

叠层开口圆柱厚壳的静、动态和稳定问题的精确解*

范家让 张巨勇

(合肥工业大学应用数学力学系, 合肥 230009)

摘 要

抛弃任何有关应力或位移模式的假设, 在柱坐标系下对正交异性体建立其状态方程。对叠层开口圆柱厚壳的静、动态和稳定问题, 利用 Cayley-Hamilton 定理一次求解全部未知量。无论层数多少, 都只归结为求解三元一次代数方程组。此解满足所有弹性力学方程, 并计及了全部弹性常数。可得到任意需要的精度。

关键词: 正交异性体, 叠层开口圆柱厚壳, 状态方程, 转移矩阵, 精确解

一、引 言

近代研究指出, 横向剪切变形对各向异性板、壳的解的精度影响远较各向同性的板、壳大。首先考虑横向剪切变形来分析叠层圆柱壳的是 Dong 等^[1]。继之, Whitney 等^[2]提出一个改进的理论研究类似的问题。自 Vlasov^[3] 提出初始函数法后, Haydl^[4] 用此法讨论了圆柱壳的对称弯曲。Faraji 等^[5] 又用此法并结合 Taylor 级数研究单层各向同性圆柱壳, 指出随着级数取项多少而得到不同高阶理论。Reddy^[6] 提出一种放松的 Kirchhoff-Love 假设并引入剪切修正因子讨论了叠层中厚度双曲率壳。但因 Reddy 假设和 Kirchhoff-Love 假设区别甚微, 此文或许只适用于薄壳。虽然剪切修正因子的引入可以改善精度, 但若不能提供一个统一的因子来适用于各种情况, 此文将意义不大。正因为如此, Reddy 等^[7] 于次年又提出一个高阶剪切变形理论来分析同一课题。然而, 因该理论不够严密且多次采用近似措施, 结果使该理论仍然只适用于薄壳。

上述诸理论都把各力学量表达成某一坐标变量的多项式。但我们已证明各力学量的真解不可能是任何坐标变量的多项式。若以多项式的形式参加运算, 必导致方程之间的互不相容, 且不能计及全部弹性常数。这正是各家理论的误差根源。此误差将随板、壳厚度加大而剧增。对强厚度板、壳而言, 各家理论全都失效。

文献[8—10]发展了 Vlasov 的初始函数法, 对任意厚度的单层、叠层矩形板和圆板给出了精确解。本文又在此基础上采用分层法和转移矩阵处理变系数微分方程组, 克服了通常离

本文 1990 年 12 月 1 日收到, 1991 年 9 月 16 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

散法带来的未知量多、精度差的缺点。对任意厚度的叠层圆柱壳给出能满足任意精度要求的解。文中提供的递推公式,使常规分析法中 $6p$ 个未知量(p ——层数)减少到仅有 3 个。

二、柱壳状态方程的建立

图 1 所示为柱坐标系下的壳体单元。设 U, V, W 分别表示沿 x, θ 和 r 方向的位移, ρ 为材

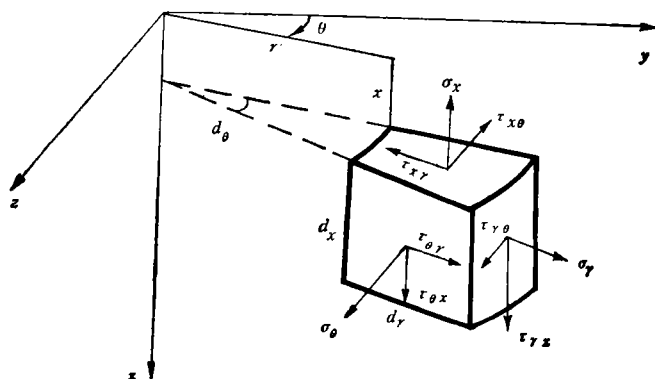


图 1 柱坐标系中的壳体单元

料密度,则壳体的动力学平衡方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \left(p_z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \left(p_z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{rx}}{r} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \left(p_z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

上式等号右端项若以括号中的量代替,则为精确的稳定方程^[1],其中 p_z 为作用于柱壳两端的均布压应力。

将应变-位移关系代入正交异性体的应力-应变关系,得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{x\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{rx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{r} \\ \frac{\partial W}{\partial r} \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

