

机构近似综合的统一模型 与自适应方法*

王德伦 王淑芬

(大连理工大学机械工程学院, 大连 116024)

摘要 提出了平面、球面和空间曲线拟合的自适应方法, 将空间直纹面分解为球面像曲线和空间腰曲线进行特征描述, 并把机构综合问题转化为曲线自适应拟合问题, 给出了平面近似圆点、球面近似圆点和空间近似定轴线等概念, 建立了从平面、球面到空间机构综合的统一模型和自适应方法, 为机构优化综合解的存在性和优化算法的收敛性提供了理论依据.

关键词 机构综合 统一理论 自适应方法

机构综合的本质是在运动刚体上寻找特征点, 其轨迹为特殊曲线, 而特殊曲线在相对固定坐标系中又恰为连架杆的约束曲线. 以文献[1]为代表的常规机构近似综合方法是根据连架杆约束这些距离不变或夹角不变而列出非线性约束方程, 然后又转化为无约束优化问题求解^[1-17]. 由于在优化求解过程中不便利用约束方程的性质, 目标函数值又难以准确体现每个优化参量对解的影响, 使得机构优化综合的求解往往依赖于初始值, 即使连杆点在固定坐标系中的轨迹是圆, 如果没有给定准确的圆心坐标, 同样不满足约束方程, 而且在目标函数值上并不能判别是连杆点还是圆心点不当造成的结果. 在另一方面, 由于目前对空间机构优化综合问题的研究较少^[1-4], 特别是含有C-C连架杆直纹约束曲面的空间机构近似综合问题, 仍然没有突破传统的结构误差与约束方程的综合方法^[1,2], 使得空间机构综合理论与方法难以适应机构学的研究与应用的需要. 因此, 仅仅依靠数学规划算法难以满足复杂的机构优化综合问题的要求, 对于类型多样的从平面到空间的机构综合问题, 目前还缺少一种统一的数学模型. 而且现行的机构优化综合模型解的存在性及优化算法收敛性等问题, 目前尚未得到圆满解决.

2002-11-25 收稿, 2003-10-27 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 59675003)

本文提出曲线曲面不变量的自适应拟合方法以统一标准来准确评价曲线曲面拟合误差, 并建立统一恰当的目标函数, 能够呈现在优化过程中任意时刻各优化参量对目标函数值的影响, 为平面和球面机构近似运动综合提供理论基础. 采用直纹面直母线单位矢量球面像曲线和腰线的性质来描述直纹面性质, 进而将直纹面拟合问题转变为球面曲线和空间曲线拟合问题, 为空间机构近似运动综合奠定了理论基础. 从而建立了从平面、球面到空间机构优化综合的统一模型与求解方法.

1 刚体运动的表示

刚体的空间运动可表示为平移和转动的合成, 分别在运动刚体 Σ_m 上建立动坐标系 $B_m x_m y_m z_m$ 和机架上建立固定坐标系 $o_f x_f y_f z_f$, 如图1所示, 运动刚体上一点 A 在固定坐标系 $o_f x_f y_f z_f$ 中的第 i 个位置向量

R_{A_i} 可表示为

$$\mathbf{R}_{A_i} = \mathbf{R}_{B_i} + \mathbf{R}_i \mathbf{r}_{A_m}, \quad (1)$$

式中, \mathbf{R}_{B_i} 为运动刚体 Σ_m 上基点(动坐标系 $B_m x_m y_m z_m$ 原点 B)在固定坐标系 $o_f x_f y_f z_f$ 中的第 i 个位置向量; \mathbf{r}_{A_m} 是运动刚体 Σ_m 上点 A 在动坐标系 $B_m x_m y_m z_m$ 中的矢径, \mathbf{R}_i 为运动刚体 Σ_m 第 i 位置相对固定坐标系 $o_f x_f y_f z_f$ 的位移矩阵, 刚体的空间运动可以用 $(\mathbf{R}_{B_i}, \mathbf{R}_i)$ 来描述. 运动刚体 Σ_m 上过 A 点的

