# 任意共形同轴线电容的变分闭式

梁昌洪 李 龙 史小卫

(西安电子科技大学天线与微波技术国防重点实验室, 西安 710071)

摘要 基于连续函数的变分极值理论, 从共形同轴线电容问题中提炼出基本三角形和任意三角形, 由它们可以叠加成任意共形同轴线, 同时进一步发展了微分三角形来解决任意曲线方程, 导出了任意共形同轴线电容的变分解析闭式, 从而比较彻底地解决了任意共形同轴线电容问题. 文中给出了各种共形同轴线的实例, 讨论了所提出方法的应用和解析闭式的准确性.

关键词 变分闭式 任意共形同轴线 微分三角形 电容

## 1 引言

长期以来, 各种新型截面同轴线的探索和研究从未间断过[1~8]. 这是由于微波理论和通讯技术两方面的发展和刺激, 计算机和计算技术的飞速发展似乎可以把一切问题归结为数值计算. 实际证明, 这种看法存在一定的片面性. 如果问题存在精度较高的解析闭式, 那么对其性能的分析和优化就会大大加强, 而且更有助于我们从概念上去理解各种传输线的特性.

众所周知, TEM 模传输线电容 $C$ 与特性阻抗 $Z_0$ 紧密相关, 有

$$Z_0 = \frac{1}{vC}, \tag{1}$$

上式中, $v$ 是传播速度. 因此我们研究电容 $C$ 有着重要的意义.

本文将研究任意共形同轴线, 如图 1 所示. 所谓共形是指任何由中心发出的射线到外导体距离与到内导体距离之比等于一个常数$k$. 文献[1]已经导出了这类问题用电位函数$\Phi$表达的变分泛函:

$$C = \frac{2W}{V^2} = \varepsilon \frac{\iint_S (\nabla \Phi)^2 \, \mathrm{d}S}{\left( \int_l \nabla \Phi \cdot d\vec{l} \right)^2}, \tag{2}$$

2004-04-14 收稿, 2005-03-14 收修改稿

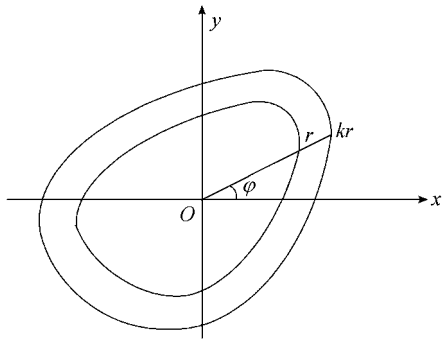


图 1 任意共形同轴线

其中, $W$ 表示静电场储能, $V$ 为内外导体的电位差. 根据能量极小原理, (2)式表示的变分极值是极小值. 换句话说, (2)式所给出的是电容上界.

本文首先推证连续函数的变分极值关系, 再从基本三角形和任意三角形的电容出发讨论任意共形同轴线电容问题. 这不仅由于很多折线图形(例如多边形)是由三角形叠加而成, 而且我们以此为基础进一步导出了微分三角形理论, 从而比较彻底地解决了任意共形同轴传输线的电容(也即特性阻抗问题). 值得指出, 由于变分稳定, 本文所获得的解析闭式具有较高的精度.

## 2 连续函数 $f(u)$的变分极值

定义变分泛函$\lambda[f(u)]$为

$$\lambda[f(u)]=\frac{\left[\int_{u_1}^{ku_1} f(u)\mathrm{d}u\right]^2}{\int_{u_1}^{ku_1} f^2(u)u\mathrm{d}u}, \tag{3}$$