现由(1),(2)两式消去应力 σ_z, σ_θ 和 $\tau_{z\theta}$. 记 $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}, \beta = \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi^2 = \rho \frac{\partial^2}{\partial r^2}; c_1 = -\frac{c_{13}}{c_{33}}, c_2 = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, c_3 = c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}, c_4 = c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}, c_5 = -\frac{c_{23}}{c_{33}}, c_6 = \frac{1}{c_{33}}$. 由(2)式中的第三、第五和第六式分别求得

$$\frac{\partial W}{\partial r} = c_6 \sigma_r + c_1 \alpha U + \frac{c_5}{r} \beta V + \frac{c_3}{r} W, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\tau_{rz}}{G_{rz}} - \alpha W, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G_{r\theta}} - \frac{1}{r} \beta W + \frac{V}{r}. \quad (5)$$

由(2)式中的第二式求出 σ_θ , 代入(1)式中的第一式可求得 $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$, 然后用(3)式化简后, 得

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \left(\xi^2 + \frac{C_4}{r^2} \right) W + \frac{C_4}{r^2} \beta V + \frac{C_3}{r} \alpha U - \frac{C_{5+1}}{r} \sigma_r - \frac{1}{r} \beta \tau_{r\theta} - \alpha \tau_{rz}. \quad (6)$$

从(2)式中的第一和第四式分别求出 σ_z 和 $\tau_{z\theta}$, 代入(1)式中的第三式可求得 $\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}$, 将(3)式代入化简后, 有

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = \left(\xi^2 - C_2 \alpha^2 - \frac{G_{z\theta}}{r^2} \beta^2 \right) U - \frac{G_{z\theta} + C_3}{r} \alpha \beta V - \frac{C_3}{r} \alpha W - \frac{\tau_{rz}}{r} + C_1 \alpha \sigma_r. \quad (7)$$

从(1)式中的第二式可求出 $\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}$ 的表达式, 其中的 σ_θ 和 $\tau_{z\theta}$ 可由(2)式求得, 代入后并考虑

(3)式, 得

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = \left(\xi^2 - G_{z\theta} \alpha^2 - \frac{C_4}{r^2} \beta^2 \right) V - \frac{C_3 + G_{z\theta}}{r} \alpha \beta U - \frac{C_4}{r^2} \beta W + \frac{C_5}{r} \beta \sigma_r - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}. \quad (8)$$

简记 $\sigma = \sigma_r, X = \tau_{rz}, \Theta = \tau_{r\theta}$, 将(3)–(8)式写成矩阵:

$$\frac{\partial}{\partial r} [W \ U \ V \ \sigma \ X \ \Theta]^T = \bar{D}(r) [W \ U \ V \ \sigma \ X \ \Theta]^T, \quad (9)$$

其中

$$\bar{D}(r) = \begin{bmatrix} \frac{C_5}{r} & C_1 \alpha & \frac{C_3}{r} \beta & C_6 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}} & 0 \\ -\frac{\beta}{r} & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} \\ \xi^2 + \frac{C_4}{r^2} & \frac{C_3}{r} \alpha & \frac{C_4}{r^2} \beta & -\frac{C_{5+1}}{r} & -\alpha & -\frac{\beta}{r} \\ -\frac{C_3}{r} \alpha & \xi^2 - C_2 \alpha^2 - \frac{G_{z\theta}}{r^2} \beta^2 & -\frac{C_3 + G_{z\theta}}{r} \alpha \beta & C_1 \alpha & -\frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{C_4}{r^2} \beta & -\frac{C_3 + G_{z\theta}}{r} \alpha \beta & \xi^2 - G_{z\theta} \alpha^2 - \frac{C_4}{r^2} \beta^2 & \frac{C_5}{r} \beta & 0 & -\frac{2}{r} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

从(9)式可见, 应力分量 σ_z , σ_θ 和 $\tau_{z\theta}$ 已消去, 而消去的这三个量现在不难由(2)式求出, 用(3)式化简后, 有

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{C_3}{r} W + C_2 \alpha U + \frac{C_3}{r} \beta V - C_1 \sigma_r, \\ \sigma_\theta = \frac{C_4}{r} W + C_3 \alpha U + \frac{C_4}{r} \beta V - C_2 \sigma_r, \\ \tau_{z\theta} = \frac{G_{z\theta}}{r} \beta U + G_{z\theta} \alpha V. \end{cases} \quad (11)$$

对四边筒支壳, 有边界条件(图2):

$$\begin{cases} x=0, l, W=V=\sigma_z=0; \\ \theta=0, \varphi, W=U=\sigma_\theta=0. \end{cases} \quad (12)$$