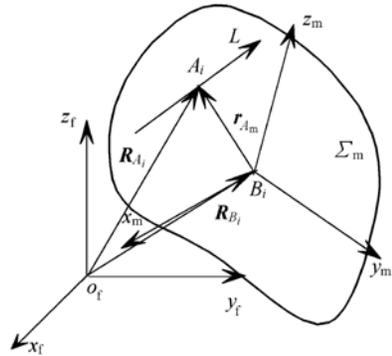


图1 刚体空间运动的矢量表示

的任意一条直线 L (单位方向 l_m)在固定坐标系 $o_f x_f y_f z_f$ 中的位置可表示为

$$\mathbf{l}_{m_i} = \mathbf{R}_{A_i} + t \mathbf{R}_i \mathbf{l}_m, \quad \mathbf{l}_m = [\sin \lambda \cos \gamma, \sin \lambda \sin \gamma, \cos \lambda]^T, \quad (2)$$

式中, t 为直线参数; λ 和 γ 为直线 l_m 在坐标系 $B_m x_m y_m z_m$ 中的方向角. 所以, 运动刚体上直线的空间运动可以用 $(\mathbf{R}_{A_i}, \mathbf{R}_i \mathbf{l}_m)$ 来表示.

当空间运动退化为平面运动时, 上述平移和旋转运动均为二维运动.

2 平面机构的自适应近似综合

平面机构综合的目的是在平面运动刚体上寻找若干特征点, 如圆点、滑点或束点, 那么, 它们在固定坐标系 $o_f x_f y_f z_f$ 中的轨迹分别是准确的圆、直线或直线的包络圆. 在平面机构近似优化综合中, 一般要求为近似圆点、近似滑点和近似滑点^[18], 其轨迹非常接近于圆、直线或直线的包络圆, 误差越小越好, 需借助于优化方法求解, 见文献[18]. 为体现本文理论和方法的系统性, 在此简述之.

对于平面曲线的自适应圆拟合, 按照定义^[18], 首先确定自适应圆, 即

定义 2.1 依据被拟合轨迹点集 $\{R_A\}$ 的性质并按最大法向拟合误差最小为原则得到唯一的拟合圆, 称为自适应拟合圆.

自适应拟合圆不变量误差模型如下:

$$e(x) = \min \max f_i(x), \quad (3)$$

其中, $f_i(x) = \left| \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - r \right|$ 为点集 $\{R_A\}$ 中任意离散点 R_A 与自适应圆的误差, 优化参数为 $x = (x_0, y_0, r)^T$, 通过鞍点规划可得到唯一的自适应圆; 由此可见, 自适应拟合圆具有如下性质:

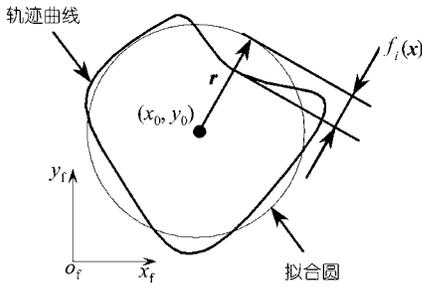


图 2 轨迹曲线的拟合圆

(i) 唯一性. 由于自适应圆是点集 $\{R_A\}$ 的所有拟合圆中最大法向误差最小的拟合圆, 再也没有更好的拟合圆使得拟合的最大误差减小, 具有唯一性, 如图 2 所示, 即一次鞍点意义. 所以, 运动刚体 Σ_m 上任意点 $A(x_A, y_A)$ 在固定坐标系 $O_f x_f y_f z_f$ 的轨迹 $\{R_A\}$ 都对应于唯一的自适应圆, 只是最大拟合误差不同而已,

因而最大拟合误差是运动平面上点的坐标的函数.

(ii) 可比性. 由于最大误差的度量标准是统一的, 即法向误差, 准确反映与圆的近似程度, 对于所有平面运动刚体上点的轨迹与自适应圆的最大误差, 都具有可比性.

