函数.

下面给出如下形式的 Maxwell 方程组的 Carleman 估计, 它主要是用来证明定理 1.1.

命题 2.2 令 $\varphi(x,t)$ 如 (2.1) 给出, 区域 Ω 满足 (1.4). 假设 $(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$, 且 $0<T<\frac{\lambda}{\beta}$, 其中 β 满足 (1.5), 假设 $f(x,t)\in C(\overline{Q})$. 设 $D,B,T_1,T_2\in(H_0^1(Q))^3$, 且在 Q 内满足

$$\partial_t D-\nabla\times H+\sigma fE=R_1, \quad \partial_t B+\nabla\times E=R_2, \tag{2.3}$$
$$D=\varepsilon E+\zeta H+T_1, \quad B=\zeta E+\mu H+T_2, \tag{2.4}$$
$$\nabla\cdot D=r_1, \quad \nabla\cdot B=r_2, \tag{2.5}$$

则存在常数 $s_1=s_1(\varrho)>0$, $K_2=K_2(s_1,\beta,\varrho,M,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\Omega,T,f)>0$, 使得对 $\forall s>s_1$, 有

$$\begin{aligned} &s\int_Q(|D|^2+|B|^2+|E|^2+|H|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt \\ &\quad\leqslant K_2\sum_{k=1}^{2}\int_Q(|R_k|^2+|r_k|^2+|T_k|^2+|\partial_tT_k|^2+|\nabla T_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt \end{aligned} \tag{2.6}$$

成立.

证明 令 $\widetilde{D}=D-T_1$, $\widetilde{B}=B-T_2$, 则由 (2.3)–(2.5) 知, $\widetilde{D},\widetilde{B},E,H$ 在 Q 内满足

$$\begin{aligned} &\partial_t\widetilde{D}-\nabla\times H=-\sigma fE+R_1-\partial_tT_1, \quad \partial_t\widetilde{B}+\nabla\times E=R_2-\partial_tT_2, \\ &\widetilde{D}=\varepsilon E+\zeta H, \quad \widetilde{B}=\zeta E+\mu H, \\ &\nabla\cdot\widetilde{D}=r_1-\nabla\cdot T_1, \quad \nabla\cdot\widetilde{B}=r_2-\nabla\cdot T_2. \end{aligned}$$

易知, 由 $(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$, 可得 $(\varepsilon,\zeta,\mu)\in\mathcal{U}$[8]. 因此, 我们可以利用命题 2.1. 由命题 2.1 和 $f(x,t)\in C(\overline{Q})$ 知, 存在 $s_2=s_2(\varrho)>0$, $k_1=k_1(s_2,\beta,\varrho,M,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\Omega,T,f)>0$, 使得对 $\forall s>s_2$, 有

$$s\int_Q(|E|^2+|H|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\leqslant k_1\sum_{k=1}^{2}\int_Q[|r_k|^2+|\nabla T_k|^2+|R_k|^2+|\partial_tT_k|^2+|E|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt. \tag{2.7}$$

令 $\widetilde{E}=E+\frac{\mu}{\xi}T_1-\frac{\zeta}{\xi}T_2$, $\widetilde{H}=H-\frac{\zeta}{\xi}T_1+\frac{\varepsilon}{\xi}T_2$, 则 D, B, $\widetilde{E}$ 和 $\widetilde{H}$ 在 Q 内满足

$$\begin{aligned} &\partial_tD-\nabla\times\widetilde{H}=R_1-\sigma fE+\nabla\times\left(\frac{\zeta}{\xi}T_1-\frac{\varepsilon}{\xi}T_2\right), \\ &\partial_tB+\nabla\times\widetilde{E}=R_2+\nabla\times\left(\frac{\mu}{\xi}T_1-\frac{\zeta}{\xi}T_2\right), \\ &D=\varepsilon\widetilde{E}+\zeta\widetilde{H}, \quad B=\zeta\widetilde{E}+\mu\widetilde{H}, \\ &\nabla\cdot D=r_1, \quad \nabla\cdot B=r_2. \end{aligned}$$

同理, 再由命题 2.1 知, 存在 $s_3=s_3(\varrho)>0$, $k_2=K_2(s_1,\beta,\varrho,M,\theta_0,\theta_1,\Omega,T)>0$, 使得对 $\forall s>s_3$, 有

$$s\int_Q(|D|^2+|B|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\leqslant k_2\sum_{k=1}^2\int_Q(|R_k|^2+|T_k|^2+|\nabla T_k|^2+|r_k|^2+|E|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt. \tag{2.8}$$

将 (2.7) 和 (2.8) 相加, 并且取 $K_2=2(k_1+k_2)$, $s_1=\max\{s_2,s_3,K_2\}$, 我们可得对 $\forall s>s_1$, 有

$$s\int_Q(|D|^2+|B|^2+|E|^2+|H|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\leqslant K_2\sum_{k=1}^2\int_Q(|r_k|^2+|R_k|^2+|T_k|^2+|\partial_tT_k|^2+|\nabla T_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt.$$

命题 2.2 证毕. □

为了证明定理 1.1, 我们再介绍一个一阶微分方程的 Carleman 估计, 证明参见文献 [14].

命题 2.3 [14]　$\varphi(x,t)$ 如 (2.1) 给出, 则存在 $K_3>0$, 使得对 $\forall s>K_3$, 有

$$\int_\Omega s|w|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\leqslant K_3\sum_{j=1}^3\int_\Omega|\partial_jw|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx,\quad\forall\, w\in C_0^1(\overline{\Omega}) \tag{2.9}$$

成立.

3　定理 1.1 的证明

下面分 5 步证明定理 1.1.

第 1 步　首先给出如下引理.

引理 3.1　令 $\varphi(x,t)$ 如 (2.1) 给出, 区域 Ω 满足 (1.4). 假设 $(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$, 且 $0<T<\frac{\lambda}{\beta}$, 其中 β 满足 (1.5), 另外假设 $f(x,t)\in C^2(\overline{Q})$. 设 $D,B\in(H^1(Q))^3$ 满足 (2.3)–(2.5) 且在 Q 内有 $T_1=T_2=0$, 在 Σ 上有 $D=B=0$, 则下面结论成立:

(1) 存在 $s_3=s_3(\varrho)>0$, $K_4=K_4(s_3,\beta,\varrho,M,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\Omega,T,f)>0$, 使得

$$\int_\Omega[|D(\cdot,0)|^2+|B(\cdot,0)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\leqslant K_4\sum_{j=1}^2\int_Q(|R_k|^2+|r_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt, \tag{3.1}$$

对任意的 $s>s_3$, $D,B\in(H_0^1(Q))^3$ 都成立.

(2) 存在 $K_5=K_5(M,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\Omega,T,f)>0$, 使得

$$\int_\Omega[|D(\cdot,t_2)|^2+|B(\cdot,t_2)|^2]dx\leqslant K_5\left\{\int_\Omega[|D(\cdot,t_1)|^2+|B(\cdot,t_1)|^2]dx+\int_{Q_*}(|R_1|^2+|R_2|^2)dxdt\right\}, \tag{3.2}$$

对任意的 $-T\leqslant t_1,t_2\leqslant T$ 都成立, 其中 $Q_*=\Omega\times(\min\{t_1,t_2\},\max\{t_1,t_2\})\subseteq Q$.

证明　当 $t_1=t_2$ 时, (3.2) 显然成立. 下面假设 $t_1\neq t_2\in[-T,T]$. 令

$$l=\begin{cases}M_0, & 当\ t_1<t_2\ 时,\\ -M_0, & 当\ t_1>t_2\ 时,\end{cases} \tag{3.3}$$

其中 M_0 是待定正常数. 由在 Σ 上 $D=B=0$, $D,B\in(H^1(Q))^3$ 知, 在 Σ 上 $E=H=0$, $E,H\in(H^1(Q))^3$. 由 (2.3) 点乘 $E=\gamma_1D+\gamma_2B$, (2.4) 点乘 $H=\gamma_2D+\gamma_3B$, 再两式相加得

$$\partial_t\mathcal{B}+\nabla\cdot(E\times H)+\sigma(x)f(x,t)(E\cdot E)=R_1\cdot(\gamma_1D+\gamma_2B)+R_2\cdot(\gamma_2D+\gamma_3B), \tag{3.4}$$

在 Q 内, 其中 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 由 (2.2) 给出,

$$\mathcal{B}=\frac{1}{2}[\gamma_1|D|^2+2\gamma_2(D\cdot B)+\gamma_3|B|^2]. \tag{3.5}$$

