

磨削加工球齿轮数学模型建立与齿面接触特性分析

李婷*, 潘存云

国防科技大学机电工程与自动化学院, 长沙 410073

* E-mail: bee.lt@163.com

收稿日期: 2008-01-31; 接受日期: 2008-09-27

国家高技术研究发展计划(“863”计划)(批准号: 2006AA09Z235)资助项目

摘要 采用盘形砂轮范成法磨削加工球齿轮, 由盘形砂轮数学模型得到球齿轮的数学模型, 进而得到一对球齿轮的啮合模型, 并对其进行了齿面接触分析, 通过解非线性方程组, 求解出两齿面瞬时接触点的位置. 对球齿轮齿面的接触点轨迹进行了分析研究: 球齿轮上每个齿的齿形都不相同, 因此两球齿轮在空间啮合的接触轨迹是很复杂和多样的. 结果对进一步研究球齿轮机构的传动理论和实际应用具有一定的指导意义.

关键词

球齿轮
范成法
盘形砂轮
接触分析
接触点轨迹

球齿轮作为两自由度齿轮传动机构, 最早应用于 Trallfa 喷漆机器人柔性手腕机构. Yang 等人^[1]也对圆弧齿和环形渐开线齿^[2]球齿轮进行过一些原理性的研究. 由于这些球齿轮的轮齿在齿面上离散分布, 使加工难度较大, 因此, 对球齿轮的研究仅限于原理设计阶段. 潘存云^[3]发明的渐开线环形齿球齿轮, 由渐开线正齿轮绕其轴线旋转而成, 图 1 为球齿轮机构的形成过程示意图, 其中, 图 1(a)中的渐开线正齿轮分别绕过齿和齿槽的中轴线旋转形成图 1(b)所示的中凸齿球齿轮和中凹齿球齿轮, 此中轴线即为球齿轮的极轴. 由球齿轮的形成过程可知, 在任何过极轴的截面内, 其齿形与渐开线直齿轮都相同, 在任何垂直于极轴的截面内, 其齿形为一系列圆环. 图 1(c)为安装好的球齿轮机构, 由一对相啮合的中凸齿球齿轮和中凹齿球齿轮组成, 当其中一个球齿轮为主动轮时, 它可以绕 2 个相互正交的轴转动, 从而将运动和动力传递给另一个球齿轮, 它的极轴即机构的输出轴可进行空间运动. 由球齿轮的运动方式可知, 它不仅具有普

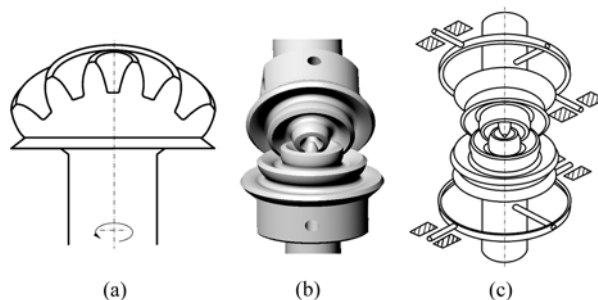


图 1 球齿轮机构的形成过程示意图

通齿轮的传动特点, 而且可进行环向运动, 由此而组成的一对球齿轮副也具有 2 个自由度, 这种设计从根本上克服了离散齿球齿轮的缺陷.

经过多年的研究, 对球齿轮的研究已经取得了较为丰富的研究成果, 但在传动理论和加工制造方面, 仍有许多难题有待进一步解决. 在粗加工方面, 是通过展成(或者仿形)车铣加工而成, 加工精度基本满足设计要求^[3]. 但是在实际应用中, 球齿轮的渐开线环形齿廓曲面作为工作曲面, 由于其粗加工精度

引用格式: 李婷, 潘存云. 磨削加工球齿轮数学模型建立与齿面接触特性分析. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(10): 1643—1649

Li T, Pan C Y. Mathematical models of grinding manufacture and tooth contact analysis of spherical gears. Sci China Ser E-Tech Sci, 2009, 52(10): 2823—2830, doi: 10.1007/s11431-009-0232-z

比较低,在很多要求传动精度较高的场合,使得球齿轮的应用受到很大的限制,因此本文设计了一种范成法磨削加工方案,采用盘形砂轮^[4]对球齿轮进行磨削加工,以解决球齿轮的精加工问题. 对球齿轮传动副的齿面接触分析是研究球齿轮机构传动特性的重要内容之一,也是提高球齿轮加工质量的一个重要因素,因为加工质量主要靠传动中齿面接触区的形状、位置、大小和运动平稳性来衡量. 文献[5~7]对各种齿轮,例如直齿轮^[5],螺旋锥齿轮^[5,6],斜齿轮^[6],蜗轮^[7]等进行了齿面接触分析. 但是,球齿轮是作者的一个发明,它的啮合运动规律和齿形特征与其他齿轮都有所区别. 因此,在总结前人对于传统齿轮齿面接触分析研究的基础上,结合球齿轮自身的特点进行深入研究,其目的是为球齿轮副的传动特性和加工制造方面的研究提供理论依据.