取

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \sin \frac{m\pi x}{l} e^{i\omega_{mn}t}, \\ U &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \cos \frac{m\pi x}{l} e^{i\omega_{mn}t}, \\ V &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(r) \cos \frac{n\pi\theta}{\varphi} \sin \frac{m\pi x}{l} e^{i\omega_{mn}t}, \end{aligned}$$

图2 四边筒支壳

$$\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{mn}(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \sin \frac{m\pi x}{l} e^{i\omega_{mn}t},$$

$$X = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \cos \frac{m\pi x}{l} e^{i\omega_{mn}t}, \quad \Theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{mn}(r) \cos \frac{n\pi\theta}{\varphi} \sin \frac{m\pi x}{l} e^{i\omega_{mn}t}, \quad (13)$$

则由(11)式前二式不难看出, 边界条件(12)得到满足。将(13)式代入(9)式, 对每对 $m-n$ 得

$$\frac{d}{dr} [W_{mn}(r) \ U_{mn}(r) \ V_{mn}(r) \ \sigma_{mn}(r) \ X_{mn}(r) \ \Theta_{mn}(r)]^T - D(r) [W_{mn}(r) \ U_{mn}(r) \ V_{mn}(r) \ \sigma_{mn}(r) \ X_{mn}(r) \ \Theta_{mn}(r)]^T, \quad (14)$$

其中

$$D(r) = \begin{bmatrix} \frac{C_3}{r} & -C_1 \zeta & -\frac{C_3}{r} \eta & C_6 & 0 & 0 \\ -\zeta & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}} & 0 \\ -\frac{\eta}{r} & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} \\ \frac{C_4}{r^2} - \rho\omega^2 & -\frac{C_3}{r} \zeta & -\frac{C_4}{r^2} \eta & -\frac{C_3+1}{r} & \zeta & \frac{\eta}{r} \\ -\frac{C_3}{r} \zeta & C_1 \zeta^2 + \frac{G_{z\theta}}{r^2} \eta^2 - \rho\omega^2 & \frac{G_{z\theta} + C_3}{r} \zeta \eta & C_1 \zeta & -\frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{C_4}{r^2} \eta & \frac{C_3 + G_{z\theta}}{r} \zeta \eta & G_{z\theta} \zeta^2 + \frac{C_4}{r^2} \eta^2 - \rho\omega^2 & \frac{C_3}{r} \eta & 0 & -\frac{2}{r} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\zeta = \frac{m\pi}{i}, \quad \eta = \frac{n\pi}{\varphi}, \quad \omega = \omega_{mn}.$$

方程(14)是关于变量 r 的一阶变系数常微分方程组, 其他变量 x, θ 和 t 都已消除。在控制论系统中, 称这样的方程组为时变系统状态方程^[12]。

由(14)和(15)式可以证明各力学量不能是坐标变量的多项式: 若 $U_{mn}(r), \sigma_{mn}(r), \Theta_{mn}(r)$ 是 r 的 n 次多项式, 则由(14)式的第一、三和五式分别可知 $W_{mn}(r), V_{mn}(r)$ 和 $X_{mn}(r)$ 必是 r 的 $n+1$ 次多项式。若如此, 则由同一方程的其余三式分别得知 $U_{mn}(r), \sigma_{mn}(r)$ 和 $\Theta_{mn}(r)$ 又必为 r 的 $n+2$ 次多项式, 从而与原设矛盾。证毕。

三、叠层厚壳的状态方程及其解

图3(a)是由 p 层正交异性材料构成的叠层厚壳, 壳长为 l 。图3(b)是其中第 j 层的放大图。现将第 j 层等分成 k_j 个薄层, 薄层厚度均为 $d_j = \frac{h_j}{k_j}$, 其中径分别用 $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jk_j}$ 表示。对第一薄层建立状态方程。因在薄层内 r 变化不大, 若以中径 C_{j1} 代替矩阵(15)中的变量 r 当不会引起大的误差。于是由(14)式得到其状态方程为