由 (2.2), (3.5) 和 $(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$ 知, 存在常数 $C_1,C_2>0$, 使得

$$C_1(|D|^2+|B|^2)\leqslant\mathcal{B}\leqslant C_2(|D|^2+|B|^2), \tag{3.6}$$

在 Q 内. 此处以及下文中 C_j $(j=1,2,\dots)$ 表示一般性的可与 Ω, $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, M, θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, ϵ_0, T 和 f 有关但与 s 无关的正常数. 令

$$\begin{aligned}
I_l&=\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega[\partial_t\mathcal{B}+\nabla\cdot(E\times H)+\sigma f(E\cdot E)]\mathrm{e}^{2s\varphi-lt}dxdt,\\
I_r&=\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega[R_1\cdot(\gamma_1D+\gamma_2B)+R_2\cdot(\gamma_2D+\gamma_3B)]\mathrm{e}^{2s\varphi-lt}dxdt,
\end{aligned}$$

其中 $s\geqslant0$, 则由 (3.4) 知, $I_l=I_r$. 由于在 Σ 上 $E=H=0$ 及分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
I_l\geqslant{}&\int_\Omega\mathcal{B}(\cdot,t_2)\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,t_2)-lt_2}dx-\int_\Omega\mathcal{B}(\cdot,t_1)\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,t_1)-lt_1}dx+\int_{Q_*}M_0\mathcal{B}\mathrm{e}^{2s\varphi-lt}dxdt\\
&-C_3\mathrm{e}^{TM_0}s\int_{Q_*}(\mathcal{B}+|E|^2+|H|^2)\cdot\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt-\int_{Q_*}|\sigma(x)f(x,t)||E|^2\mathrm{e}^{2s\varphi-lt}dxdt.
\end{aligned}$$

由 (3.6) 知, 可以取 M_0 充分大, 使得

$$\int_{Q_*}(M_0\mathcal{B}-|\sigma f||E|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi-lt}dxdt\geqslant C_4\int_{Q_*}(|D|^2+|B|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi-lt}dxdt,$$

其中 $C_4>0$. 则

$$\begin{aligned}
I_l\geqslant{}&C_1\mathrm{e}^{-TM_0}\int_\Omega[|D(\cdot,t_2)|^2+|B(\cdot,t_2)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,t_2)}dx-C_2\mathrm{e}^{TM_0}\int_\Omega[|D(\cdot,t_1)|^2+|B(\cdot,t_1)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,t_1)}dx\\
&+C_5\mathrm{e}^{-TM_0}\int_{Q_*}(|D|^2+|B|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt-C_6\mathrm{e}^{TM_0}s\int_{Q_*}(|D|^2+|H|^2+|B|^2+|E|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt,
\end{aligned}\tag{3.7}$$

$\forall\,s\geqslant0$ 都成立. 由不等式 $2ab\leqslant\vartheta a^2+\frac{1}{\vartheta}b^2$, $\forall\,\vartheta>0$, 得

$$I_r\leqslant C_7\mathrm{e}^{TM_0}\int_{Q_*}\left[\vartheta(|D|^2+|B|^2)+\frac{1}{\vartheta}(|R_1|^2+|R_2|^2)\right]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt,\quad\forall\,\vartheta>0,\quad s\geqslant0. \tag{3.8}$$

因此, 由 (3.7) 和 (3.8) 知, 取 $\vartheta=\frac{C_5}{C_7}\mathrm{e}^{-2TM_0}>0$, 得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega[|D(\cdot,t_2)|^2+|B(\cdot,t_2)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,t_2)}dx\\
&\quad\leqslant C_8\bigg\{\int_\Omega[|D(\cdot,t_1)|^2+|B(\cdot,t_1)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,t_1)}dx+\int_{Q_*}(|R_1|^2+|R_2|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\
&\qquad+s\int_{Q_*}(|D|^2+|H|^2+|B|^2+|E|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\bigg\},\quad\forall\,s\geqslant0.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

在 (3.9) 中, 取 $s=0$, 即得 (3.2). 进一步, 若 $D,B\in(H_0^1(Q))^3$, 则由命题 2.2 知, 存在 $s_3=s_3(\rho)>0$, 使得 $\forall\,s>s_3$ 时, (2.6) 成立. 因此, 在 (3.9) 中再取 $t_1=T$, $t_2=0$, 利用 (2.6) 可以估计 (3.9) 中右端最

后一项. 而且注意到此时 $D,B\in(H_0^1(Q))^3$, 从而 (3.9) 中右端第一项等于 0, 从而获得引理 3.1(1) 中的结论.

第 2 步　本节均令 $j=1,2$. 由 (1.2) 知,

$$\begin{cases}E[\epsilon;\Phi(j)]=\gamma_1 D[\epsilon;\Phi(j)]+\gamma_2 B[\epsilon;\Phi(j)],\\ H[\epsilon;\Phi(j)]=\gamma_2 D[\epsilon;\Phi(j)]+\gamma_3 B[\epsilon;\Phi(j)],\\ E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]=\widetilde{\gamma_1} D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]+\widetilde{\gamma_2} B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)],\\ H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]=\widetilde{\gamma_2} D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]+\widetilde{\gamma_3} B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)],\end{cases}\tag{3.10}$$

在 Q 内, 其中

$$\begin{aligned}&\xi=\varepsilon\mu-\zeta^2,\quad \gamma_1=\frac{\mu}{\xi},\quad \gamma_2=-\frac{\zeta}{\xi},\quad \gamma_3=\frac{\varepsilon}{\xi},\\ &\widetilde{\xi}=\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}-\widetilde{\zeta}^2,\quad \widetilde{\gamma_1}=\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\xi}},\quad \widetilde{\gamma_2}=-\frac{\widetilde{\zeta}}{\widetilde{\xi}},\quad \widetilde{\gamma_3}=\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\xi}},\end{aligned}\tag{3.11}$$

在 $\overline{\Omega}$ 上. 由 $\epsilon=(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$, $\widetilde{\epsilon}=(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\zeta},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})\in\mathcal{U}$ 知, $\gamma_k,\widetilde{\gamma_k}\in C^2(\overline{\Omega})$, $k=1,2,3$, 且

$$\gamma_1\gamma_3-\gamma_2^2=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{M},\quad \widetilde{\gamma_1}\widetilde{\gamma_3}-\widetilde{\gamma_2^2}=\frac{1}{\widetilde{\xi}}>\frac{1}{M},\tag{3.12}$$

在 $\overline{\Omega}$ 上. 令

$$\begin{cases}Y(\cdot;j)=\partial_t D[\epsilon;\Phi(j)]-\partial_t D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)],\\ Z(\cdot;j)=\partial_t B[\epsilon;\Phi(j)]-\partial_t B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)],\quad 在\,Q\,内,\end{cases}\tag{3.13}$$

$$\begin{cases}U(\cdot;j)=\gamma_1 Y(\cdot;j)+\gamma_2 Z(\cdot;j),\\ V(\cdot;j)=\gamma_2 Y(\cdot;j)+\gamma_3 Z(\cdot;j),\quad 在\,Q\,内,\end{cases}\tag{3.14}$$

$$R_3(\cdot;j)=\partial_t D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)],\quad R_4(\cdot;j)=\partial_t B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)],\quad 在\,Q\,内,\tag{3.15}$$

$$f_k=\widetilde{\gamma_k}-\gamma_k,\quad k=1,2,3,\quad f_4=\widetilde{\sigma}-\sigma,\quad 在\,\overline{\Omega}\,上,\tag{3.16}$$

$$\begin{cases}\Psi_1(\cdot;j)=\nabla\times[f_1R_3(\cdot;j)+f_2R_4(\cdot;j)],\\ \Psi_2(\cdot;j)=\nabla\times[f_2R_3(\cdot;j)+f_3R_4(\cdot;j)],\\ \Psi_3(\cdot;j)=f_1R_3(\cdot;j)+f_2R_4(\cdot;j),\quad 在\,Q\,内,\end{cases}\tag{3.17}$$

则 $Y(\cdot;j)$, $Z(\cdot;j)$, $U(\cdot;j)$, $V(\cdot;j)$, $R_3(\cdot;j)$, $R_4(\cdot;j)\in(W^{1,\infty}(Q))^3$, 在 Q 内满足

$$\begin{aligned}&\partial_t Y(\cdot;j)-\nabla\times V(\cdot;j)+\sigma(x)f(x,t)U(\cdot;j)\\ &\quad=f_4(x)(\partial_t f)(x,t)E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot)-\sigma(x)(\partial_t f)(x,t)\{E[\epsilon;\Phi(j)]-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}(\cdot)-\Psi_2(\cdot;j)\\ &\qquad+f_4(x)f(x,t)(\widetilde{\gamma_1}R_3(\cdot;j)+\widetilde{\gamma_2}R_4(\cdot;j))+\sigma(x)f(x,t)\Psi_3(\cdot;j),\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$\partial_t Z(\cdot;j)+\nabla\times U(\cdot;j)=\Psi_1(\cdot;j),\tag{3.19}$$

$$Y(\cdot;j)=\varepsilon U(\cdot;j)+\zeta V(\cdot;j),\quad Z(\cdot;j)=\zeta U(\cdot;j)+\mu V(\cdot;j),\tag{3.20}$$

$$\nabla\cdot Y(\cdot;j)=\nabla\cdot Z(\cdot;j)=0.\tag{3.21}$$

事实上, 由 (3.10)–(3.16) 知, 在 Q 内, 有

$$\begin{aligned}
&E[\epsilon;\Phi(j)]-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\\
&\quad=\gamma_1\big\{D[\epsilon;\Phi(j)]-D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\big\}-f_1D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]+\gamma_2\big\{B[\epsilon;\Phi(j)]-B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\big\}-f_2B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)], \qquad (3.22)\\
&H[\epsilon;\Phi(j)]-H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\\
&\quad=\gamma_2\big\{D[\epsilon;\Phi(j)]-D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\big\}-f_2D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]+\gamma_3\big\{B[\epsilon;\Phi(j)]-B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\big\}-f_3B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