1 盘形砂轮的数学模型

采用盘形砂轮对球齿轮进行磨削加工,实际上是利用球齿轮齿盘啮合的原理^[3],齿盘即为盘形砂轮,它的形成过程与齿轮演变成齿条类似,当球齿轮的齿数为无穷多时,其分度圆趋于无穷大,此时球齿轮就演变成了一个平面齿盘,于是球齿轮机构就演变成球齿轮齿盘机构,如图2(a)所示,在图2(b)中过齿盘中心的剖面所得齿形为标准齿条的齿形. 当球齿轮为主动件作二维转动时,齿盘作平动;反之,当齿盘为主动件作二维移动时,球齿轮将作二维转动. 因此,球齿轮齿盘机构可实现二维旋转运动与平动之间的相互转换. 利用球齿轮齿盘之间的这种运动啮合关系可以对球齿轮进行磨削加工. 采用球齿轮齿盘啮合原理范成磨削加工球齿轮,需要5个自由度,2个平移和1个转动运动用于产生渐开线齿向齿形;第4个转动自由度由被加工球齿轮绕自身轴线旋转产生,用于形成齿面环向齿形;第5个转动自由度由盘形砂

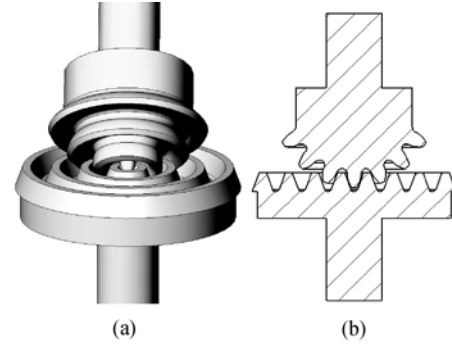


图2 球齿轮齿盘机构

轮旋转产生,用于产生磨削速度,与齿面的形成无关.

1.1 磨削加工方案设计与坐标变换关系

根据上述自由度要求,设计的机床结构如图3所示,球齿轮绕转台的偏摆运动和盘形砂轮沿 X 向和 Z 向的平移运动形成渐开线齿向齿形的加工,球齿轮自旋形成环向齿形,盘形砂轮自旋产生磨削速度. 按此方案进行坐标系的设置,如图4所示,设坐标系 $S_1(x_1, y_1, z_1)$ 与球齿轮固连, O_1 与球心重合, z_1 轴与球齿轮的极轴重合; $S_g(x_g, y_g, z_g)$ 与盘形砂轮固连, O_g 为盘形砂轮的轴心, z_g 轴与盘形砂轮的轴线重合. 为了后续研究需要,设置 I 、 II 和 III 为参考坐标系. 其中,参考系 I 与床身固定,用坐标系 $S_f(x_f, y_f, z_f)$ 表示;参考系 II 和 III 分别进行2个相互垂直的平移运动. 坐标系 $S_e(x_e, y_e, z_e)$ 由固定系 S_f 绕 y_f 轴转 θ 得到,坐标系 $S_d(x_d, y_d, z_d)$ 由坐标系 S_e 沿 z_e 轴平移 $z_e^{(O_d)}$ 得到,则齿轮坐标系 S_1 可由坐标系 S_d 绕其 z_d 转 β 得到;坐标系 $S_m(x_m, y_m, z_m)$ 由固定系 S_0 沿 x_f 轴和 z_f 轴分别平移 $x_f^{(O_m)}$ 和 $z_f^{(O_m)}$ 得到,坐标系 $S_n(x_n, y_n, z_n)$ 由坐标系 $S_m(x_m, y_m, z_m)$ 绕其 x_m 轴转 180° 得到,则将坐标系 S_n 绕其 z_n 轴转 φ 就得到了刀具坐标系 S_g .