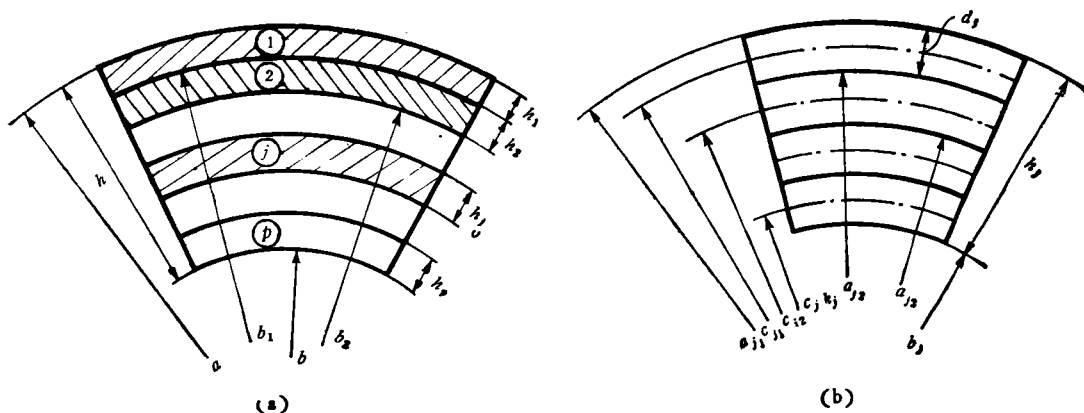


图3 叠层厚壳

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [W_{mn}(r) \quad U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r)]^T_{j1} \\ = D_{j1} [W_{mn}(r) \quad U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r)]^T_{j1}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中下标 $j1$ 表示对第 j 层中第一薄层而言。 D_{j1} 中各元素为常量, 它由矩阵(15)令其中的 $r = C_{j1}$ 而得。若叠层壳每层均很薄, 只需以每层中径代替矩阵(15)中的 r 而不必再行分割。如某些层较厚, 相应的 k_j 取何值应由精度来定。通过计算, 若发现当分割成 k_j 和 $k_j + 1$ 个薄层时, 要求的有效数字几乎不变, 则可认为分割成 k_j 个薄层得到的结果是在满足精度要求意义下的精确解。

方程(16)是一阶常系数常微分方程组, 其解为

$$\begin{aligned} R_{j1}(r) &= [\exp D_{j1}(r - a_{j1})] R_{j1}(a_{j1}) \\ &= G_{j1}(r - a_{j1}) R_{j1}(a_{j1}), \quad r \in [a_{j1}, a_{j2}], \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{R}_{j1}(r) = [W_{jn}(r) \quad U_{jn}(r) \quad V_{jn}(r) \quad \sigma_{jn}(r) \quad X_{jn}(r) \quad \Theta_{jn}(r)]^T, \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_{j1}(a_{j1}) = [W_{jn}(a_{j1}) \quad U_{jn}(a_{j1}) \quad V_{jn}(a_{j1}) \quad \sigma_{jn}(a_{j1}) \quad X_{jn}(a_{j1}) \quad \Theta_{jn}(a_{j1})]^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{G}_{j1}(r - a_{j1}) = \exp[\mathbf{D}_{j1}(r - a_{j1})].$$

六阶矩阵 $\mathbf{G}_{j1}(r - a_{j1})$ 称为状态转移矩阵, 可用 Cayley-Hamilton 定理求得^[21]:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{j1}(r - a_{j1}) = & \alpha_1(r - a_{j1})\mathbf{I} + \alpha_2(r - a_{j1})\mathbf{D}_{j1} + \alpha_3(r - a_{j1})\mathbf{D}_{j1}^2 \\ & + \cdots + \alpha_6(r - a_{j1})\mathbf{D}_{j1}^5, \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为六阶单位阵, $\alpha_s(r - a_{j1})$, ($s = 1, 2, \dots, 6$) 为变量 r 的一组标量函数, 可用下式确定:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1(r - a_{j1}) \\ \alpha_2(r - a_{j1}) \\ \vdots \\ \alpha_6(r - a_{j1}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^5 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & \cdots & \lambda_6^5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \exp[\lambda_1(r - a_{j1})] \\ \exp[\lambda_2(r - a_{j1})] \\ \vdots \\ \exp[\lambda_6(r - a_{j1})] \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ 为矩阵 $\mathbf{D}_{j1}$ 的特征方程 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_{j1}| = 0$ 的根。当特征根有重根时, (21) 式具有其他形式^[22]。但对各向异性体, 出现重根的可能性几乎没有。

在(17)式中, 令 $r = a_{j2}$, 注意到 $a_{j2} - a_{j1} = -d_j$, 于是有

$$\mathbf{R}_{j1}(a_{j2}) = \mathbf{G}_{j1}(-d_j)\mathbf{R}_{j1}(a_{j1}). \quad (22)$$

从(18)式不难看出, (22)式实际上是通过转移矩阵 $\mathbf{G}_{j1}(-d_j)$ 将第一薄层上、下表面的力学量联系起来了。

对第二薄层进行类似推导, 可得

$$\mathbf{R}_{j2}(a_{j2}) = \mathbf{G}_{j2}(-d_j)\mathbf{R}_{j2}(a_{j2}). \quad (23)$$