分别对 (3.22) 和 (3.23) 两边关于 t 求导, 得

$$\partial_t\{E[\epsilon;\Phi(j)]-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}(\cdot)=U(\cdot;j)-f_1R_3(\cdot;j)-f_2R_4(\cdot;j), \tag{3.24}$$

$$\partial_t\{H[\epsilon;\Phi(j)]-H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}(\cdot)=V(\cdot;j)-f_2R_3(\cdot;j)-f_3R_4(\cdot;j), \tag{3.25}$$

在 Q 内. 由 (1.1), (3.15) 和 (3.16) 知,

$$\begin{aligned}
Y(\cdot;j)=&\ \nabla\times\{H[\epsilon;\Phi(j)]-H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}(\cdot)\\
&-\sigma(x)f(x,t)\{E[\epsilon;\Phi(j)]-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}(\cdot)+f_4(x)f(x,t)E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot), \qquad (3.26)\\
Z(\cdot;j)=&\ -\nabla\times\{E[\epsilon;\Phi(j)]-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}(\cdot), \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

在 Q 内. 分别对 (3.26) 和 (3.27) 两边关于 t 求导, 再利用 (3.10), (3.24) 和 (3.25), 由此得到 (3.18) 和 (3.19). 再由 (3.11), (3.12) 和 (3.14) 可直接推导出 (3.20), 由 (1.1) 和 (3.13) 知, (3.21) 成立.

由于 $\epsilon,\widetilde{\epsilon}\in\mathcal{U}$, 有

$$\|R_3(\cdot;j)\|_{(W^{1,\infty}(Q))^3},\quad \|R_4(\cdot;j)\|_{(W^{1,\infty}(Q))^3}\leqslant M.$$

由 $\epsilon,\widetilde{\epsilon}\in\mathcal{U}$ 和 γ_k, f_k, $k=1,2,3,4$ 的定义知, $f_k(x)\in C_0^1(\overline{\Omega})$, $k=1,2,3$ 和 $f_4(x)\in C^1(\overline{\Omega})$. 因此, 我们可以对 $f_k(x)$, $k=1,2,3$ 运用命题 2.3, 得到

$$s\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega|f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\leqslant C_9\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega|\nabla f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx, \tag{3.28}$$

对任意充分大的 $s>0$ 成立.

由 (1.6) 和 (2.1) 知,

$$\varphi(x,0)\geqslant 1,\quad 0<\varphi(x,-T)=\varphi(x,T)<1,\quad \forall\, x\in\overline{\Omega}. \tag{3.29}$$

因此, 对于给定的充分小的 $\eta\in(0,1-\sup_{x\in\overline{\Omega}}\varphi(x,T))$, 存在充分小的 $\delta=\delta(\eta)>0$, 使得

$$\varphi(x,t)\leqslant 1-\eta,\quad \forall\,(x,t)\in\overline{\Omega}\times([-T,-T+2\delta]\cup[T-2\delta,T]). \tag{3.30}$$

为了应用引理 3.1, 我们选取两个截断函数 χ_1 和 χ_2 满足 $\chi_1\in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi_2\in C_0^\infty(R)$, $0\leqslant\chi_1(x)\leqslant 1$, $\forall\, x\in\overline{\Omega}$; $0\leqslant\chi_2(t)\leqslant 1$, $\forall\, t\in R$; $\chi_1(x)=1$, $\forall\, x\in\Omega\setminus\omega$, 且

$$\chi_2(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } t\in([-T,-T+\delta]\cup[T-\delta,T]) \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } t\in[-T+2\delta,T-2\delta] \text{ 时}.\end{cases}$$

由 χ_1 和 χ_2 的定义知,

$$\nabla\chi_1(x)=0,\quad \forall\, x\in\Omega\setminus\omega, \tag{3.31}$$

$$\partial_t \chi_2(t) = \partial_t^2 \chi_2(t) = 0, \quad \forall\, t \in [-T, -T+\delta] \cup [-T+2\delta, T-2\delta] \cup [T-\delta, T]. \tag{3.32}$$

第 3 步 令

$$Y_1(\cdot;j) = \chi_1 Y(\cdot;j) \in (W^{1,\infty}(Q))^3, \quad Z_1(\cdot;j) = \chi_1 Z(\cdot;j) \in (W^{1,\infty}(Q))^3,$$
$$U_1(\cdot;j) = \chi_1 U(\cdot;j) \in (W^{1,\infty}(Q))^3, \quad V_1(\cdot;j) = \chi_1 V(\cdot;j) \in (W^{1,\infty}(Q))^3,$$

则由 (3.18)–(3.21), 得

$$\begin{aligned}&\partial_t Y_1(\cdot;j) - \nabla \times V_1(\cdot;j) + \sigma(x) f(x,t) U_1(\cdot;j)\\ &\quad= -(\nabla\chi_1) \times V(\cdot;j) - \chi_1 \Psi_2(\cdot;j) + \chi_1 \sigma(x) f(x,t) \Psi_3(\cdot;j) + \chi_1 f_4(x) f(x,t)(\widetilde{\gamma_1} R_3(\cdot;j)\\ &\qquad+ \widetilde{\gamma_2} R_4(\cdot;j)) - \chi_1 \sigma(x)(\partial_t f)(x,t)\{E[\epsilon;\Phi(j)] - E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\} + \chi_1 f_4(x)(\partial_t f)(x,t) E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)],\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\partial_t Z_1(\cdot;j) + \nabla \times U_1(\cdot;j) = \chi_1 \Psi_1(\cdot;j) + (\nabla\chi_1) \times U(\cdot;j), \tag{3.34}$$

$$Y_1(\cdot;j) = \varepsilon U_1(\cdot;j) + \zeta V_1(\cdot;j), \quad Z_1(\cdot;j) = \zeta U_1(\cdot;j) + \mu V_1(\cdot;j), \tag{3.35}$$

$$\nabla \cdot Y_1(\cdot;j) = (\nabla\chi_1) \cdot Y(\cdot;j), \quad \nabla \cdot Z_1(\cdot;j) = (\nabla\chi_1) \cdot Z(\cdot;j), \quad \text{在 } Q \text{ 内}, \tag{3.36}$$

$$Y_1(\cdot;j) = Z_1(\cdot;j) = 0, \quad \text{在 } \Sigma \text{ 上}. \tag{3.37}$$

对 $Y_1(\cdot;j)$ 和 $Z_1(\cdot;j)$ 应用引理 (3.1)(2), 有

$$\begin{aligned}w(t_2;j) \leqslant C_{10}\bigg\{& w(t_1;j) + \int_Q [|\Psi_1(\cdot;j)|^2 + |\Psi_2(\cdot;j)|^2 + |\Psi_3(\cdot;j)|^2] dxdt\\ &+ \int_Q |\nabla\chi_1|^2 [|U(\cdot;j)|^2 + |V(\cdot;j)|^2] dxdt + \int_Q |f_4|^2 dxdt\\ &+ \int_Q |\chi_1\{E[\epsilon;\Phi(j)] - E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}|^2 dxdt\bigg\}, \quad \forall -T \leqslant t_1, \quad t_2 \leqslant T,\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中

$$w(t;j) = \int_\Omega [|Y_1(\cdot,t;j)|^2 + |Z_1(\cdot,t;j)|^2] dx, \quad t \in [-T,T], \quad j = 1,2. \tag{3.39}$$

由 (3.15) 和 (3.17) 知,

$$\int_Q [|\Psi_1(\cdot;j)|^2 + |\Psi_2(\cdot;j)|^2 + |\Psi_3(\cdot;j)|^2] dxdt \leqslant C_{11} \sum_{k=1}^3 \int_\Omega (|f_k|^2 + |\nabla f_k|^2) dx. \tag{3.40}$$