把积分离散化, 且考虑 $n$ 充分大, 可将上式改写成 Rayleigh 商式:

$$\lambda[f(u)]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[f(u_1)\mathrm{d}u, f(u_2)\mathrm{d}u,\cdots, f(u_n)\mathrm{d}u,\right]\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(u_1)\mathrm{d}u\\f(u_2)\mathrm{d}u\\\vdots\\f(u_n)\mathrm{d}u\end{bmatrix}}{\left[f(u_1)\mathrm{d}u, f(u_2)\mathrm{d}u,\cdots, f(u_n)\mathrm{d}u,\right]\begin{bmatrix}\frac{u_1}{\mathrm{d}u} & & & 0\\ & \frac{u_2}{\mathrm{d}u} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{u_n}{\mathrm{d}u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(u_1)\mathrm{d}u\\f(u_2)\mathrm{d}u\\\vdots\\f(u_n)\mathrm{d}u\end{bmatrix}}, \tag{4}$$

其中 $u_n = ku_1$. (4)式也可简写成

$$\lambda[f(u)]=\frac{[F]^T[A][F]}{[F]^T[B][F]}, \tag{5}$$

式中 $[F]^T=[f(u_1)\mathrm{d}u, f(u_2)\mathrm{d}u,\cdots, f(u_n)\mathrm{d}u]^T$，$[A]=[1]\,[1]^T$ 是张量形式，对于[A]的约束, Cheng已经证明[9]，$\lambda[f(u)]$ 存在，且唯一存在极大值，即

$$\max\lambda[f(u)]=[1]^T[B]^{-1}[1], \tag{6}$$

而此时所对应的本征矢为

$$[F]=[B]^{-1}[1], \tag{7}$$

(7)式可具体写出

$$\begin{bmatrix} f(u_1)\mathrm{d}u \\ f(u_2)\mathrm{d}u \\ \vdots \\ f(u_n)\mathrm{d}u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{u_1}\mathrm{d}u \\ \dfrac{1}{u_2}\mathrm{d}u \\ \vdots \\ \dfrac{1}{u_n}\mathrm{d}u \end{bmatrix}, \tag{8}$$

我们很易得到在变分极值时，有

$$f(u)=\frac{1}{u}, \tag{9}$$

且

$$\min_f\frac{\int_{u_1}^{ku_1}f^2(u)u\mathrm{d}u}{\left[\int_{u_1}^{ku_1}f(u)\mathrm{d}u\right]^2}=\frac{1}{\ln k}, \tag{10}$$

对(10)式结果，我们还可以进一步推广为

$$\min_f\frac{\int_{u_1}^{ku_1}f^2(u)g(u)\mathrm{d}u}{\left[\int_{u_1}^{ku_1}f(u)\mathrm{d}u\right]^2}=\frac{1}{\int_{u_1}^{ku_1}\dfrac{1}{g(u)}\mathrm{d}u}, \tag{11}$$

且当上式趋于变分极值时，有

$$f(u)=\frac{1}{g(u)}, \tag{12}$$

注意 $g(u)>0$．这一连续函数的变分极值关系为后面导出共形同轴线电容的解析闭式奠定了理论基础.

## 3 基本三角形和任意三角形

我们将从基本三角形出发研究任意共形同轴线. 基本三角形 $OAB$ 如图 2 所示, $\angle OBA = 90°$ 是直角. 采用变分泛函极值研究基本三角形. 根据稳定性, 我们假定等位线平行于 $y$ 轴, 也即是 $x$ 为常数, 同时各个基本三角形之间的电容是并联关系, 即

$$C = \sum_{i=1}^{n} \Delta C_i \,, \tag{13}$$

其中, (13)式表示共形同轴线由 $n$ 个基本三角形组成, 各为 $\Delta C_i$, 而 $C$ 是总电容.