要提醒的是(22)式中的 $\mathbf{R}_{j1}(a_{j2})$ 是第一薄层下表面力学量; 而(23)式中的 $\mathbf{R}_{j2}(a_{j2})$ 是第二薄层上表面力学量(图 3(b)), 该二组量理应相等。于是联合考虑(22)和(23)式, 得

$$\mathbf{R}_{j2}(a_{j2}) = \mathbf{G}_{j2}(-d_j) \cdot \mathbf{G}_{j1}(-d_j)\mathbf{R}_{j1}(a_{j1}).$$

依次类推, 最后可把第 k_j 薄层下表面力学量和第一薄层上表面力学量用下式联结:

$$\mathbf{R}_{jkj}(b_j) = \mathbf{G}_{jkj}(-d_j)\mathbf{G}_{j, k_j-1}(-d_j) \cdots \mathbf{G}_{j2}(-d_j)\mathbf{G}_{j1}(-d_j)\mathbf{R}_{j1}(a_{j1}).$$

记

$$\mathbf{E}_{jkj} = \mathbf{G}_{jkj}(-d_j)\mathbf{G}_{j, k_j-1}(-d_j) \cdots \mathbf{G}_{j2}(-d_j)\mathbf{G}_{j1}(-d_j),$$

于是有

$$\mathbf{R}_{jkj}(b_j) = \mathbf{E}_{jkj}\mathbf{R}_{j1}(a_{j1}). \quad (24)$$

(24)式对图3(a)中任一层均成立。当 $j = 1, 2$ 时, 分别有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1k_1}(b_1) &= \mathbf{E}_{1k_1}\mathbf{R}_{11}(a_{11}); \\ \mathbf{R}_{2k_2}(b_2) &= \mathbf{E}_{2k_2}\mathbf{R}_{21}(a_{21}). \end{aligned} \quad (25)$$

参看图 3(a), 第一层上表面半径 $a_{11} = a$, 第二层上表面半径 $a_{21} = b_1$ 。根据一、二两层间位移和应力的连续条件, 必有

$$\mathbf{R}_{1k_1}(b_1) = \mathbf{R}_{21}(b_1). \quad (26)$$

将(26)式代入(25)式, 得

$$\mathbf{R}_{2k_2}(b_2) = \mathbf{E}_{2k_2}\mathbf{E}_{1k_1}\mathbf{R}_{11}(a).$$

逐层类推,最后可把第 p 层下表面力学量和第一层上表面力学量通过下式联系起来:

$$\begin{aligned} R_{pkp}(b) &= E_{pkp} E_{p-1,kp-1} \cdots E_{2k_2} E_{1k_1} R_{11}(a) \\ &= \left(\prod_{j=p}^1 E_{ik_j} \right) R_{11}(a), \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $\prod_{j=p}^1 E_{ik_j}$ 仍为六阶矩阵。回忆(18)式,(27)式可改写为

$$\begin{aligned} [W_{mn}(b) \quad U_{mn}(b) \quad V_{mn}(b) \quad \sigma_{mn}(b) \quad X_{mn}(b) \quad \Theta_{mn}(b)]_{pkp}^T \\ = \left(\prod_{j=p}^1 E_{ik_j} \right) [W_{mn}(a) \quad U_{mn}(a) \quad V_{mn}(a) \quad \sigma_{mn}(a) \quad X_{mn}(a) \quad \Theta_{mn}(a)]_{11}^T. \end{aligned} \quad (28)$$

(28)式是叠层壳上、下表面各力学量之间的关系式。通常情况下,上、下表面的外力是事先给定的,即 σ_{mn} , X_{mn} 和 Θ_{mn} 是已知量。所以(28)式实际上是关于壳体上、下表面 6 个位移分量的线性代数方程组。然而,经过适当处理,仅需 3 个方程解 3 个未知量,则整个壳体各力学量均可求出。下例用来说明这一处理过程。

设叠层壳上表面受均布法向压应力 q 作用,将 q 按(13)式中 σ 级数形式展开,在此情况下,(28)式变成

$$\begin{aligned} [W_{mn}(b) \quad U_{mn}(b) \quad V_{mn}(b) \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{pkp}^T \\ = \left(\prod_{j=p}^1 E_{ik_j} \right) \left[W_{mn}(a) \quad U_{mn}(a) \quad V_{mn}(a) \quad \frac{-16q}{mn\pi^2} \quad 0 \quad 0 \right]_{11}^T. \end{aligned} \quad (29)$$