对运动平面上各点轨迹所对应的自适应圆的最大误差进行比较, 则有

定义 2.2 对于给定的平面运动, 当运动平面上一点在其邻域内相对其他任意点而言, 该点在固定平面上轨迹的自适应圆的最大法向拟合误差获得极小值, 称该点为运动平面上的自适应近似圆点, 简称近似圆点.

运动平面上的近似圆点具有二次鞍点意义, 也是局部最优意义. 一般情况下, 平面四杆机构的连杆曲线是六次代数曲线, 因而连杆曲线所对应的自适应圆的最大拟合误差也是连杆点坐标的非线性函数. 同样, 用连杆机构近似复演给定平面运动, 若给定的平面运动非退化, 则运动平面上各点的轨迹所对应的自适应圆的最大拟合误差也是运动平面上点的位置坐标的非线性函数, 必然存在极小值. 因此, 由上述性质可得

定理 1 对于给定的非退化的平面运动, 运动平面上一定存在近似圆点.

对于近似滑点, 同近似圆点一样, 只是用直线拟合点集 $\{R_A\}$, 把(3)式中的

不变量误差为 $f_i(x) = \frac{|y_i - kx_i - b|}{\sqrt{1+k^2}}$, k 为直线的斜率, b 为 y 轴截距, 优化参数为 $(k,$

$b)^T$, 可得自适应拟合直线, 其性质与自适应拟合圆具有相同的性质, 即具有唯一

性和可比性, 从而得到与近似圆点类似的近似滑点的定义, 且求解方法相同. 同时其存在性同近似圆点一样, 有

定理 2 对于给定的非退化的平面运动, 运动平面上一定存在近似滑点.

对于平面运动的直线轨迹的包络曲线其与圆的近似程度的定义、性质及定理类似, 可得近似束点. 参见文献[18].

所以, 要综合出平面全铰链四杆机构, 只需要在运动刚体上所有点中寻求两个最大误差最小的近似圆点, 而要综合出曲柄滑块机构, 需要寻求一个近似圆点和一个近似滑点(曲柄条件另外附加约束). 对于函数综合和轨迹综合可以转化为位置综合问题, 在此不赘述.

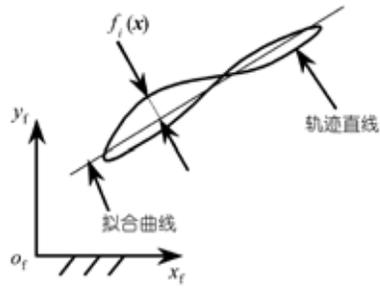


图3 轨迹曲线的拟合直线

3 球面机构的自适应综合

若刚体的空间运动为定点转动, 则为球面运动, 即(1) 式的 R_B 为常矢量. 球面机构综合也就是在运动刚体上寻找若干圆点, 那么, 它在固定坐标系 $o_r x_r y_r z_r$ 中的轨迹必须准确是球面上的圆, 即与球心准确构成圆锥体. 而在球面机构近似优化综合中, 一般要求为近似圆点¹⁾, 即其轨迹与球心近似构成圆锥体, 如图4所示, 误差越小越好, 需借助于优化方法求解. 同平面机构近似综合一样, 首先给出自适应拟合圆锥的定义:

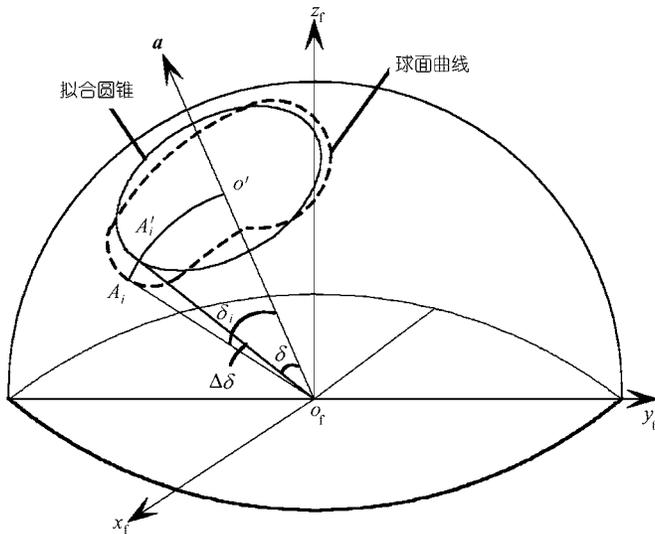


图4 球面曲线的圆锥拟合

1) 王德伦, 王淑芬, 张保印. 球面四杆机构函数综合方法研究. 机械工程学报(待发表)

定义 3.1 对于给定一组离散点的坐标 $\mathbf{A}_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 依据点集 $\{\mathbf{R}_{A_i}\}$ 按最大法向拟合误差最小为原则得到惟一的拟合圆锥, 称为自适应拟合圆锥.

根据王德伦文¹⁾, 设一组离散点的坐标 $\mathbf{A}_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 拟合圆锥的轴线为 $\mathbf{a} = [\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta]^T$, θ 和 ϕ 是拟合圆锥轴线 \mathbf{a} 与固定坐标轴的夹角, δ 为拟合圆锥的半顶角, δ_i 为球面曲线上的离散点 \mathbf{A}_i 与拟合圆锥轴线 \mathbf{a} 的夹角, 所讨论的球面皆指单位球面, 则

$$\cos\delta = \mathbf{a}\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{a} = \sin\theta\cos\phi x_i + \sin\theta\sin\phi y_i + \cos\theta z_i. \quad (4)$$

圆锥拟合的球面角法向误差为

$$\Delta\delta_i = \delta_i - \delta = \arccos(\sin\theta\cos\phi x_i + \sin\theta\sin\phi y_i + \cos\theta z_i) - \delta. \quad (5)$$

从而得到球面曲线自适应圆锥拟合的数学模型如下:

$$e(\mathbf{x}) = \min \max f_i(\mathbf{x}), \quad (6)$$

式中, $f_i(\mathbf{x}) = |\Delta\delta_i|$, $f_i(\mathbf{x})$ 为离散点拟合圆锥的法向误差, 优化参数 $\mathbf{x} = (\theta, \phi, \delta)^T$ 是拟合圆锥的不变量.

由此可见, 球面机构近似综合的自适应拟合圆锥是依据被拟合轨迹点集 $\{\mathbf{R}_{A_i}\}$ 的性质并按最大法向拟合误差最小为原则得到惟一的拟合圆锥, 同平面机构近似综合中的自适应拟合圆的定义一样, 自适应拟合圆锥具有唯一性和可比性, 即在所有拟合圆锥中, 自适应圆锥的最大拟合误差是最小的、唯一的, 球面运动刚体 Σ_m 上任意点 $\mathbf{A}(x_A, y_A, z_A)$ 的轨迹 $\{\mathbf{R}_{A_i}\}$ 都对应于唯一的自适应圆锥, 且最大拟合误差是球面运动刚体上点的坐标的函数. 最大误差的度量标准是统一的法向误差, 对于所有自适应圆锥的最大误差, 具有可比性. 比较球面运动刚体上各点轨迹所对应的自适应圆锥的最大拟合误差总可以得到若干连杆点, 且有

定义 3.2 对于给定的球面运动, 当运动刚体上一点在相对其邻域内其他任意连杆点而言, 该点在固定坐标系中轨迹的自适应圆锥的最大法向拟合误差获得极小值, 则该点为球面运动刚体上的自适应近似球面圆点, 简称近似球面圆点.

近似球面圆点具有二次鞍点意义, 也是局部最优意义. 一般情况下, 球面四杆机构的连杆曲线是 8 次代数曲线^[19], 因而球面连杆曲线所对应的自适应圆锥的最大拟合误差也是连杆点坐标的非线性函数. 同样, 用球面连杆机构近似复演给定球面运动, 若给定的球面运动非退化, 则运动刚体上各点的轨迹所对应的自适应圆锥的最大拟合误差也是运动刚体上点的位置坐标的非线性函数, 也必然存在极小值, 故有

定理 3 对于给定的非退化的球面运动, 运动刚体上一定存在近似球面圆点.