由 (1.9), (3.13) 和 (3.14) 知,

$$\int_Q |\nabla\chi_1|^2 [|U(\cdot;j)|^2 + |V(\cdot;j)|^2] dxdt \leqslant C_{12} \int_{Q_\omega} [|Y(\cdot;j)|^2 + |Z(\cdot;j)|^2] dxdt \leqslant C_{13}\Theta^2, \tag{3.41}$$

$$\int_Q |f_4|^2 dxdt \leqslant C_{14} \int_\Omega |f_4|^2 dx. \tag{3.42}$$

由 (3.38)–(3.42) 知,

$$w(t_2;j) \leqslant C_{15}\bigg\{ w(t_1;j) + \sum_{k=1}^3 \int_\Omega (|f_k|^2 + |\nabla f_k|^2) dx + \int_\Omega |f_4|^2 dx + \Theta^2$$

$$+\int_Q |\chi_1\{E[\epsilon;\Phi(j)]-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}|^2dxdt\bigg\},\quad \forall -T\leqslant t_1,t_2\leqslant T. \tag{3.43}$$

下面分析 (3.43) 中的 $\int_Q |\chi_1\{E[\epsilon;\Phi(j)]-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]\}|^2dxdt$. 由 (1.1) 和 (1.2) 得

$$\begin{cases}\partial_t\widehat{D}(\cdot;j)-\nabla\times\widehat{H}(\cdot;j)+\sigma(x)f(x,t)\widehat{E}(\cdot;j)=f_4(x)f(x,t)E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot),\\ \partial_t\widehat{B}(\cdot;j)+\nabla\times\widehat{E}(\cdot;j)=0,\\ \widehat{D}(\cdot;j)=\varepsilon\widehat{E}(\cdot;j)+\zeta\widehat{H}(\cdot;j)+T_1(\cdot;j),\quad \widehat{B}(\cdot;j)=\zeta\widehat{E}(\cdot;j)+\mu\widehat{H}(\cdot;j)+T_2(\cdot;j),\\ \nabla\cdot\widehat{D}(\cdot;j)=0,\quad \nabla\cdot\widehat{B}(\cdot;j)=0,\end{cases} \tag{3.44}$$

在 Q 内, 其中

$$\begin{aligned}&\widehat{D}(\cdot;j)=D[\epsilon;\Phi(j)](\cdot)-D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot),\quad \widehat{B}(\cdot;j)=B[\epsilon;\Phi(j)](\cdot)-B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot),\\ &\widehat{E}(\cdot;j)=E[\epsilon;\Phi(j)](\cdot)-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot),\quad \widehat{H}(\cdot;j)=H[\epsilon;\Phi(j)](\cdot)-H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot),\\ &T_1(\cdot;j)=(\varepsilon-\widetilde{\varepsilon})E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot)+(\zeta-\widetilde{\zeta})H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot),\\ &T_2(\cdot;j)=(\zeta-\widetilde{\zeta})E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot)+(\mu-\widetilde{\mu})H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot),\end{aligned} \tag{3.45}$$

在 Q 内. 由 (3.11) 和 (3.44) 知,

$$\begin{aligned}&\widehat{E}(\cdot;j)=\gamma_1(\widehat{D}(\cdot;j)-T_1(\cdot;j))+\gamma_2(\widehat{B}(\cdot;j)-T_2(\cdot;j)),\\ &\widehat{H}(\cdot;j)=\gamma_2(\widehat{D}(\cdot;j)-T_1(\cdot;j))+\gamma_3(\widehat{B}(\cdot;j)-T_2(\cdot;j)),\end{aligned} \tag{3.46}$$

在 Q 内. 由 $\epsilon=(\varepsilon,\zeta,\mu,\sigma)\in\mathcal{U}$, $\widetilde{\epsilon}=(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\zeta},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})\in\mathcal{U}$ 知, $T_1(\cdot;j)=T_2(\cdot;j)=0$, 在 Σ 上. 令

$$\widehat{D_1}(\cdot;j)=\chi_1\widehat{D}(\cdot;j),\quad \widehat{B_1}(\cdot;j)=\chi_1\widehat{B}(\cdot;j),\quad \widehat{E_1}(\cdot;j)=\chi_1\widehat{E}(\cdot;j),\quad \widehat{H_1}(\cdot;j)=\chi_1\widehat{H}(\cdot;j),$$

则由 (3.44) 得

$$\begin{cases}\partial_t\widehat{D_1}(\cdot;j)-\nabla\times\widehat{H_1}(\cdot;j)+\sigma(x)f(x,t)\widehat{E_1}(\cdot;j)=\chi_1f_4(x)f(x,t)E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)]-(\nabla\chi_1)\times\widehat{H}(\cdot;j),\\ \partial_t\widehat{B_1}(\cdot;j)+\nabla\times\widehat{E_1}(\cdot;j)=(\nabla\chi_1)\times\widehat{E}(\cdot;j),\\ \widehat{D_1}(\cdot;j)=\varepsilon\widehat{E_1}(\cdot;j)+\zeta\widehat{H_1}(\cdot;j)+\chi_1T_1(\cdot;j),\quad \widehat{B_1}(\cdot;j)=\zeta\widehat{E_1}(\cdot;j)+\mu\widehat{H_1}(\cdot;j)+\chi_1T_2(\cdot;j),\\ \nabla\cdot\widehat{D_1}(\cdot;j)=(\nabla\chi_1)\cdot\widehat{D}(\cdot;j),\quad \nabla\cdot\widehat{B}(\cdot;j)=(\nabla\chi_1)\cdot\widehat{B}(\cdot;j),\end{cases}$$

在 Q 内, 且

$$\widehat{D_1}(\cdot;j)=\widehat{B_1}(\cdot;j)=0,\quad \chi_1T_1(\cdot;j)=\chi_1T_2(\cdot;j)=0,$$

在 Σ 上. 由引理 3.1(2) 可得, 存在 $C_{16}>0$, 使得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[|(\widehat{D_1}-\chi_1T_1)(\cdot,t_2;j)|^2+|(\widehat{B_1}-\chi_1T_2)(\cdot,t_2;j)|^2]dx\\ &\quad\leqslant C_{16}\bigg\{\int_Q(|\partial_tT_1(\cdot;j)|^2+|\partial_tT_2(\cdot;j)|^2)dxdt+\int_\Omega|f_4|^2dx\\ &\qquad+\int_\Omega[|(\widehat{D_1}-\chi_1T_1)(\cdot,t_1;j)|^2+|(\widehat{B_1}-\chi_1T_2)(\cdot,t_1;j)|^2]dx\end{aligned}$$

$$+\int_Q |\nabla\chi_1|^2[|\widehat{E}(\cdot;j)|^2+|\widehat{H}(\cdot;j)|^2]dxdt\bigg\}, \quad \forall\, t_1,t_2\in[-T,T]. \tag{3.47}$$

由 (3.31), (3.45) 和 (3.46), 有

$$\begin{aligned}
&\int_Q |\nabla\chi_1|^2[|\widehat{E}(\cdot;j)|^2+|\widehat{H}(\cdot;j)|^2]dxdt\\
&\quad\leqslant C_{17}\int_{Q_\omega}[|\widehat{E}(\cdot;j)|^2+|\widehat{H}(\cdot;j)|^2]dxdt\\
&\quad\leqslant C_{18}\bigg\{\Theta^2+\int_{Q_\omega}(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)dxdt\bigg\}\\
&\quad\leqslant C_{19}\bigg\{\Theta^2+\int_{\Omega}(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)dx\bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

由 (3.45), (3.47) 和 (3.48), 可以推得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega[|\widehat{D_1}(\cdot,t_2;j)|^2+|\widehat{B_1}(\cdot,t_2;j)|^2]dx\\
&\quad\leqslant C_{20}\bigg\{\int_\Omega[|\widehat{D_1}(\cdot,t_1;j)|^2+|\widehat{B_1}(\cdot,t_1;j)|^2]dx+\int_\Omega|f_4|^2dx+\Theta^2\\
&\qquad+\int_{\Omega}(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)dx\bigg\}, \quad \forall\, t_1,t_2\in[-T,T].
\end{aligned} \tag{3.49}$$

在 (3.49) 中, 取 $t_1=0$, 则因为 $\widehat{D_1}(\cdot,0)=\widehat{B_1}(\cdot,0)=0$, 得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega[|\widehat{D_1}(\cdot,t_2;j)|^2+|\widehat{B_1}(\cdot,t_2;j)|^2]dx\\
&\quad\leqslant C_{21}\bigg\{\int_{\Omega}(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)dx+\int_\Omega|f_4|^2dx+\Theta^2\bigg\}, \quad \forall\, t_2\in[-T,T].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

因此, 再利用 (3.46) 和 (3.50), 得

$$\begin{aligned}
\int_Q|\chi_1\widehat{E}(\cdot;j)|^2dxdt&=\int_Q|\chi_1[\gamma_1(\widehat{D}(\cdot;j)-T_1(\cdot;j))+\gamma_2(\widehat{B}(\cdot;j)-T_2(\cdot;j))]|^2dxdt\\
&\leqslant C_{22}\bigg\{\int_Q[|\widehat{D_1}(\cdot;j)|^2+|\widehat{B_1}(\cdot;j)|^2]dxdt+\int_{\Omega}(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)dx\bigg\}\\
&\leqslant C_{23}\bigg\{\int_\Omega|f_4|^2dx+\Theta^2+\|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\zeta-\widetilde{\zeta}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\mu-\widetilde{\mu}\|^2_{L^2(\Omega)}\bigg\}\\
&\leqslant C_{24}\bigg\{\int_\Omega|f_4|^2dx+\Theta^2+\|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}\bigg\},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

其中

$$\|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\zeta-\widetilde{\zeta}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\mu-\widetilde{\mu}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.52}$$

再由 (3.43) 和 (3.51), 并且注意到 $\widehat{E}(\cdot;j)$ 的定义, 我们得到

$$w(t_2;j)\leqslant C_{25}\bigg\{w(t_1;j)+\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)dx+\Theta^2+\|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega|f_4|^2dx\bigg\}, \tag{3.53}$$

$\forall\, t_1,t_2\in[-T,T]$.