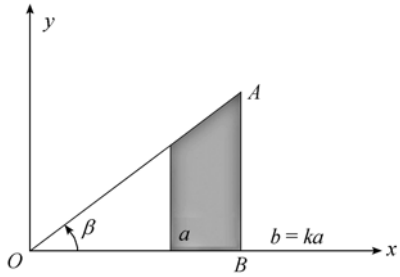


图 2 基本三角形

本文假定 $\Phi(x)$ 的梯度为

$$\nabla \Phi(x) = f(x)\hat{a}_x \,, \tag{14}$$

把这一假设代入(2)式的变分泛函可知

$$\Delta C_i = \varepsilon \int_0^{\beta} \mathrm{d}\varphi \frac{\int_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{\frac{b}{\cos\phi}} f^2(x) r \mathrm{d}r}{\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2} = \varepsilon \int_0^{\beta} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\int_a^b f^2(x) x \mathrm{d}x}{\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2} \,, \tag{15}$$

其中, 对于共形同轴线, 有 $b = ka$. 前面已经证明: 当 $\dfrac{\int_a^b f^2(x)x\mathrm{d}x}{\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2}$ 变分泛函取极值时, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, 则(15)式成为

$$\Delta C_i = \varepsilon \tan\beta / \ln k \,, \tag{16}$$

其中 $k = b/a$.

作为一个直接的应用例子, 考虑图 3 正 $n$ 边形共形同轴线, 由于对称性, 只要取 $\dfrac{1}{2n}$ 作基本三角形, 而由 $2n$ 个三角形叠加, $\beta = \pi/n$.

$$C=\frac{2n\varepsilon\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\ln k},\tag{17}$$

作为特例, 当 $n=4$, 也即正方形( $2a\times 2a$ )时

$$C=\frac{8\varepsilon}{\ln k},\tag{18}$$

而当 $n\to\infty$, 即圆同轴线 $C=2\pi\varepsilon/\ln k$, 这是已知的结果.

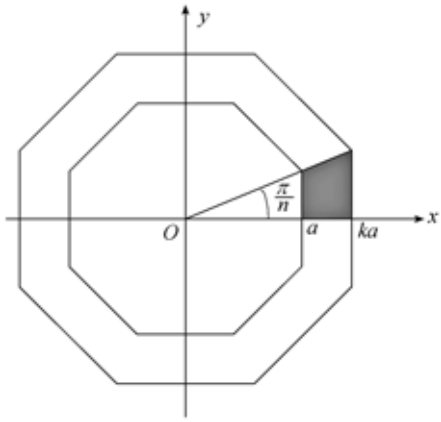


图 3　正 $n$ 边形共形同轴线

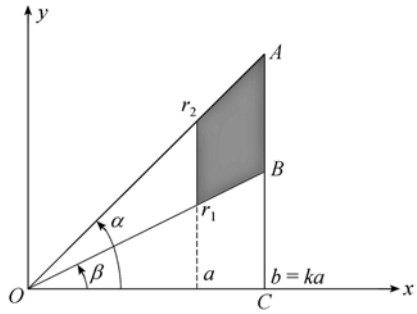


图 4　任意三角形 $OAB$

下面, 我们将进一步讨论如图 4 所示的任意三角形. 已知 $OB=r_1$, $OA=r_2$, $\angle AOB=\alpha-\beta=\Delta\varphi$. 注意在定义中, $\beta$ 可正可负, 于是可包括一切锐、钝角三角形. 从概念上很容易看出 $\Delta OAB=\Delta OAC-\Delta OBC$, 由基本三角形结果(16)式容易导出, 对于任意三角形, 电容 $\Delta C_i$ 有

$$\Delta C_i=\frac{\varepsilon}{\ln k}[\tan(\beta+\Delta\varphi)-\tan\beta],\tag{19}$$

根据三角函数关系可进一步写出

$$\Delta C_i=\frac{\varepsilon}{\ln k}\tan(\Delta\varphi)\frac{1+\tan^2\beta}{1-\tan(\Delta\varphi)\tan\beta},\tag{20}$$

如果我们采用已知值 $r_1, r_2$ 和夹角 $\Delta\varphi$ 来表示, 则又有

$$\Delta C_i=\frac{\varepsilon}{\ln k}\cdot\frac{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\Delta\varphi)}{r_1r_2\sin(\Delta\varphi)},\tag{21}$$

(20)和(21)式是计算任意三角形的基本公式.