1) 见 291 页脚注

4 空间机构的自适应综合

空间机构综合的本质同样是在运动刚体上寻求特征点或特征线, 那么, 这些特征点或线在固定坐标系 $o_f x_f y_f z_f$ 中的轨迹必须准确是约束曲线或约束直纹面. 而在空间机构近似优化综合中只能近似实现, 误差越小越好, 需借助于优化方法求解. 对于特征点, 其轨迹是一条空间曲线, 与约束曲线的近似程度, 可以采用与平面机构综合类似的约束曲线自适应拟合曲线方法实现, 在此不加阐述, 仅讨论以C副类连接连架杆与连杆、机架的特征直线轨迹的空间机构综合.

由微分几何学^[20]可知, 直纹面由直母线沿准线运动而形成, 如(2)式中的准线 R_A 和直母线单位方向 R_{I_m} , 直纹面的整体几何性质依赖于直母线单位方向变化和腰线特征, 把准线 R_A 通过 $R_A - (R'_A l'_{mi}) / l'^2_{mi}$ 转化为腰线 ρ , 而 R_{I_m} 确定直母线方向的性质, 直纹面参数 t 仅表示直母线方向上一点的位置而已. 因此, 可由直母线单位方向和腰线特征来描述直线轨迹的性质. 将直母线单位方向 R_{I_m} 的起点置于一固定单位球的球心, 终点则在单位球的球面上形成一条轨迹曲线, 称为球面像曲线. 显然, 直纹面直母线球面像曲线是一条球面曲线, 而腰线是一条空间曲线, 所以, 连杆与连架杆以C副类连接的空间机构综合问题实质是寻找运动刚体上一直线的轨迹与约束曲面有相近的腰线和球面像曲线, 近似程度越高越好. 由文献[21]的定理1和2可知, 一直纹面成为定斜约束曲面的充要条件是该直纹面的球面像曲线为圆, 成为定轴直纹面的充要条件是该直纹面的球面像曲线为圆且腰线为圆柱面曲线. 那么, 对于空间运动刚体上一直线的运动轨迹点集 (R_A, R_{I_m}) , 要判断其与定斜约束曲面或定轴直纹面的接近程度可以分为两部分, 即直纹面球面像曲线和腰线的近似程度.

4.1 近似球面像圆点

显然, 对于一直纹面的球面像曲线, 判断其与圆的近似程度与球面机构综合中的自适应拟合圆锥的确定完全相同, 即寻求球面像曲线的自适应拟合圆锥, 数学模型同(6)式, 此时 (x_i, y_i, z_i) 是 R_{I_m} 的方向余弦. 球面像曲线的自适应拟合圆锥的确定可根据下列定义:

定义 4.1 依据球面像点集 $\{R_{I_m}\}$ 的性质并按最大法向拟合误差最小为原则得到唯一的球面像曲线拟合圆锥, 称为自适应球面像拟合圆锥.

对于给定球面像曲线, 在所有的拟合圆锥中, 有且仅有自适应球面像拟合圆锥使得最大拟合误差最小, 具有球面机构综合自适应拟合圆锥相同的唯一性和可比性. 刚体空间运动时, 刚体上任意直线方向的球面像都对应于球面运动刚体上一点的轨迹^[21], 那么, 空间运动刚体上的所有直线的球面像点(单位方向矢量)与球面运动刚体(任意球面)上点一一对应, 所以, 刚体空间运动直线轨迹的近似球面像圆点与球面运动刚体上近似球面圆点相同, 即

定义 4.2 相对其邻域内其他任意直线方向而言, 该直线方向的球面像曲线的自适应圆锥的最大法向拟合误差获得极小值, 则称该直线方向球面像点为空间运动刚体上的直线球面像曲线的自适应近似圆点, 简称近似球面像圆点.