第 4 步 令

$$Y_2(\cdot;j)=\chi_2 Y_1(\cdot;j)\in\left(H_0^1(Q)\right)^3,\quad Z_2(\cdot;j)=\chi_2 Z_1(\cdot;j)\in\left(H_0^1(Q)\right)^3,$$
$$U_2(\cdot;j)=\chi_2 U_1(\cdot;j)\in\left(H_0^1(Q)\right)^3,\quad V_2(\cdot;j)=\chi_2 V_1(\cdot;j)\in\left(H_0^1(Q)\right)^3.$$

由 (3.33)–(3.37) 知, Y_2, Z_2, U_2 和 V_2 满足下列方程组:

$$\begin{cases}\partial_t Y_2(\cdot;j)-\nabla\times V_2(\cdot;j)+\sigma(x)f(x,t)U_2(\cdot;j)\\ \qquad=(\partial_t\chi_2)Y_1(\cdot;j)-\chi_2(\nabla\chi_1)\times V(\cdot;j)-\chi_1\chi_2\sigma(x)(\partial_t f)(x,t)\widehat{E}(\cdot;j)\\ \qquad\quad-\chi_1\chi_2\Psi_2(\cdot;j)+\chi_1\chi_2\sigma(x)f(x,t)\Psi_3(\cdot;j)+\chi_1\chi_2 f_4(x)\partial_t f(x,t)E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot)\\ \qquad\quad+\chi_1\chi_2 f_4(x)f(x,t)(\widetilde{\gamma_1}R_3(\cdot;j)+\widetilde{\gamma_2}R_4(\cdot;j)),\\ \partial_t Z_2(\cdot;j)+\nabla\times U_2(\cdot;j)=\chi_1\chi_2\Psi_1(\cdot;j)+\chi_2(\nabla\chi_1)\times U(\cdot;j)+(\partial_t\chi_2)Z_1(\cdot;j),\\ Y_2(\cdot;j)=\varepsilon U_2(\cdot;j)+\zeta V_2(\cdot;j),\quad Z_2(\cdot;j)=\zeta U_2(\cdot;j)+\mu V_2(\cdot;j),\\ \nabla\cdot Y_2(\cdot;j)=\chi_2(\nabla\chi_1)\cdot Y(\cdot;j),\quad \nabla\cdot Z_2(\cdot;j)=\chi_2(\nabla\chi_1)\cdot Z(\cdot;j),\end{cases}$$

在 Q 内. 对 $Y_1(\cdot;j)$ 和 $Z_1(\cdot;j)$ 应用引理 3.1(1), 我们得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[|Y_2(\cdot,0;j)|^2+|Z_2(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\\ &\quad\leqslant C_{26}\bigg\{\int_Q(|\Psi_1(\cdot;j)|^2+|\Psi_2(\cdot;j)|^2+|\Psi_3(\cdot;j)|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt+\int_Q|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\ &\qquad+\int_Q|\chi_1\chi_2\widehat{E}(\cdot;j)|^2\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt+\int_Q|\partial_t\chi_2|^2[|Y_1(\cdot;j)|^2+|Z_1(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\ &\qquad+\int_{Q_\omega}|\nabla\chi_1|^2[|U(\cdot;j)|^2+|V(\cdot;j)|^2+|Y(\cdot;j)|^2+|Z(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\bigg\},\end{aligned}\tag{3.54}$$

对任意充分大的 $s>0$ 成立.

下面逐项估计 (3.54) 右端中的每一项. 由 (2.1) 和 λ 的定义知,

$$\varphi(x,t)-\varphi(x,0)=\mathrm{e}^{\rho(|x|^2-\lambda^2)}(\mathrm{e}^{-\rho\beta^2t^2}-1)\leqslant \mathrm{e}^{-\rho\beta^2t^2}-1\leqslant 0,\quad\forall\, x\in\overline{\Omega}.$$

因此,

$$\begin{aligned}&\int_Q(|\Psi_1(\cdot;j)|^2+|\Psi_2(\cdot;j)|^2+|\Psi_3(\cdot;j)|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\ &\quad\leqslant C_{27}\sum_{k=1}^3\int_Q(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\ &\quad\leqslant C_{28}\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}\int_{-T}^T\mathrm{e}^{2s[\varphi(x,t)-\varphi(x,0)]}dtdx\\ &\quad\leqslant C_{29}\kappa_1(s)\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx,\quad\forall\, s>0,\end{aligned}\tag{3.55}$$

其中

$$\kappa_1(s)=\int_{-T}^T\mathrm{e}^{2s(\mathrm{e}^{-\rho\beta^2t^2}-1)}dt.\tag{3.56}$$

由 (1.9), (3.13) 和 (3.14) 知,

$$\int_{Q_\omega}|\nabla\chi_1|^2[|U(\cdot;j)|^2+|V(\cdot;j)|^2+|Y(\cdot;j)|^2+|Z(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\leqslant C_{30}\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2,\quad\forall\, s>0,\tag{3.57}$$

其中

$$\Gamma=\sup_{x\in Q}\varphi(x,t)\geqslant 1.$$

类似 (3.55), 有

$$\int_Q|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\leqslant C_{31}\kappa_1(s)\int_\Omega|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx,\quad\forall\, s>0.\tag{3.58}$$

由 (3.29), (3.30), (3.39) 和 (3.53) 知,

$$\begin{aligned}
&\int_Q|\partial_t\chi_2|^2[|Y_1(\cdot;j)|^2+|Z_1(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\
&\quad\leqslant\bigg(\int_{-T+\delta}^{-T+2\delta}+\int_{T-2\delta}^{T-\delta}\bigg)\int_\Omega[|Y_1(\cdot;j)|^2+|Z_1(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\
&\quad\leqslant C_{32}\mathrm{e}^{2s(1-\eta)}\bigg(\int_{-T+\delta}^{-T+2\delta}+\int_{T-2\delta}^{T-\delta}\bigg)w(t;j)dt\\
&\quad\leqslant 2\delta C_{33}\mathrm{e}^{2s(1-\eta)}\bigg\{w(0;j)+\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)dx+\Theta^2+\|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega|f_4|^2dx\bigg\}\\
&\quad\leqslant C_{34}\delta\mathrm{e}^{-2s\eta}\bigg\{\int_\Omega[|Y_1(\cdot,0;j)|^2+|Z_1(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\int_\Omega|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\\
&\qquad+\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\bigg\}+C_{35}\mathrm{e}^{2s(1-\eta)}\|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}+C_{36}\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2,\quad\forall\, s>0.
\end{aligned}\tag{3.59}$$

而由于

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\varepsilon}-\varepsilon=\widetilde{\xi}f_3+\gamma_3\xi\widetilde{\xi}[(\widetilde{\gamma}_2+\gamma_2)f_2-\gamma_1f_3-\widetilde{\gamma}_3f_1],\\
&\widetilde{\zeta}-\zeta=-\widetilde{\xi}f_2-\gamma_2\xi\widetilde{\xi}[(\widetilde{\gamma}_2+\gamma_2)f_2-\gamma_1f_3-\widetilde{\gamma}_3f_1],\\
&\widetilde{\mu}-\mu=\widetilde{\xi}f_1+\gamma_1\xi\widetilde{\xi}[(\widetilde{\gamma}_2+\gamma_2)f_2-\gamma_1f_3-\widetilde{\gamma}_3f_1],
\end{aligned}\tag{3.60}$$

在 $\overline{\Omega}$ 上, 我们可得

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}&\leqslant\mathrm{e}^{-2s}\int_\Omega(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\\
&\leqslant C_{37}\mathrm{e}^{-2s}\sum_{k=1}^3\int_\Omega|f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx,\quad\forall\, s>0.
\end{aligned}\tag{3.61}$$