据此,从刀具坐标系 S_g 到齿轮坐标系 S_1 的坐标变换矩阵可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1g} &= \mathbf{M}_{1d} \mathbf{M}_{de} \mathbf{M}_{e0} \mathbf{M}_{0m} \mathbf{M}_{mn} \mathbf{M}_{ng} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \theta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \beta - \cos \beta \cos \theta \sin \varphi & \cos \beta \sin \theta & x_f^{(O_m)} \cos \beta \cos \theta - z_f^{(O_m)} \cos \beta \sin \theta \\ -\cos \theta \cos \varphi \sin \beta - \cos \beta \sin \varphi & -\cos \beta \cos \varphi + \cos \theta \sin \beta \sin \varphi & -\sin \beta \sin \theta & -x_f^{(O_m)} \cos \theta \sin \beta + z_f^{(O_m)} \sin \beta \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta & x_f^{(O_m)} \sin \theta + z_f^{(O_m)} \cos \theta - z_e^{(O_d)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1) \end{aligned}$$

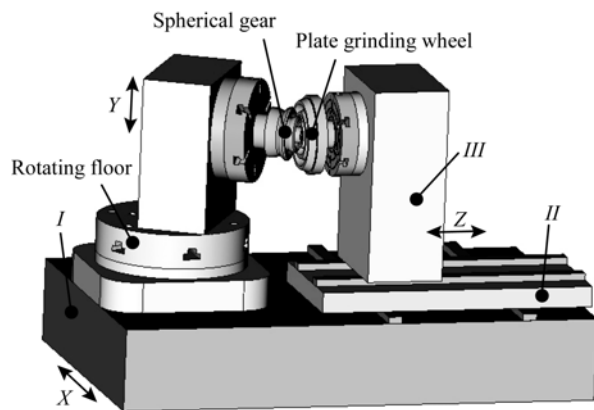


图 3 机床结构设计

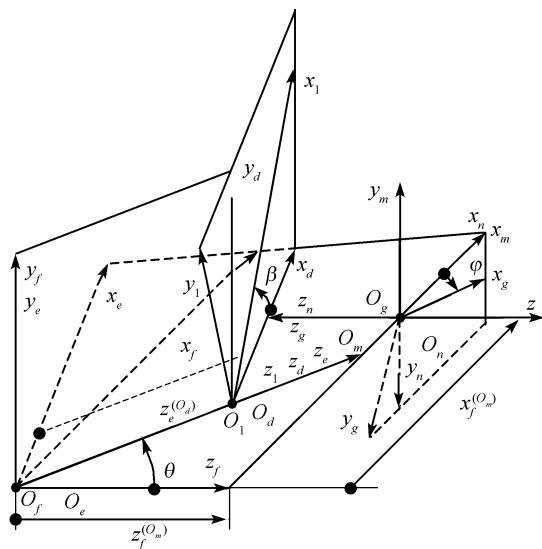


图 4 磨削机床坐标系变换关系

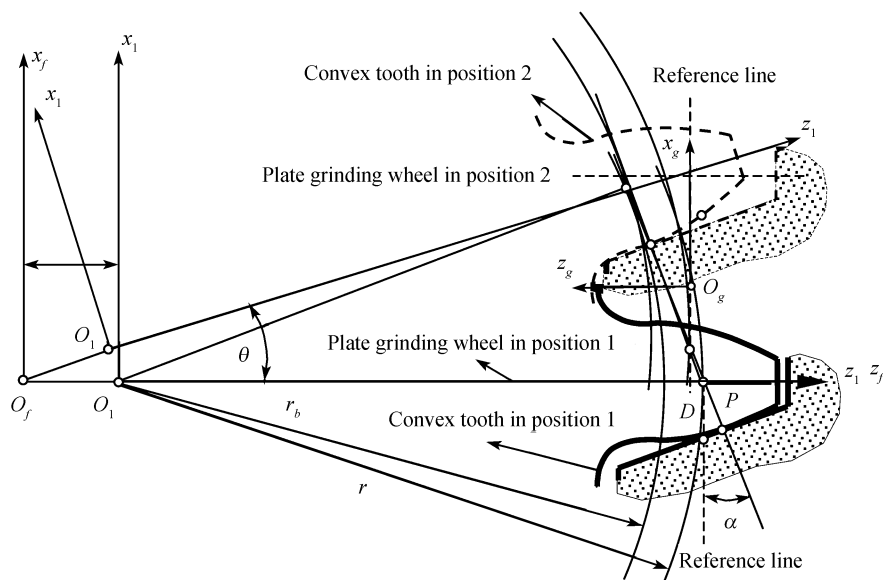


图 5 盘形砂轮范成法磨削加工球齿轮的运动原理

其中, M_{1d} , M_{de} , M_{ef} , M_{fm} , M_{mn} 和 M_{ng} 分别表示从坐标系 S_d 到 S_1 , 从 S_f 到 S_e , 从 S_m 到 S_f , 从 S_n 到 S_m , 从 S_g 到 S_n 的坐标变换矩阵。