近似球面像圆点与近似球面圆点相同, 因而, 球面机构近似综合的定理 3 可以推广到空间运动直线方向的近似球面像圆点, 即定理 3 的推论:

推论 4.1 对于给定的非退化的空间运动, 运动刚体上一定存在若干条直线方向, 其球面像点为近似球面像圆点.

4.2 近似圆柱腰点

根据文献[21]的定理 1 可知, 如果刚体上一直线方向为近似球面像圆点, 那么, 空间运动刚体上所有与之平行的直线在固定坐标系下的轨迹曲面均为定斜直纹面, 与其腰线形状无关. 由于定斜直纹面所对应的连架杆约束曲面为多自由度多运动副组合 $C'-P-C$, 形成闭式链的自由度多. 为减少约束曲面所对应的连架杆的自由度, 应增加对腰线的约束, 即根据文献[21]的定理 2, 不仅要求直纹面的直母线方向为近似球面像圆点, 而且腰线为圆柱面曲线. 对于直纹约束曲面的腰线而言, 若要判断腰线近似圆柱面上曲线的近似程度, 依据定轴直纹面的性质可知, 定轴直纹面所对应的为二副连架杆 $C'-C$, 且定轴直纹面是定斜直纹面的一种, 定轴直纹面的轴线方向就是拟合圆锥的轴线方向, 并与直母线夹定角, 而且腰点一定在轴线与直母线的公垂线上^[21]. 所以, 腰线近似圆柱面上曲线的近似程度可以在轴线的法面内评定, 把腰线向轴线的法面内投影得法面内一平面曲线, 评价腰线投影曲线与圆的近似程度, 即用圆自适应拟合腰线投影曲线, 与平面曲线自适应拟合相似. 其数学模型为

$$e(\mathbf{x}) = \min \max f_i(\mathbf{x}) \quad (7)$$

式中, $f_i(\mathbf{x}) = |(x_0 - x_i)u_i + (y_0 - y_i)v_i + (z_0 - z_i)w_i - r|$, $\mathbf{n}_i = (\mathbf{l}_{mi} \times \mathbf{a}) / |\mathbf{l}_{mi} \times \mathbf{a}| = [u_i, v_i, w_i]^T$ 为直纹面直母线 \mathbf{l}_{mi} 与圆柱面轴线 \mathbf{a} 的公垂线方向, 如图 5 所示. 由(7)式可知, 给定近似球面像圆点, 即圆柱面轴线方向 \mathbf{a} 确定的情况下, 对于运动刚体上无穷多条与之平行的直线, 任意位置点 (x_i, y_i, z_i) 直线的轨迹曲面便存在一条腰线, 都可以用圆柱面拟合, 从而有

定义 4.3 对于给定空间运动刚体上一条直线的方向和位置, 其轨迹曲面的腰线为一空间曲线, 存在唯一的圆柱面, 使得圆柱面与腰线的最大拟合误差为最小, 称该圆柱面为自适应拟合圆柱面, 简称自适应拟合圆柱.

由于描述直线的空间位置参考点可以有无穷多, 在此统一约定以直线与运动刚体坐标系中的 $B_m x_m y_m$ 平面交点为描述直线位置参考点, 简称直线位置点. 一般情况下, 直纹面腰线是一系列腰点组成, 而不是运动刚体上一点的轨迹曲线, 所以, 腰点并不总是与直线位置点重合; 通过自适应拟合圆柱把腰线近似看成在自适应拟合圆柱面上曲线; 运动刚体上直线位置点不同, 其腰线形状和位置不同, 所对应的自适应拟合圆柱的大小和位置也不同, 故有:

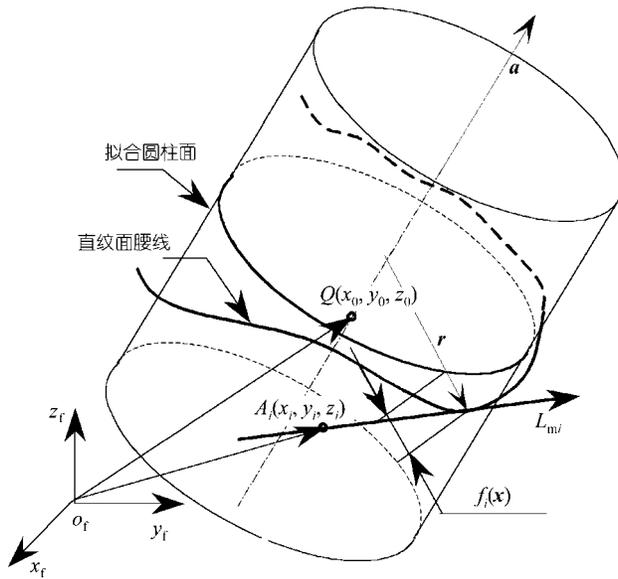


图5 腰线的圆柱面拟合

定义 4.4 对于给定空间运动刚体上一直线的方向, 在运动刚体上平行该方向的所有直线各自对应的自适应拟合圆柱中, 总存在若干条直线, 相对其邻近直线位置而言, 该直线所对应的自适应拟合圆柱的最大拟合误差取得极小值, 称该直线的位置点为近似圆柱腰点.

显而易见, 近似圆柱腰点是指运动刚体上 $B_m x_m y_m$ 平面内的直线位置点, 通过该点且平行给定方向的直线在固定坐标系中的轨迹曲面的腰线较好地接近圆柱面, 具有二次鞍点意义. 由于空间运动刚体上一直线运动轨迹的腰线形状和位置是直线位置点坐标的非线性函数, 那么, 自适应拟合圆柱的最大拟合误差是直线位置点坐标的非线性函数, 因而必然存在若干个极值, 即

定理 4 对于给定非退化空间运动刚体上一直线的方向, 运动刚体上 $B_m x_m y_m$ 平面内必然存在若干点为近似圆柱腰点.

由于含有定轴直纹面约束的空间机构近似综合, 不仅要求直纹面的直母线方向为近似球面像圆点, 而且腰线为近似圆柱面曲线, 故给出

定义 4.5 对于给定空间运动刚体上一直线, 其方向的球面像点为球面像圆点, 其位置为近似圆柱腰点, 则称该直线为近似定轴线.

依据定义 4.5 和定理 4, 并结合推论 4.1, 故有

推论 4.2 对于给定的非退化的空间运动, 运动刚体上一定存在若干条近似定轴线.

由定义 4.1~4.5 描述了空间运动直线轨迹与约束曲面的近似程度并提供了统一的度量标准, 具有唯一性和可比性, 推论 4.1、定理 4 及推论 4.2 表明了任意空

间运动可以由含有定轴直纹面约束的空间机构近似复演,即近似解的存在性,其近似程度取决于空间运动的性质,为空间机构近似综合提供了理论依据,并为鞍点规划有效迭代算法的收敛性提供了保证.

空间运动刚体上一直线运动轨迹点集(R_A, R_{I_m})与定轴直纹面的接近程度可以分为两部分,即直纹面球面像曲线和腰线的近似程度,分别为近似球面像圆点和近似圆柱腰点.如果要综合一空间五杆机构CPCCC,需要寻求两个近似球面像圆点,并确定一个近似定轴线(近似圆柱腰点).要综合一空间四杆机构CCCC,需要寻求两个近似定轴线(两个近似球面像圆点及近似圆柱腰点).若综合出空间四杆机构CCCR,则要寻求两个近似定轴线(两个近似球面像圆点及近似圆柱腰点,其中一个近似圆柱腰点还需要退化为平面圆点),有关算例见王德伦¹⁾.

5 结论

(i) 提出了平面、球面和空间运动近似综合的统一模型与方法.基于简单曲线曲面与机构约束曲线曲面的不变量自适应拟合方法,建立了平面、球面和空间运动综合问题的统一数学模型,给出了近似特征点线的误差评定统一方法,从而为机构优化综合的有效迭代算法的收敛性提供了理论依据.