注意, 我们在 (3.61) 中应用了 (3.29). 从而 (3.59) 进一步可化为

$$\begin{aligned}
&\int_Q|\partial_t\chi_2|^2[|Y_1(\cdot;j)|^2+|Z_1(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\
&\quad\leqslant C_{38}\mathrm{e}^{-2s\eta}\bigg\{\int_\Omega|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx
\end{aligned}$$

$$+\delta\int_{\Omega}[|Y_1(\cdot,0;j)|^2+|Z_1(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\bigg\}+C_{39}\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2,\quad \forall\, s>0. \tag{3.62}$$

最后估计 (3.54) 右端中的 $\int_Q|\chi_1\chi_2\widehat{E}(\cdot;j)|^2\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt$. 为此, 令

$$\widehat{D_2}(\cdot;j)=\chi_2\widehat{D_1}(\cdot;j),\quad \widehat{B_2}(\cdot;j)=\chi_2\widehat{B_1}(\cdot;j),\quad \widehat{H_2}(\cdot;j)=\chi_2\widehat{H_1}(\cdot;j),\quad \widehat{E_2}(\cdot;j)=\chi_2\widehat{E_1}(\cdot;j),$$

则 $\widehat{D_2}(\cdot;j),\widehat{B_2}(\cdot;j)\in(H_0^2(Q))^3$, 而且 $\widehat{D_2}(\cdot;j)$, $\widehat{B_2}(\cdot;j)$, $\widehat{H_2}(\cdot;j)$ 和 $\widehat{E_2}(\cdot;j)$ 在 Q 内满足

$$\begin{aligned}
&\partial_t\widehat{D_2}(\cdot;j)-\nabla\times\widehat{H_2}(\cdot;j)+\sigma(x)f(x,t)\widehat{E_2}(\cdot;j)\\
&\qquad=\chi_1\chi_2f_4(x)f(x,t)E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot)-\chi_2(\nabla\chi_1)\times\widehat{H}(\cdot;j)+(\partial_t\chi_2)\widehat{D_1}(\cdot;j),\\
&\partial_t\widehat{B_2}(\cdot;j)+\nabla\times\widehat{E_2}(\cdot;j)=\chi_2(\nabla\chi_1)\times\widehat{E}(\cdot;j)+(\partial_t\chi_2)\widehat{B_1}(\cdot;j),\\
&\widehat{D_2}(\cdot;j)=\varepsilon\widehat{E_2}(\cdot;j)+\zeta\widehat{H_2}(\cdot;j)+\chi_1\chi_2T_1(\cdot;j),\\
&\widehat{B_2}(\cdot;j)=\zeta\widehat{E_2}(\cdot;j)+\mu\widehat{H_2}(\cdot;j)+\chi_1\chi_2T_2(\cdot;j),\\
&\nabla\cdot\widehat{D_2}(\cdot;j)=\chi_2(\nabla\chi_1)\cdot\widehat{D}(\cdot;j),\quad \nabla\cdot\widehat{B_2}(\cdot;j)=\chi_2(\nabla\chi_1)\cdot\widehat{B}(\cdot;j).
\end{aligned}$$

且 $\chi_1\chi_2T_1(\cdot;j)$, $\chi_1\chi_2T_2(\cdot;j)\in(H_0^2(Q))^3$. 由命题 2.2 知, 存在 $s_4>0$, $C_{40}>0$, 使得 $\forall\, s>s_4$, 有

$$\begin{aligned}
&s\int_Q|\widehat{E_2}(\cdot;j)|^2\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\
&\quad\leqslant C_{40}\bigg\{\int_Q|\partial_t\chi_2|^2[|\widehat{D_1}(\cdot;j)|^2+|\widehat{B_1}(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt+\int_Q|\nabla\chi_1|^2[|\widehat{D}(\cdot;j)|^2+|\widehat{B}(\cdot;j)|^2\\
&\qquad+|\widehat{E}(\cdot;j)|^2+|\widehat{H}(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt+\int_Q|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt+\int_Q(|\nabla(\varepsilon-\widetilde{\varepsilon})|^2+|\nabla(\zeta-\widetilde{\zeta})|^2\\
&\qquad+|\nabla(\mu-\widetilde{\mu})|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt+\int_Q(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\bigg\}.
\end{aligned}\tag{3.63}$$

类似 (3.55), 有

$$\begin{aligned}
&\int_Q(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\
&\quad\leqslant\kappa_1(s)\int_\Omega(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\\
&\quad\leqslant C_{41}\kappa_1(s)\sum_{k=1}^3\int_\Omega|f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx,\quad\forall\, s>0.
\end{aligned}\tag{3.64}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
&\int_Q(|\nabla(\varepsilon-\widetilde{\varepsilon})|^2+|\nabla(\zeta-\widetilde{\zeta})|^2+|\nabla(\mu-\widetilde{\mu})|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\
&\quad\leqslant\kappa_1(s)\int_\Omega(|\nabla(\varepsilon-\widetilde{\varepsilon})|^2+|\nabla(\zeta-\widetilde{\zeta})|^2+|\nabla(\mu-\widetilde{\mu})|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\\
&\quad\leqslant C_{42}\kappa_1(s)\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx,\quad\forall\, s>0.
\end{aligned}\tag{3.65}$$

由 (3.31), (3.45), (3.46) 和 (3.64), 得

$$\int_Q|\nabla\chi_1|^2[|\widehat{D}(\cdot;j)|^2+|\widehat{B}(\cdot;j)|^2+|\widehat{E}(\cdot;j)|^2+|\widehat{H}(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt$$

$$\leqslant C_{43}\left\{\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2+\int_{Q_\omega}(|\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}|^2+|\zeta-\widetilde{\zeta}|^2+|\mu-\widetilde{\mu}|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\right\}$$
$$\leqslant C_{44}\left\{\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2+\kappa_1(s)\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega|f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\right\},\quad\forall\, s>0.\tag{3.66}$$

由 (3.32), (3.50) 和 (3.61), 得

$$\begin{aligned}&\int_Q|\partial_t\chi_2|^2[|\widehat{D_1}(\cdot;j)|^2+|\widehat{B_1}(\cdot;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\\&\quad\leqslant C_{45}\mathrm{e}^{2s(1-\eta)}\left(\int_{-T+\delta}^{-T+2\delta}+\int_{T-2\delta}^{T-\delta}\right)\int_\Omega[|\widehat{D_1}(\cdot;j)|^2+|\widehat{B_1}(\cdot;j)|^2]dxdt\\&\quad\leqslant C_{46}\delta\mathrm{e}^{2s(1-\eta)}\left\{\|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega|f_4|^2dx+\Theta^2\right\}\\&\quad\leqslant C_{47}\mathrm{e}^{-2s\eta}\left\{\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega|f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\int_\Omega|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\right\}+C_{48}\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2,\quad\forall\, s>0.\end{aligned}\tag{3.67}$$

由 (3.58) 和 (3.63)–(3.67) 得

$$s\int_Q|\widehat{E_2}(\cdot;j)|^2\mathrm{e}^{2s\varphi}dxdt\leqslant C_{49}\left\{\kappa_2(s)\int_Q\left[|f_4|^2+\sum_{k=1}^{3}(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\right]\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2\right\},\tag{3.68}$$

$\forall\, s>s_4$, 其中

$$\kappa_2(s)=\mathrm{e}^{-2s\eta}+\kappa_1(s).\tag{3.69}$$

综合上面对于 (3.54) 右端各项的估计, 即 (3.55), (3.57), (3.58), (3.62) 和 (3.68), 将它们代到 (3.54) 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[|Y_2(\cdot,0;j)|^2+|Z_2(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\\&\quad\leqslant C_{50}\left\{\kappa_3(s)\left[\sum_{k=1}^{3}\int_Q(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\int_Q|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\right]\right.\\&\qquad\left.+\,\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2+\delta\mathrm{e}^{-2s\eta}\int_\Omega[|Y_1(\cdot,0;j)|^2+|Z_1(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\right\},\end{aligned}\tag{3.70}$$

对任意充分大的 $s>0$ 成立, 其中

$$\kappa_3(s)=\kappa_2(s)+\frac{\kappa_2(s)}{s}.\tag{3.71}$$

由于 $\chi_2(0)=1$, 所以,

$$\int_\Omega[|Y_1(\cdot,0;j)|^2+|Z_1(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx=\int_\Omega[|Y_2(\cdot,0;j)|^2+|Z_2(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx,$$