由机床运动关系可知, 如图 5 所示, 可以在 $x_f z_f$ 平面内研究问题。在 $x_f z_f$ 截面内, 如果球齿轮是绕自身的球心 O_1 转动, 那么球齿轮与盘形砂轮的啮合运动满足普通齿轮齿条啮合运动关系。但是在图 3 的设计方案中, 球齿轮并不是绕球心 O_1 转动, 而是安装在转台上, 转台绕竖直轴 y_f 转动, 从而带动球齿轮摆动, 球心 O_1 与摆动中心 O_f 有一段距离 D (图 4 中的 $z_e^{(O_d)}$)。这种设计的好处是在加工时, 由于球齿轮不是绕其球心转动, 使得装夹球齿轮方便灵活, 而并没有增加系统的自由度。设球齿轮的分度球半径为 r , 初始位置时球齿轮的极轴和盘形砂轮的轴线重合, 并处于啮合状态, 当球齿轮绕摆动中心 O_f 转过 θ 角时, 球齿轮的球心也绕摆动中心 O_f 转过 θ 角, 因此要形成啮合运动, 盘形砂轮在沿 x_f 向平移的同时必须沿 z_f 向平移, 按照齿轮齿条啮合运动原理, 下面的等式成立

$$\begin{cases} \Delta x_f = D \sin \theta + r \theta, \\ \Delta z_f = -D(1 - \cos \theta). \end{cases} \quad (2)$$

设球齿轮的模数为 m , 则由(2)式可得(1)式中

$$\begin{cases} x_f^{(O_m)} = k\pi m + \Delta x_f \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3), \\ z_f^{(O_m)} = D + r + \Delta z_f, \\ z_e^{(O_d)} = D. \end{cases}$$

1.2 盘形砂轮的数学模型

一对啮合的球齿轮由中凸球齿轮与中凹球齿轮组成. 相应的加工它们的刀具分别为中凹盘形砂轮和中凸盘形砂轮. 设中凸球齿轮齿面和中凹球齿轮齿面分别用 Σ_1 和 Σ_2 表示, 中凹盘形砂轮齿面和中凸盘形砂轮齿面分别用 Σ_v 和 Σ_c 表示. 在图3的机床结构中, 盘形砂轮自旋产生磨削速度, 与球齿轮齿面的形成无关. 因此, 它的齿面方程可简化为其母线方程表示.

图6为设计的盘形砂轮截面图, 设盘形砂轮齿条形截面的齿形角为 α , 模数为 m , $l_i = |A_0 A|$, $i=v$ 和 c , 表示初始点 A_0 和移动点 A 之间的距离, 则在截面 $x_g z_g$ 内, 中凹盘形砂轮的母线方程可表示为

$$\mathbf{R}_g^{(v)} = \begin{bmatrix} k_v \pi m \pm (0.25\pi m + m \tan \alpha - l_v \sin \alpha) \\ 0 \\ m - l_v \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中, “ $\pm$ ”分别表示砂轮的左齿面和右齿面方程, $k_v=0, 1, 2, 3$, 表示中凸球齿轮的第0个齿, 第1个齿, 第2个齿和第3个齿. 进一步得到表面的单位法线为

$$\mathbf{n}_g^{(v)} = [\mp \sin \alpha \quad 0 \quad -\cos \alpha]^T. \quad (4)$$

同样的, 中凹盘形砂轮相同, 则其齿面方程可表示为

$$\mathbf{R}_g^{(c)} = \begin{bmatrix} k_c \pi m \pm (0.25\pi m - m \tan \alpha + l_c \sin \alpha) \\ 0 \\ m - l_c \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