取(29)式中的第 4、5 和 6 三个方程组成新的方程组,并简写为

$$H[W_{mn}(a) \quad U_{mn}(a) \quad V_{mn}(a)]^T = \{Q_{mn}\}, \quad (30)$$

式中 H 是从 $\prod_{j=p}^1 E_{ik_j}$ 中划去相应的行和列后得到的三阶方阵,右端项 $\{Q_{mn}\}$ 是和法向荷载相关的三阶列阵。

通过(30)式可定解 $W_{mn}(a)$, $U_{mn}(a)$ 和 $V_{mn}(a)$ 。此三量和上表面三个已知应力分量称为初始值。初始值求出后,通过(17)式并令 $j=1$,即可求得第一层中第一薄层内各力学量,然后用(13)和(11)式求出所有应力、位移分量。当第一薄层下表面的力学量求出后,又可视作第二薄层的初始值,于是第二薄层内各力学量可求。类推下去,第一层中各力学量处处可求。同理,整个叠层壳各力学量均可求出。

在进行自然频率分析时,仅需在方程(30)中令其右端项为零,然后求非平凡解,即求方程

$$|H| = 0 \quad (31)$$

的根。需指出,方程(31)不再是通常壳体理论所描述的关于 ω^2 的多项式,而是一个超越方程。实际上,方程(31)是该叠层壳在满足给定精度要求意义下的精确频率方程。它有无穷多个根,对应无穷多个频率,可利用现有的求任意函数的零点的程序求解这些根。可见本文提供的解法比通常方法求得的频谱要宽得多。

稳定计算和频谱分析完全类似。比较动力学平衡方程和稳定方程可知,若在(10)式中将 ξ^2 置换为 $p_x \alpha^2$,即可由(31)式求出无穷多个临界力。当然,有实际意义的是最小临界力。

最后着重指出,矩阵(15)的特征值是 r 的函数。当 r 在某一区间变化时,以该区间的中值代替(15)式中的 r ,可求出近似特征值,由此而求得的各力学量也是近似的。但当 r 变化的区

间充分小时(薄层),引起的误差也是很小的。即这种计算中的误差是可控的。方程(16)正是基于这种考虑得来的。它仍是微分方程,不是代数方程。这种处理不但可以提高精度,且可克服通常离散法带来的大量未知量的缺点。绝对精确的事物是不存在的,甚至一个圆,也无法计算出其精确面积,但其计算误差是可控的。因此,重要的问题不是误差,而是误差可否控制。然而,基于各种人为假设的现行诸家板、壳理论,因只能满足部分基本方程,由此而引起的误差是理论误差,此类误差是不可控制的。正是这类误差,使这些理论在求解问题的厚度方面带来极大的限制。

四、数值结果

本节给出的算例,旨在说明本文方法的精度、分层法的收敛速度以及文献[6]和[7]的适用范围。全部数值结果均是用双精度在 SIEMENS/7570C 计算机上实现的。数表中的 I_1 , I_2 , I_3 和 I_4 分别表示第一、二、三和四层内被分割的薄层数。

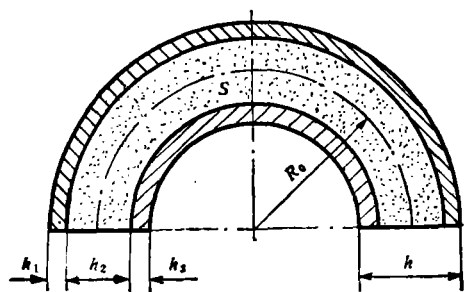


图 4 三层厚壳

例 1. 三层厚壳(图4),顶面受法向拉应力

$$q = q_0 \sin \frac{\pi \theta}{\varphi} \sin \frac{\pi x}{l} \text{ 作用。上、下两层材料相同,每层均有如下的弹性常数:}$$

同,每层均有如下的弹性常数:

$$\begin{aligned} \frac{C_{12}}{C_{11}} &= 0.233190, \frac{C_{13}}{C_{11}} = 0.010776, \frac{C_{22}}{C_{11}} = 0.543104, \\ \frac{C_{23}}{C_{11}} &= 0.098276, \frac{C_{33}}{C_{11}} = 0.530172, \frac{G_{r\theta}}{C_{11}} = 0.266810, \\ \frac{G_{xz}}{C_{11}} &= 0.159914, \frac{G_{x\theta}}{C_{11}} = 0.262931, \frac{C_{11}^{(1)}}{C_{11}^{(2)}} = 5, \end{aligned}$$