对任意的 $s>0$ 成立. 取 $s_5>0$ 充分大, 使得 $\forall\, s>s_5$, 有 $\delta\mathrm{e}^{-2s\eta}C_{50}<\frac{1}{2}$ 和 (3.70) 同时成立, 从而得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[|Y_1(\cdot,0;j)|^2+|Z_1(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\\&\quad\leqslant C_{51}\left\{\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2+\kappa_3(s)\left(\sum_{k=1}^{3}\int_Q(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\int_Q|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\right)\right\},\end{aligned}\tag{3.72}$$

对任意的 $s>s_5$ 成立. 又由于

$$Y(\cdot,0;j)=Y_1(\cdot,0;j)+(1-\chi_1)Y(\cdot,0;j),\quad Z(\cdot,0;j)=Z_1(\cdot,0;j)+(1-\chi_1)Z(\cdot,0;j),$$

在 Ω 内, 因此, 再由 $1-\chi_1(x)=0$, $\forall x\in\Omega\setminus\omega$, 得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[|Y(\cdot,0;j)|^2+|Z(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\\&\quad\leqslant C_{52}\bigg\{\int_\Omega[|Y_1(\cdot,0;j)|^2+|Z_1(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\\&\qquad+\int_\omega|1-\chi_1|^2[|Y(\cdot,0;j)|^2+|Z(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\bigg\},\quad\forall s>0.\end{aligned}\tag{3.73}$$

而由 (1.9) 和 (3.13), 得

$$\begin{aligned}\int_\omega|1-\chi_1|^2[|Y(\cdot,0;j)|^2+|Z(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx&\leqslant C_{53}\mathrm{e}^{2s\Gamma}\int_\omega[|Y(\cdot,0;j)|^2+|Z(\cdot,0;j)|^2]dx\\&\leqslant C_{54}\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2,\quad\forall s>0.\end{aligned}\tag{3.74}$$

将 (3.72) 和 (3.74) 代入 (3.73), 得

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^2\int_\Omega[|Y(\cdot,0;j)|^2+|Z(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(\cdot,0)}dx\\&\quad\leqslant C_{55}\bigg\{\kappa_3(s)\bigg[\sum_{k=1}^3\int_Q(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\int_Q|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\bigg]+\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2\bigg\},\end{aligned}\tag{3.75}$$

对任意的 $s>s_5$ 成立.

第 5 步 由 (1.1) 知,

$$D[\epsilon;\Phi(j)](\cdot,0)=D[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot,0)=d^j,\quad B[\epsilon;\Phi(j)](\cdot,0)=B[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot,0)=b^j,$$

在 Ω 内. 由 (3.22) 和 (3.23), 得

$$\begin{aligned}E[\epsilon;\Phi(j)](\cdot,0)-E[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot,0)&=-f_1d^j-f_2b^j,\\H[\epsilon;\Phi(j)](\cdot,0)-H[\widetilde{\epsilon};\Phi(j)](\cdot,0)&=-f_2d^j-f_3b^j,\end{aligned}$$

在 Ω 内. 因此, 由 (3.10), (3.26) 和 (3.27), 得

$$\begin{aligned}Y(\cdot,0;j)=&-\nabla\times(f_2d^j+f_3b^j)+\sigma(x)f(x,0)(f_1d^j+f_2b^j)+f_4f(x,0)(\widetilde{\gamma}_1d^j+\widetilde{\gamma}_2b^j)\\=&-f_2(\nabla\times d^j)-f_3(\nabla\times b^j)-(\partial_1f_2)(e_1\times d^j)-(\partial_1f_3)(e_1\times b^j)\\&-(\partial_2f_2)(e_2\times d^j)-(\partial_2f_3)(e_2\times b^j)-(\partial_3f_2)(e_3\times d^j)-(\partial_3f_3)(e_3\times b^j)\\&+f_4f(x,0)(\widetilde{\gamma}_1d^j+\widetilde{\gamma}_2b^j)+\sigma(x)f(x,0)(f_1d^j+f_2b^j),\end{aligned}\tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}Z(\cdot,0;j)&=\nabla\times(f_1d^j+f_2b^j)\\&=f_1(\nabla\times d^j)+f_2(\nabla\times b^j)+(\partial_1f_1)(e_1\times d^j)+(\partial_1f_2)(e_1\times b^j)\\&\quad+(\partial_2f_1)(e_2\times d^j)+(\partial_2f_2)(e_2\times b^j)+(\partial_3f_1)(e_3\times d^j)+(\partial_3f_2)(e_3\times b^j),\end{aligned}\tag{3.77}$$

在 Ω 内. 令

$$G_3=\begin{pmatrix} & -f(x,0)(\widetilde{\gamma}_1 d^1+\widetilde{\gamma}_2 b^1)\\ G & 0\\ & -f(x,0)(\widetilde{\gamma}_1 d^2+\widetilde{\gamma}_2 b^2)\\ & 0\end{pmatrix}.$$

由 $\widetilde{\epsilon}=(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\zeta},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})\in\mathcal{U}$, (3.11) 和 (3.12), 有 $\widetilde{\gamma}_1-|\widetilde{\gamma}_2|>\frac{\theta_2}{M}$, 在 $\overline{\Omega}$ 上. 因此, 由定理 1.1 的条件知, 可以取到 G_3 的一个 10×10 阶子矩阵 G_{30} 满足

$$\begin{aligned}|\det G_{30}|&=|-f(x,0)\widetilde{\gamma}_1\det G_{10}-f(x,0)\widetilde{\gamma}_2\det G_{20}|\\&\geqslant|f(x,0)|(\widetilde{\gamma}_1|\det G_{10}|-|\widetilde{\gamma}_2||\det G_{20}|)\geqslant\frac{\theta_2\theta_3\theta_4}{M},\end{aligned}$$

在 Ω 内. 从而对于 $\forall x\in\overline{\Omega}$, $G_{30}(x)$ 可逆. 另一方面, 由 G_3 的定义知,

$$\begin{aligned}G_3(x)F(x)=&\begin{pmatrix}-Y(x,0;1)\\ Z(x,0;1)\\ -Y(x,0;2)\\ Z(x,0;2)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\sigma(x)f(x,0)d^1(x) & -\sigma(x)f(x,0)b^1(x)+\nabla\times d^1(x) & \nabla\times b^1(x)\\ \nabla\times d^1(x) & \nabla\times b^1(x) & 0\\ -\sigma(x)f(x,0)d^2(x) & -\sigma(x)f(x,0)b^2(x)+\nabla\times d^2(x) & \nabla\times b^2(x)\\ \nabla\times d^2(x) & \nabla\times b^2(x) & 0\end{pmatrix}\\&\times\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ f_3(x)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.78}$$

在 Ω 内, 其中 $F=(\partial_1 f_1,\partial_1 f_2,\partial_1 f_3,\partial_2 f_1,\partial_2 f_2,\partial_2 f_3,\partial_3 f_1,\partial_3 f_2,\partial_3 f_3,f_4)^{\mathrm{T}}$. 因此, 在 Ω 内, 有

$$\sum_{k=1}^3|\nabla f_k|^2+|f_4|^2\leqslant C_{56}|G_3F|^2\leqslant C_{57}\bigg\{\sum_{j=1}^2[|Y(\cdot,0;j)|^2+|Z(\cdot,0;j)|^2]+\sum_{k=1}^3|f_k|^2\bigg\}.\tag{3.79}$$

从而由 (3.28) 和 (3.75), 得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\int_\Omega|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\\&\quad\leqslant C_{58}\bigg\{\sum_{j=1}^2\int_\Omega[|Y(\cdot,0;j)|^2+|Z(\cdot,0;j)|^2]\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\sum_{k=1}^3\int_\Omega|f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\bigg\}\\&\quad\leqslant C_{59}\bigg\{\kappa_4(s)\sum_{k=1}^3\int_\Omega|\nabla f_k|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\kappa_3(s)\int_\Omega|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\mathrm{e}^{2s\Gamma}\Theta^2\bigg\},\end{aligned}\tag{3.80}$$

对任意的 $s>s_5$ 成立, 其中

$$\kappa_4(s)=\kappa_3(s)+\frac{1}{s}.\tag{3.81}$$

由 $\kappa_\imath(s)$, $\imath=1,2,3,4$ 的定义知, 存在 $s_6>s_5$, 使得 $\forall s>s_6$, 有 $C_{59}\kappa_4(s)<\frac{1}{2}$, $C_{59}\kappa_3(s)<\frac{1}{2}$ 和 (3.80) 同时成立. 因此, 由 (3.29) 和 (3.80) 知,

$$\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)dx+\int_\Omega|f_4|^2dx\leqslant\mathrm{e}^{-2s}\bigg\{\sum_{k=1}^3\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx+\int_\Omega|f_4|^2\mathrm{e}^{2s\varphi(x,0)}dx\bigg\}$$

$$\leqslant C_{60}\mathrm{e}^{2s(\Gamma-1)}\Theta^2, \quad \forall s>s_6. \tag{3.82}$$

取 $s>0$ 充分大并固定不变, 则

$$\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)dx+\int_\Omega|f_4|^2dx\leqslant C_{61}\Theta^2. \tag{3.83}$$

由 (3.60) 和 (3.83), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\varepsilon}-\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\zeta}-\zeta\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\mu}-\mu\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\sigma}-\sigma\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\quad\leqslant C_{62}\bigg\{\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega(|f_k|^2+|\nabla f_k|^2)dx+\int_\Omega|f_4|^2dx\bigg\}\leqslant C_{63}\Theta^2,\end{aligned} \tag{3.84}$$

即

$$\|\widetilde{\varepsilon}-\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\zeta}-\zeta\|_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\mu}-\mu\|_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{\sigma}-\sigma\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{64}\Theta. \tag{3.85}$$

定理 1.1 证毕. □

4 推论 1.2 的证明

下面简要地证明推论 1.2.