## 4　微分三角形

为了研究由任意曲线构成的共形同轴线. 我们定义微分三角形 $\Delta OAB$, 见图

5 所示. 比较图 4, 容易看出, 微分三角形是任意三角形夹角 $\Delta\varphi$ 趋于无限小 $\mathrm{d}\varphi$ 的一个结果. 在(20)式的基础上, 可导出

$$\mathrm{d}C = \frac{\varepsilon}{\ln k}(1+\tan^2\beta)\mathrm{d}\varphi\,, \tag{22}$$

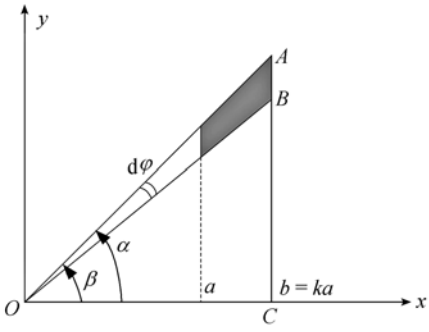


图 5 微分三角形

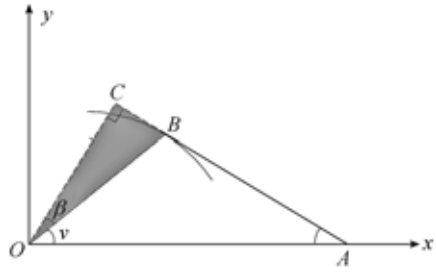


图 6 任意曲线时$\beta$角关系

我们略去了 $(\mathrm{d}\varphi)^2$ 以上的高次项. 如果画出任意曲线构成的共形同轴线如图 6 所示, 则有

$$\tan(\beta+v) = -\frac{1}{(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}\,, \tag{23}$$

$$\tan v = y/x\,, \tag{24}$$

于是写出

$$\frac{\tan\beta+\dfrac{y}{x}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)\tan\beta} = -\frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}\,, \tag{25}$$

可导出$\beta$角关系是

$$\tan^2\beta = \frac{\left[1+\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]^2}{\left[\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]^2}\,, \tag{26}$$

代入(22)式, 最后得到

$$C = \frac{\varepsilon}{\ln k}\int_0^{2\pi}\frac{\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]}{\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]^2}\mathrm{d}\varphi\,, \tag{27}$$

(27)式即本文给出的任意曲线构成的共形同轴线电容的变分闭式.

## 5　应用实例

我们分三种情况讨论本文所提出方法的实际应用和解析闭式的准确性.

### 5.1　曲线构成的共形同轴线电容

这里以椭圆共形同轴线为例讨论(27)式之应用, 具体见图 7 所示. 椭圆方程为

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \tag{28}$$

很容易导出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\tan\varphi}, \tag{29}$$

$$\frac{y}{x}=\tan\varphi, \tag{30}$$

设 $u=\tan\varphi$, 考虑到对称性, 只取第一象限, 则(27)式可简化为

$$C_e=\frac{4\varepsilon}{\ln k}\int_0^{\infty}\frac{u^2+\left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[u^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}u\,. \tag{31}$$

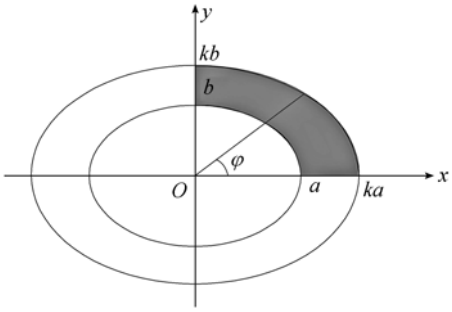


图 7　椭圆共形同轴线

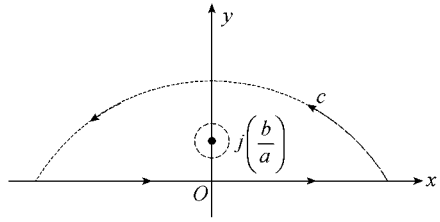


图 8 留数定理

把变量 $u$ 复拓展, 研究如图 8 的上半平面闭路积分

$$\oint_c\frac{z^2+\left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}z\,, \tag{32}$$