表 1 不同分层法和不同曲率半径情况下的三层壳的应力和挠度

$\frac{R_0}{h}$	I_1	I_2	I_3	$\theta = 0.5\pi, x = 0.5l, r = 1.5h$			$\theta = 0.5\pi, x = 0, r = 0.6h$
				$\frac{WC_{11}^{(1)}}{q_0 h}$	$\frac{\sigma_\theta}{q_0}$	$\frac{\sigma_x}{q_0}$	$\frac{\tau_{rx}}{q_0}$
1	1	2	1	3.9774	4.1471	5.9686	0.52270
	1	3	1	3.9790	4.1755	5.9643	0.55455
	1	4	1	3.9795	4.1853	5.9631	0.55517
	2	5	2	3.9779	4.1899	5.9600	0.55616
5	2	5	2	4.7427	4.3782	5.4533	0.52507
10	2	5	2	4.6159	4.1184	5.0049	0.49124
10^2	2	5	2	4.4874	3.8416	4.5848	0.46077
10^3	2	5	2	4.4724	3.8083	4.5374	0.45740
[9]*				4.4724	3.8083	4.5374	0.45740

* 板的精确解。

其中 $C_{11}^{(1)}$ 和 $C_{11}^{(2)}$ 分别表示第一与第二层的 C_{11} 值。几何参数为

$$l = s = \pi R_0, \quad h_1 = h_3 = 0.1h, \quad h_2 = 0.8h,$$

其中 l 为壳长, s 为中面弧长。数值结果见表 1。

由表 1 可见, 分层法的收敛速度是很快。若取相应于 $l_1 = l_3 = 1, l_2 = 4$ 时的值为本问题的解, τ_{rz} 的误差最大, 其值等于 $(0.55616 - 0.55517)/0.55616 = 0.178\%$ 。若令 l, s, h 不变, R_0 逐渐增大, 从而蜕化为板。在蜕化过程中, 应力和挠度均逐渐减小。这是因为顶面(受载面积)也在逐渐减小之故。当 $\frac{R_0}{h} = 10^9$ 时, 和板的精确解相比, 前 5 位数完全一样。

例 2. 四层壳, 各层材料及厚度相同。当纤维方向平行于 x 轴时(0°), 材料的弹性常数为

$$E_x = 25E_\theta = 25E_r, \quad G_{r\theta} = 0.2E_\theta, \quad G_{xr} = G_{x\theta} = 0.5E_\theta,$$

$$\mu_{x\theta} = \mu_{\theta r} = \mu_{xr} = 0.25.$$

几何参数是 $l = s = R_0 = \text{常数}$, h 为总厚度。受荷情况同例 1。数值结果见表 2。

由表 2 可见, 文献[6]和[7]的误差随壳厚增加而增大。本文解给出了上、中、下 3 个面中心处的挠度。当厚度增加时, 它们之间的差距也愈来愈大。通过计算发现, 当 $\frac{h}{R_0} = 0.9$ 时, 此三点的挠度参数分别为 375.2, 167.8 和 111.1。而文献[6, 7]以及大多数板壳理论, 均假设挠度沿厚度均布, 这不仅影响挠度的计算精度, 且引起其他力学量的误差, 因为各力学量是通过方程(14)与挠度相连的。

表 2 不同厚度下四层壳($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)中心处挠度参数 $\bar{w}^*$

$\frac{h}{R_0}$	本文解							[6] $K_1^2 = K_2^2 = \frac{5}{6}$	[7]
	l_1	l_2	l_3	l_4	$\bar{w}_1$	$\bar{w}_2$	$\bar{w}_3$		
0.01	1	1	1	1	0.2062	0.2062	0.2062	0.20526	0.20523
0.03	1	1	1	1	1.3970	1.3980	1.3976	1.3721	1.37263
0.05	1	1	1	1	2.7401	2.7434	2.7407	2.6226	2.6355
0.07	1	1	1	1	4.0070	4.0121	4.0043	3.7077	3.7519
0.09	1	1	1	1	5.2985	5.3017	5.2852	4.7359	4.8246
0.10	1	1	1	1	5.9806	5.9799	5.9575	5.2591	5.3725
0.20	2	2	2	2	15.023	14.664	14.489	11.812	12.110
0.30	3	3	3	3	29.286	26.970	26.257	21.377	21.573
0.40	4	4	4	4	50.780	42.784	40.568	34.186	33.856

* $\bar{w} = \frac{Wh^3E_\theta}{q_0l^4} \times 10^3$, $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ 和 $\bar{w}_3$ 分别为上、中、下三面中心处的挠度参数, K_1, K_2 为剪切修正系数。