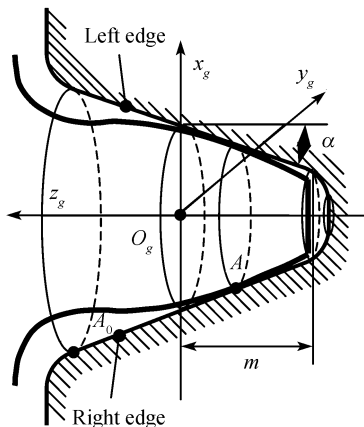


图6 盘形砂轮截面齿形设计

其中, “ $\pm$ ”也分别表示砂轮的左齿面和右齿面方程, $k_c=0, 1, 2$, 表示中凹球齿轮的第1个齿, 第2个齿和第3个齿. 进一步得到表面的单位法线为

$$\mathbf{n}_g^{(c)} = [\pm \sin \alpha \quad 0 \quad -\cos \alpha]^T. \quad (6)$$

2 球齿轮的数学模型

在盘形砂轮加工球齿轮的过程中, 球齿轮沿渐开线方向的齿形是盘形砂轮按照(2)式平移运动包络形成的, 除轴线重合位置外在任何位置他们之间都是点接触, 设盘形砂轮在以速度 V 平移的同时, 被加工的球齿轮分别以角速度 ω 转动. 根据齿轮啮合理论[5], 球齿轮的节球面[3]与盘形砂轮的节平面无滑动的纯滚动啮合, 而球齿轮环形方向齿形的形成是靠其旋转运动产生的. 因此, 对于由中凹盘形砂轮加工的中凸球齿轮, 其齿面方程可表示为

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1g} \mathbf{R}_g^{(v)}, \quad (7)$$

其表面法矢量可表示为

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{L}_{1g} \mathbf{n}_g^{(v)}. \quad (8)$$

同样的, 对于中凸盘形砂轮加工的中凹球齿轮, 其齿面方程和单位法矢量可分别表示为

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{1g} \mathbf{R}_g^{(c)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{L}_{1g} \mathbf{n}_g^{(c)}, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{L}_{1g}$ 是 $\mathbf{M}_{1g}$ 的前三阶子矩阵, 表示从坐标系 S_g 到 S_1 的旋转变换矩阵.

3 啮合模型

由于球齿轮的啮合传动是轮齿凸面与马鞍面之间的接触, 根据齿面接触理论和球齿轮的齿廓曲面的特点, 可知球齿轮机构的齿面接触属于点接触. 齿轮1和齿轮2的位置矢量和单位法矢应该表示在同一坐标系 S_0 中, 根据球齿轮机构的安装方式建立的坐标系如图7所示, 两齿面公共接触点在固定坐标系 S_0 中应该是同一个点, 而且, 两齿面的单位法矢应该彼此共线, 啮合时两齿面在接触点处应满足下面的方程[5]:

$$\mathbf{R}_0^{(1)} - \mathbf{R}_0^{(2)} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{n}_0^{(1)} \times \mathbf{n}_0^{(2)} = 0. \quad (12)$$

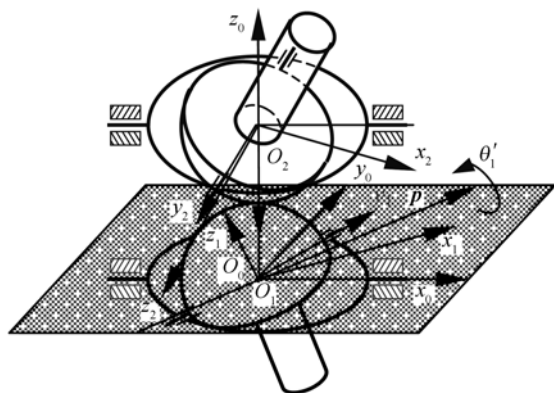


图 7 球齿轮机构坐标系定义

由于 $|\mathbf{n}_0^{(1)}| = |\mathbf{n}_0^{(2)}| = 1$, 因此方程(11)和(12)实际上是由 5 个方程组成的非线性方程组, 含有未知量 θ_1' , β_1 , l_v , β_2 , l_c 和 θ_2' . 因此, 给定中凸球齿轮 1 的输入角 θ_1' , 可以通过求解非线性方程组解出其他几个未知量, 从而确定两齿面的一个接触点.