计及 $z=j\left(\frac{b}{a}\right)$ 是唯一的二阶极点，应用留数定理，有

$$\oint_C \frac{z^2+\left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2}=2\pi j\frac{d}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2+\left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z+j\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2}\right]\Bigg|_{z=j\left(\frac{b}{a}\right)}, \tag{33}$$

最后可得到

$$2\oint_c \frac{z^2+\left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}z=\pi\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right), \tag{34}$$

于是，椭圆共形同轴线电容为

$$C_e=\frac{\pi\varepsilon}{\ln k}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right). \tag{35}$$

### 5.2 折线段构成的多边形共形同轴线电容

任意多边形是由各种折线段组成的. 这里我们以 $2a\times 2b$ 的矩形为例加以说明. 见图 9 所示.

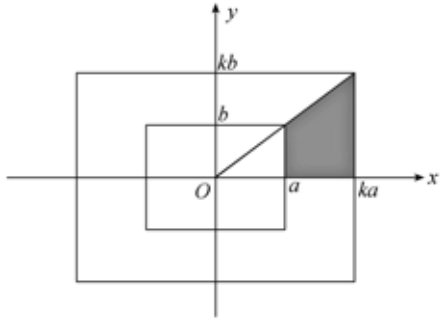


图 9 矩形共形同轴线

十分明显，若考虑其 1/4 对称，则是由两个基本三角形组成的. 应用(16)式很易写出

$$C_k=\frac{4\varepsilon}{\ln k}(\tan\beta_1+\tan\beta_2), \tag{36}$$

其中 $\tan\beta_1=\frac{b}{a}$，而 $\tan\beta_2=\frac{a}{b}$. 于是矩形共形同轴线电容为

$$C_k = \frac{4\varepsilon}{\ln k}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right), \tag{37}$$

我们十分有兴趣的指出, 比较(37)和(35)式可知, 对于同样 $a$ 和 $b$ 的椭圆共形同轴线, 它们的电容之比是 $4/\pi$.

### 5.3　三角形逼近

任意共形同轴线的另一种分析方法是: 可以采用若干个三角形逼近. 本文将给出用三个夹角为 30°的任意三角形逼近椭圆率 $k=\sqrt{b^2-a^2}\,/b=1/2$ 的椭圆, 具体见图 10 所示.

考虑结构的对称性, 我们也只需考虑第一象限. 因为共形同轴线内外径之比始终是 $k$, 我们只用内接三角形, 无须再研究等面积约束. 对于这一问题, 可采用任意三角形结果(21)式. 数据如表 1 所示, 其相对误差 $\delta=2.278\%$, $k=\sqrt{b^2-a^2}\,/b=1/2$, $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a=1.154700538a$. 值得指出, 如果采用更多的三角形来逼近椭圆, 计算精度将进一步提高.