例 3. 一微弯的单层壳, 其几何参数是:

$$R_0 = 10^{10}h, \quad \varphi = 10^{-9}\text{rad}, \quad s = l = 10h, \quad l_1 = 1,$$

其中 φ 见图 2。材料的弹性常数同例 1。

表 3 给出了前 8 个自然频率。当壳两端 ($x = 0, l$) 受均布的法向压应力 p_x 作用时, 前 8 个临界力也列于表 3 中。此壳可视为板, 与文献[11](基于三维弹性力学位移法的板的精确解)相比, 误差极小。

表 3 微弯单层壳的频率参数 Ω 和临界力参数 λ^*

$\frac{mh}{l}$	$\frac{nh}{s}$	1	2	3	4	5	6	7	8
0.1	0.1	(1) 0.04742	0.21693	0.39438	1.3081	1.6531	2.2715	2.5481	3.2639
		(2) 0.04742	0.21697	0.39405	1.3077	1.6530	2.2722	2.5479	3.2636
	0.3	(1) 0.18882	0.49563	0.76063	1.3769	1.8122	2.2434	2.5825	3.3676
		(2) 0.18881	0.49530	0.76004	1.3765	1.8115	2.2427	2.5824	3.3678
0.2	0.1	(1) 0.11882	0.35188	0.67313	1.4206	1.6809	2.2543	2.6262	3.2764
		(2) 0.11880	0.35150	0.67278	1.4205	1.6805	2.2537	2.6264	3.2760
	0.3	(1) 0.24755	0.55188	0.94438	1.4594	1.8528	2.2340	2.6481	3.3826
		(2) 0.24753	0.55201	0.94433	1.4596	1.8523	2.2335	2.6481	3.3828
0.3	0.1	(1) 0.21802	0.50313	0.97313	1.5781	1.7340	2.2403	2.7387	3.2964
		(2) 0.21804	0.50291	0.97278	1.5777	1.7334	2.2396	2.7383	3.2967
	0.3	(1) 0.33199	0.65063	1.1819	1.5731	1.9293	2.2278	2.7450	3.4089
		(2) 0.33200	0.65043	1.1814	1.5737	1.9289	2.2274	2.7457	3.4085

* $\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}}$, $\lambda = M \sqrt{\frac{p_{cr}}{C_{11}}}$, $M = \frac{m\pi h}{l}$, p_{cr} ——临界荷载。(1)——本文解, (2)——文献[11]解。

五、结 论

本文给薄的、中等厚度的以及强厚度的叠层圆柱壳提供了统一的解析解, 物理概念清晰, 克服了诸家板、壳理论中因基本方程之间的互不相容而带来的种种矛盾和限制。算例表明, 分层法收敛速度快, 误差可控, 精度高。而文献[6]和[7]的误差, 必随厚度增加而增大。与数值解相比, 计算量小, 主要工作量仅是求六阶矩阵的乘积。文中通过转移矩阵构成的递推公式, 使未知量减少到仅有 3 个。而通常的三维弹性力学解却需处理 $6p$ (p 为层数) 个未知量, 例如文献[11]即如此。

参 考 文 献

- [1] Dong, S. B. et al., *ASME, J. Appl. Mech.*, **39** (1972), 1091—1099.
- [2] Whitney, J. M. et al., *ibid.*, **41** (1974), 471—476.
- [3] Vlasov, V. Z., *9th Int. Cong. Appl. Mech.*, Vol. 6, Brussels, 1957, 321—330.
- [4] Haydl, H. M., *J. Engng. for Industry, Trans. ASME Series B*, **93** (1971), 845—850.
- [5] Faraji, S. et al., *Int. J. Solids Structures*, **21** (1985), 851—863.
- [6] Reddy, J. N., *ASCE, J. Engng. Mech.*, **110** (1984), 794—809.
- [7] Reddy, J. N. et al., *Int. J. Engng. Sci.*, **23** (1985), 319—330.
- [8] Fan Jiarang (范家让), Ye Jianqiao (叶建乔), *Int. J. Solids Structures*, **26** (1990), 773—778.
- [9] ———, *ibid.*, **26** (1990), 655—662.
- [10] ———, *ASCE, J. Engng. Mech.*, **116** (1990), 920—927.
- [11] Srinivas, S. et al., *Int. J. Solids Structures*, **6** (1970), 1463—1481.
- [12] 尤昌德, 线性系统理论基础, 电子工业出版社, 1985, 67—94.