4 球齿轮接触点轨迹

对于传统齿轮, 无论是直齿轮、斜齿轮或螺旋锥齿轮等, 它们的每个轮齿形状都相同, 因此, 齿面无论是线接触还是点接触, 在每个齿面上接触点轨迹都是相同的. 但是球齿轮副中每个球齿轮轮齿的形状各不相同^[3], 并且具有 2 个转动自由度, 因此, 根据球齿轮机构的运动特性, 理论上主动球齿轮 1 可以绕过其球心并垂直于两球心连线的平面内的任意轴(简称偏摆轴^[3])转动, 即此偏摆轴位于图 7 中的阴影区域(x_0y_0 平面)内, 将运动和动力传递给被动球齿轮 2. 任一瞬时, 在垂直于偏摆轴的偏摆平面内, 两球齿轮的传动都满足直齿轮啮合传动的特点, 随着两球齿轮空间姿态的变化, 偏摆平面也在改变, 因此, 球齿轮比直齿轮的传动方式更加复杂和灵活, 体现在微观领域, 使得球齿轮每个齿面上的接触点轨迹随着偏

摆平面的改变表现出不同的形状特征, 可分 2 种情况进行讨论.

4.1 在某一偏摆平面内啮合传动的接触点轨迹

当主动球齿轮从两极轴重合位置绕某偏摆轴(在 x_0y_0 平面内)旋转 θ_1' 角时, 两球齿轮在垂直此轴的偏摆平面内的啮合运动相当于直齿轮的啮合运动. 设偏摆轴 $\mathbf{p}$ (位于 x_0y_0 平面内)为 y_0 轴, 在两球齿轮各个相啮合的齿面上, 接触点轨迹在此偏摆平面内变化如图 8 所示.

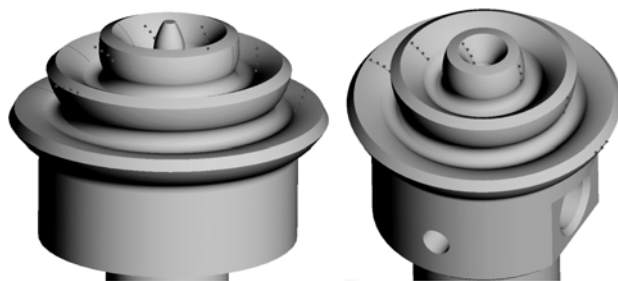


图 8 中凸球齿轮和中凹球齿轮接触点轨迹

4.2 偏摆平面变化时的接触点轨迹

设初始位置时, 两球齿轮极轴不重合, 相当于球齿轮绕某偏摆轴 $\mathbf{p}_{10}$ 转过了 θ_0' , 接触点位于两球齿轮相对应的齿面上. 当主动球齿轮从此位置绕另一固定轴 $\mathbf{p}_1$ 旋转 θ_1' 时, 随着 θ_1' 的变化, 两球齿轮瞬时啮合运动的偏摆平面也在改变, 这时两球齿轮上接触点轨迹不在任何固定的偏摆平面内, 实际上两球齿轮的啮合运动相当于两节球的纯滚动. 通过计算可以得到从坐标系 S_1 到固定系 S_0 的变换矩阵 $\mathbf{M}_{01}$ 和从坐标系 S_2 到固定系 S_0 的变换矩阵 $\mathbf{M}_{02}$. 具体实现如下.

建立辅助坐标系 $S_{10}(x_{10}, y_{10}, z_{10})$, 与球齿轮 1 的初始位置重合. 设 $\mathbf{p}_{10}$ 在固定系 S_0 中的方向角分别为 α_0 , β_0 和 γ_0 , 则主动球齿轮 1 从初始位置(坐标系 S_{10})到固定系 S_0 的变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{010} = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \theta_0')$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_0 (1 - \cos \theta_0') + \cos \theta' & \cos \alpha_0 \cos \beta_0 (1 - \cos \theta_0') - \cos \gamma_0 \sin \theta' & \cos \alpha_0 \cos \gamma_0 (1 - \cos \theta_0') + \cos \beta_0 \sin \theta' & 0 \\ \cos \alpha_0 \cos \gamma_0 (1 - \cos \theta_0') - \cos \beta_0 \sin \theta' & \cos^2 \beta_0 (1 - \cos \theta_0') + \cos \theta' & \cos \beta_0 \cos \gamma_0 (1 - \cos \theta_0') - \cos \alpha_0 \sin \theta' & 0 \\ \cos \alpha_0 \cos \gamma_0 (1 - \cos \theta_0') - \cos \beta_0 \sin \theta' & \cos \beta_0 \cos \gamma_0 (1 - \cos \theta_0') + \cos \alpha_0 \sin \theta' & \cos^2 \gamma_0 (1 - \cos \theta_0') + \cos \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