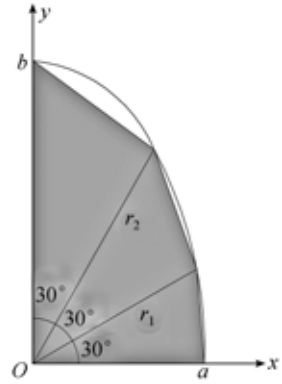

图 10　椭圆的任意三角逼近

表 1　椭圆的任意三角形逼近结果

| | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ |
|---|---|---|---|
| $r_1$ | $a$ | 1.03279555 $a$ | 1.109400392 $a$ |
| $r_2$ | 1.03279555 $a$ | 1.109400392 $a$ | 1.154700538 $a$ |
| $\sin(\Delta\varphi)$ | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\Delta\varphi)$ | 0.277812284$a^2$ | 0.312880143 $a^2$ | 0.345301779 $a^2$ |
| $r_1r_2\sin(\Delta\varphi)$ | 0.516397779 $a^2$ | 0.572891899 $a^2$ | 0.640512614 $a^2$ |
| $C_i\Big/\left(\dfrac{\varepsilon}{\ln k}\right)$ | 0.537981174 | 0.546141677 | 0.53910223 |
| 三角形叠加(eq. 21) | $C=\dfrac{4\varepsilon}{\ln k}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{r_{i1}^2+r_{i2}^2-2r_{i1}r_{i2}\cos(\Delta\varphi)}{r_{i1}r_{i2}\sin(\Delta\varphi)}=\dfrac{\varepsilon}{\ln k}(6.492900324)$ | | |
| 解析闭式(eq. 35) | $C_e=\dfrac{\pi\varepsilon}{\ln k}\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)=\dfrac{\varepsilon}{\ln k}(6.348297775)$ | | |
| | 相对误差 $\delta=\dfrac{C-C_e}{C_e}=2.278\%$ | | |

通过以上三种情况的分析, 可以比较彻底地解决任意共形同轴线的电容问题.

## 6 结论

研究任意共形同轴线的电容问题可以从基本三角形和任意三角形出发，由它们可以逼近任意几何图形. 而本文进一步发展的微分三角形更可以解决任意曲线方程. 在此基础上，基于变分理论，本文导出了任意共形同轴线电容的变分解析闭式，不仅简洁而且具有较高的精度. 因此，我们从理论和实践上比较彻底地解决了共形同轴线电容问题. 值得指出，本文所提出的基本思想，还可以进一步扩展到一般同轴线.

本文最后，我们将讨论一个很多学者所关注的问题: 即在计算机和先进数值分析方法飞速的今天，是否还有必要研究变分理论和解析闭式? 回答是肯定的. 这是因为变分作为稳定性的独特形式又给出问题的上限和下限. 显然，对数值分析的误差精度有着重要的指导意义. 而另一方面，数值的长处在于分析，当面临优化或系统综合的问题中，解析闭式对于快速设计和迅速进入优化区域附近，显然有着不可替代的作用. 这也是变分理论和解析闭式研究仍不断发展的主要原因.

## 参 考 文 献

1 Collin R E. Field Theory of Guided Waves. New York: McGraw-Hill, 1960
2 Gunston M A. Microwave Transmission-Line Impedance Data. London: VNR, 1972
3 Riblet H J. The characteristic impedance of a family of rectangular coaxial structures with off- centered strip inner conductors. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1979, 27(4): 294~298
4 Levy R. Conformal transformations combined with numerical techniques, with applications to coupled-bar problems. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1980, 28(4): 369~375[DOI]
5 Lin Weigan. A critical study of the coaxial transmission line utilizing conductors of both circular and square cross section. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1982, 30(4): 1981~1988[DOI]
6 Shumpert T H, Galloway D J. Capacitance bounds and equivalent radius. IEEE Trans Antennas Propagat, 1977, 25(2): 284~286
7 Liang C H, Li L, Zhai H Q. Analytical closed-form for the capacitance of arbitrarily shaped conducting plate. IEE Proceeding——Antennas, Microwaves and Propagation, 2004, 151(3): 217~220[DOI]
8 Kuo J T, Su K Y. Analytical evaluation of the MoM matrix elements for the capacitance of a charged plate. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 2002, 50(5): 1435~1436[DOI]
9 Cheng D K, Tseng F I. Gain optimization for arbitrary antenna arrays. IEEE Trans Antennas Propagation, 1965, 13(6): 973~974