证明 在第 1 步到第 5 步的等式 (3.77) 之前, 推论 1.2 的证明与定理 1.1 的证明基本相同. 因此, 我们不再重复. 本节均令 $l=1,2,\dots,N$. 令

$$G_3^l=\begin{pmatrix} & -f(x,0)(\widetilde{\gamma}_1d^{2l-1}+\widetilde{\gamma}_2b^{2l-1})\\ G^l & 0\\ & -f(x,0)(\widetilde{\gamma}_1d^{2l}+\widetilde{\gamma}_2b^{2l})\\ & 0\end{pmatrix}.$$

由 $\widetilde{\epsilon}=(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\zeta},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})\in\mathcal{U}$, (3.11) 和 (3.12), 我们有 $\widetilde{\gamma}_1-|\widetilde{\gamma}_2|>\frac{\theta_2}{M}$, 在$\overline{\Omega}$上. 因此, 由推论 1.2 的条件知, 我们可以取到 G_3^l 的一个 10×10 阶子矩阵 G_{30}^l 满足

$$\begin{aligned}|\det G_{30}^l|&=|-f(x,0)\widetilde{\gamma}_1\det G_{10}^l-f(x,0)\widetilde{\gamma}_2\det G_{20}^l|\\&\geqslant|f(x,0)|(\widetilde{\gamma}_1|\det G_{10}^l|-|\widetilde{\gamma}_2||\det G_{20}^l|)\geqslant\frac{\theta_2\theta_3\theta_4}{M},\end{aligned}$$

在 Ω_l 内. 从而对于 $\forall x\in\Omega_l$, $G_{30}^l(x)$ 可逆. 另一方面, 由 G_3^l 的定义知, 在 Ω_l 内,

$$\begin{aligned}&G_3^l(x)F(x)\\&=\begin{pmatrix}-Y(x,0;2l-1)\\Z(x,0;2l-1)\\-Y(x,0;2l)\\Z(x,0;2l)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\sigma(x)f(x,0)d^{2l-1}(x) & -\sigma(x)f(x,0)b^{2l-1}(x)+\nabla\times d^{2l-1}(x) & \nabla\times b^{2l-1}(x)\\ \nabla\times d^{2l-1}(x) & \nabla\times b^{2l-1}(x) & 0\\ -\sigma(x)f(x,0)d^{2l}(x) & -\sigma(x)f(x,0)b^{2l}(x)+\nabla\times d^{2l}(x) & \nabla\times b^{2l}(x)\\ \nabla\times d^{2l}(x) & \nabla\times b^{2l}(x) & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\times \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

其中

$$F = (\partial_1 f_1, \partial_1 f_2, \partial_1 f_3, \partial_2 f_1, \partial_2 f_2, \partial_2 f_3, \partial_3 f_1, \partial_3 f_2, \partial_3 f_3, f_4)^{\mathrm{T}}.$$

因此, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} |\nabla f_k|^2 + |f_4|^2 &\leqslant C_{65}|G_3^l F|^2 \leqslant C_{66}\Bigg\{\sum_{j=2l-1}^{2l}[|Y(\cdot,0;j)|^2 + |Z(\cdot,0;j)|^2] + \sum_{k=1}^{3}|f_k|^2\Bigg\} \\ &\leqslant C_{67}\Bigg\{\sum_{j=1}^{2N}[|Y(\cdot,0;j)|^2 + |Z(\cdot,0;j)|^2] + \sum_{k=1}^{3}|f_k|^2\Bigg\},\end{aligned}$$

在 Ω_l 内. 再由 (1.10), 我们得到

$$\sum_{k=1}^{3} |\nabla f_k|^2 + |f_4|^2 \leqslant C_{68}\Bigg\{\sum_{j=1}^{2N}[|Y(\cdot,0;j)|^2 + |Z(\cdot,0;j)|^2] + \sum_{k=1}^{3}|f_k|^2\Bigg\}, \tag{4.2}$$

在 Ω 内. 而接下来的证明将与定理 1.1 的证明中的不等式 (3.79) 以后的证明完全类似. 因此, 在此不再赘述. □

致谢 感谢审稿人对本文修改提出的宝贵意见.

参考文献

1 孔金瓯. 麦克斯韦方程. 北京: 高等教育出版社, 2004: 47–51
2 Romanov V G. Inverse Problem of Mathematical Physics. Utrecht: VNU Science Press, 1987
3 Romanov V G, Kabanikhin S I. Inverse Problems for Maxwell's Equations. Utrecht: VSP, 1994
4 Sun Z, Uhlmann G. An inverse boundary for Maxwell's equations. Arch Ration Mech Anal, 1992, 119: 71–93
5 Yamamoto M. A mathematical aspect of inverse problems for non-stationary Maxwell's equations. Int J Appl Electromangnet Mech, 1997, 8: 77–98
6 Yamamoto M. On an inverse problem of detemining source terms in Maxwell's equations with a single measurement. In: Inverse Problems, Tomopraphy and Image Processing, vol. 15. New York: Plenum Press, 1998, 241–256
7 Li S M, Yamamoto M. Inverse source problem for Maxwell's equations in anisotropic media. Appl Anal, 2005, 84: 1051–1067
8 Li S M, Yamamoto M. An inverse problem for Maxwell's equations in anisotropic media in two dimensions. Chin Ann Math Ser B, 2007, 28: 35–54
9 Li S M. An inverse problem for Maxwell's equations in bi-isotropic media. SIAM J Math Anal, 2005, 37: 1027–1043
10 Bellassoued M, Cristofol M, Soccorsi E. Inverse boundary value problem for dynamical heterogeneous Maxwells's system. Inverse Problems, 2012, 28: 095009
11 Duvaut G, Lions J L. Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1976
12 Bukhgeim A L, Klibanov M V. Global uniqueness of a class of multidimensional inverse problem. Soviet Math Dokl, 1981, 24: 244–247
13 Bukhgeim A L. Introduction to the Theory of Inverse Problems. Utrecht: VSP, 2000
14 Imanuvilov O Y, Isakov V, Yamamoto M. An inverse problem for the dynamical Lame system with two sets of boundary data. Comm Pure Appl Math, 2003, 56: 1366–1382
15 Imanuvilov O Y, Yamamoto M. Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations. Inverse Problems, 2001, 17: 717–728

16 Imanuvilov O Y, Yamamoto M. Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its application. In: Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems. Lecture Notes in Pure and Appl, vol. 218. New York: Math Marcel-Dekker, 2001, 113–137
17 Imanuvilov O Y, Yamamoto M. Determination of a coeffocoent in an acoustic equation with a single measurment. Inverse Problems, 2003, 19: 157–171
18 Isakov V. Uniqueness of the continuation across a time-like hyperplane and related inverse problem for hyperbolic equations. Comm Partial Differential Equations, 1989, 14: 465–478
19 Isakov V. Inverse Problem for Partial Differential Equation. New York: Springer-Verlag, 1998
20 Khaidarov A. Carleman estimates and inverse problems for second order hyperbolic equations. Math USSR Sb, 1987, 58: 267–277
21 Khaidarov A. On stability estimates in multidimensional inverse problems for differential equations. Soviet Math Dokl, 1989, 38: 614–617
22 Klibanov M V. Inverse problems and Carleman estimates. Inverse Problems, 1992, 8: 575–596
23 Yamamoto M. Uniqueness and stability in multidimentional hyperbolic inverse problems. J Math Pure Appl, 1999, 78: 65–98

An inverse problem for Maxwell's equations in non-stationary conducting media

LI ShuMin & SHENG DanDan

Abstract In this paper, we consider Maxwell's equations in non-stationary conducting media. We discuss an inverse problem of determining the coefficients ε, ζ, μ in the constitutive relations and the conductivity coefficient σ from a finite number of interior measurements. We prove a Lipschitz stability estimate for the inverse problem by applying the argument on the basis of Carleman estimate.

Keywords **inverse problem, Maxwell's equations, Carleman estimate, stability**

MSC(2010) **34D20, 45Q05, 65M32, 65L09**

doi: 10.1360/012012-499