当主动球齿轮 1 继续绕另一固定轴 $\mathbf{p}_1$ 转过 θ'_1 时, 主动球齿轮的极轴与两轮球心连线确定了瞬时偏摆平面. 设 $\mathbf{p}_1$ 在球齿轮初始位置坐标系 S_{10} 中的方向角为 α_1, β 和 γ_1 , 即为 $\mathbf{p}_1$ 与 S_{10} 各坐标轴的夹角. 这样, 从坐标系 S_1 到球齿轮 1 初始位置坐标系 S_{10} 的变换矩阵 $\mathbf{M}_{101}$ 与矩阵 $\mathbf{M}_{010}$ 形式相同:

$$\mathbf{M}_{101} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta'_1), \quad (14)$$

这样, 从坐标系 S_1 到固定系 S_0 的变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{01} = \mathbf{M}_{010} \mathbf{M}_{101}. \quad (15)$$

两球齿轮在此位置啮合的偏摆平面可由 $\mathbf{z}_0$ 轴与 $\mathbf{z}_0^{(1)}$ ($\mathbf{z}_1$ 轴在固定系 S_0 中的表示) 轴确定, 此位置可看成是球齿轮 1 从两极轴重合位置绕固定轴 $\mathbf{n}$ 转过 θ' ^[3], $\mathbf{n}$ 和 θ' 的计算公式如下

$$\mathbf{n} = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{z}_0^{(1)}, \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{z}_0^{(1)}}{|\mathbf{z}_0| |\mathbf{z}_0^{(1)}|} \right).$$

设 $\mathbf{n}$ 在固定系 S_0 中的方向角分别为 α_n, β_n 和 γ_n , 即为 $\mathbf{n}$ 与 S_0 各坐标轴的夹角. 建立辅助固定系 $S_{20}(x_{20}, y_{20}, z_{20})$, 由固定系 S_0 平移到原点 O_2 并绕 x_0 轴转过 180° 得到. 这样, 被动球齿轮 2 也可以看作是从两极轴重合位置绕固定轴 $-\mathbf{n}$ 转过 θ' , 轴 $-\mathbf{n}$ 在固定系 S_{20} 中的方向角分别为 $180^\circ - \alpha_n, \beta_n$ 和 γ_n , 则从坐标系 S_2 到固定系 S_{20} 的变换矩阵也与矩阵 $\mathbf{M}_{010}$ 的形式相同:

$$\mathbf{M}_{202} = (180^\circ - \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \theta'), \quad (16)$$

从坐标系 S_{20} 到固定系 S_0 的变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{020} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

由(16)和(17)式, 得到从坐标系 S_2 到固定系 S_0 的变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{02} = \mathbf{M}_{020} \mathbf{M}_{202}. \quad (18)$$

这样, 中凸球齿轮的齿面方程和齿面单位法矢量在坐标系 S_0 中表示为

$$\mathbf{R}_0^{(1)} = \mathbf{M}_{01} \mathbf{R}_1, \quad (19)$$

$$\mathbf{n}_0^{(1)} = \mathbf{L}_{01} \mathbf{n}_1, \quad (20)$$

中凹球齿轮的齿面方程和齿面单位法矢量在坐标系

S_0 中表示为

$$\mathbf{R}_0^{(2)} = \mathbf{M}_{02} \mathbf{R}_2, \quad (21)$$

$$\mathbf{n}_0^{(2)} = \mathbf{L}_{02} \mathbf{n}_2, \quad (22)$$

把(19)~(22)式代入(11)和(12)式, 通过解非线性方程组, 就可以得到两球齿轮齿面上接触点的位置.

举例. 设两球齿轮的齿形参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 20^\circ$, 模数为 $m_1 = m_2 = 3$ mm, 齿数 $z_1 = z_2 = 17$; $\mathbf{p}_{10}$ 在固定系 S_0 中的方向角 $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 90^\circ$ 和 $\gamma_0 = 90^\circ$; $\mathbf{p}_1$ 在固定系 S_0 中的方向角 $\alpha_{10} = 90^\circ, \beta_{10} = 0$ 和 $\gamma_{10} = 90^\circ$. 当 θ'_0 (表示两球齿轮初始空间啮合姿态) 分别取 $0, 0.2^\circ, 2^\circ$ 和 20° 时, 随着 θ'_1 的变化, 接触点轨迹在两球齿轮各齿面的分布如图 9 所示. 其中, 对应于同一个 θ'_1 , 随着 θ'_1 的变化, 同颜色的曲线表示连续啮合时两球齿轮各相啮合齿面上的接触迹线. 随着 θ'_0 增大, 逐渐远离 $\theta'_0 = 0$ 时的接触迹线 (同图 8 中的接触迹线).