(ii) 提出了具有二次鞍点意义的近似圆点、近似滑点、近似球面圆点、近似球面像圆点和近似圆柱腰点、近似定轴线的新概念,准确表述了其近似性质具有局部最优意义,并阐明其存在性.为平面、球面和空间机构近似运动综合近似解的存在性及算法收敛性提供了理论基础.

参 考 文 献

- 1 Suh C H, Radcliffe C W. Kinematic and Mechanisms Design. New York: John Wiley & Sons, 1978
- 2 Ma O, Angeles J. Performance Evaluation of Path-Generating Planar, Spherical and spatial four-bar. Mechanism and Machine Theory, 1988, 23(4): 257~268 [\[DOI\]](#)
- 3 Jamalov R I, Litvin F L, Roth B. Analysis and design of RCCC linkages. Mechanism and Machine Theory, 1984, 19(4/5): 397~407
- 4 Zhang X, Zhou J, Ye Y Y. Optimal mechanism design using interior-point methods. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35: 83~98 [\[DOI\]](#)
- 5 Ullah I, Kota S. Optimal synthesis of mechanisms for path generation using Fourier descriptors and global search methods. Transaction of ASME, 1997, 119(4): 504~510
- 6 Haulin E N, Lakis A A, Vinet R. Optimal synthesis of a planar four-link mechanism used in a hand prosthesis. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(5): 1203~1211 [\[DOI\]](#)
- 7 Zhou H, Cheng E H M. Optimal synthesis of crank-rocker linkages for path generation using the orientation structural error of the fixed link. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36: 973~982 [\[DOI\]](#)
- 8 Yao J, Angeles J. Computation of all optimum dyads in the approximate synthesis of planar linkages for rigid-body guidance. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35: 1065~1078 [\[DOI\]](#)

1) 王德伦, 王淑芬. 含有 C-C 二副杆的空间机构自适应综合方法. 机械工程学报 (待发表)

- 9 Bagci C, Rieser G M. Optimum Synthesis of Function generators involving derivative constraints. *Mechanism and Machine Theory*, 1984, 19(1): 157~164
- 10 胡新生, 伍饶宇, 宗志坚, 等. 连杆机构极大极小函数综合的有效方法. *机械工程学报*, 1997, 33(2): 1~7
- 11 王知行. 利用连杆转角曲线进行平面连杆轨迹综合的研究. *机械工程学报*, 1995, 31(1): 42~47
- 12 刘安心, 杨廷力. 平面连杆机构近似运动综合研究. *机械科学与技术*, 1997, 16(2): 214~224
- 13 Ching C H. Design of spherical and Planar crank-rockers and double-rockers as function generators—I: crank-rockers. *Mechanism and Machine Theory*, 1986, 21(4): 287~296
- 14 Ching C H. Design of spherical and planar crank-rockers and double-rockers as function generators—II: double-rockers. *Mechanism and Machine Theory*, 1986, 21(4):297~305
- 15 Ching C H. *Kinematics of spherical mechanisms*. Landon: Cambridge University Press, 1988
- 16 杨中福, 徐礼钜. 球面六杆机构轨迹再现综合. *四川大学学报(工程科学版)*, 2000, 32(3): 48~50
- 17 姚进. 转向装置球面四杆机构的综合. *机械设计与制造工程*, 2001,30(2): 12~13
- 18 王德伦, 王淑芬, 李涛. 平面四杆机构近似运动综合的自适应方法. *机械工程学报*, 2001, 37(12): 21~26
- 19 Kose O. On the dual spherical motions—I. *Mechanism and Machine Theory*, 1982, 17(3): 185~190
- 20 佐佐木重夫, 著. 微分几何学. 苏步青, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1965
- 21 Wang D L, Liu J, Xiao D Z. Geometrical characteristics of some typical spatial constraints. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, 35(10): 1413~1430 [DOI](#)