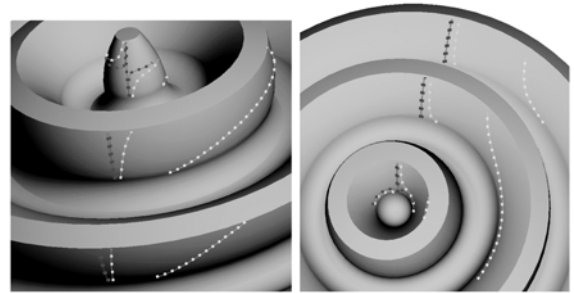


图 9 中凸球齿轮和中凹球齿轮接触点轨迹

可以看出, 随着输入条件的不同, 接触点轨迹在各齿面上的分布形状各不相同. 当 θ'_0 分别取 0.2° 和 2° 时, 虽然两球齿轮的啮合运动是连续的, 但在中凸齿和中凹齿的中部 (两球齿轮极轴重合的位置附近) 出现了不连续的接触迹线, 这是因为在两球齿轮极轴重合的位置理论上中凹齿环包围中凸齿环的线接触 (这个位置是两球齿轮唯一出现线接触的位置), 从此位置沿任何方向一个微小的偏摆, 两球齿轮就变成了点接触, 因为 $\mathbf{p}_{10}$ 轴和 $\mathbf{p}_1$ 轴是 2 个相互垂直的方向, 在极轴重合位置, 当主动球齿轮绕 $\mathbf{p}_{10}$ 轴转过一个微小的 θ'_0 角, 接触点出现在球齿轮齿面环向 90° 或 270° 的位置, 当主动球齿轮从此位置开始绕 $\mathbf{p}_1$ 轴正向或反向转动时, 接触点分别向齿根或齿顶移动并向齿面环向 0° (图 9 中的曲线) 位置靠近. 假设中凸齿

从齿根部向齿顶部啮合接触, 则不连续的接触迹线是因为在越过极轴重合位置附近, 接触点在齿面环向 90° 位置脱离接触而在环向 270° 位置开始接触, 因此出现了不连续的接触迹线. 当 $\theta_0=20^\circ$, 中凸齿和中凹齿几乎已经脱离接触, 当主动球齿轮绕 p_1 轴转动时, 两球齿轮齿面上的接触点轨迹如图 9 中的齿面上最右侧的曲线所示.

5 结论

本文设计了一种采用盘形砂轮范成法磨削加工球齿轮的机床方案, 这种设计的优点是, 由于加工时

球齿轮不是绕其球心转动, 使得装夹球齿轮方便灵活, 而并没有增加系统的自由度. 根据球齿轮与盘形砂轮的啮合运动原理, 在建立盘形砂轮数学模型的基础上, 得到了球齿轮齿面的数学模型. 采用计算机辅助工具对球齿轮进行了齿面接触特性分析, 根据建立的球齿轮啮合模型通过解非线性方程组得到两球齿轮在某一瞬时啮合时齿面公共接触点的位置; 当两球齿轮在空间连续啮合运动时, 可以得到球齿轮齿面复杂的接触点轨迹. 结论为进一步对球齿轮进行磨削加工和真实齿面的接触特性实验提供了一定的理论依据.

参考文献

- 1 Yang S C, Chen C K, Li K Y. A geometric model of a spherical gear with a double degree of freedom. *J Mater Process Technol*, 2002, 123: 219—224
- 2 Yang S C. A rack-cutter surface used to generate a spherical gear with discrete ring-involute teeth. *Int J Adv Manuf Technol*, 2005, 27: 14—20[doi]
- 3 潘存云. 球齿轮传动原理与加工方法研究. 博士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2001
- 4 李婷, 潘存云. 球齿轮的磨削加工和齿根过渡曲面方程的推导. *机械设计与研究*, 2007, 23(3): 100—105
- 5 Litvin F L, Fuentes A. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 6 Simon V. Computer simulation of tooth contact analysis of mismatched spiral bevel gears. *Mech Machine Theory*, 2007, 42: 365—381[doi]
- 7 Liu C C, Chen J H, Tsay C B, et al. Meshing simulations of the worm gear cut by a straight-edged flyblade and the ZK-type worm with a non- 90° crossing angle. *Mech Machine Theory*, 2006, 41: 987—1002[doi]