



流形上的微分 Harnack 估计

牛艳艳

首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: yyniukxe@gmail.com

指导教师: 倪磊 Department of Mathematics, University of California, San Diego

李庆忠 首都师范大学数学科学学院

收稿日期: 2012-11-18; 接受日期: 2013-03-28

摘要 本文着重研究 Kähler 流形上 Hodge Laplace 热方程 (p, p) 形式解的 Harnack 估计. 在 Kähler 流形上, 定义了一族新的曲率锥 C_p . 不仅得到曲率条件 C_p 在 Kähler-Ricci 流下是保持不变的, 而且也证明了在此条件下 Hodge Laplace 热方程解的正性是保持的. 对于给定的 Kähler 流形, 如果它的曲率算子满足 C_p 条件, 那么 Hodge Laplace 热方程 (p, p) 形式的正解满足一族最优的微分 Harnack 估计; 而对于一族 Kähler 流形, 如果它们满足 Kähler-Ricci 流方程且对应的曲率算子都满足 C_p 条件, 可以证明此时的 Hodge Laplace 热方程的正解也满足一族微分 Harnack 估计. 本文还引入了 r -正形式, 并且将 Hodge Laplace 热方程正形式解满足的性质推广到了 r -正形式解. 类似地, 给定一个 Riemann 流形, 也可以定义新的曲率锥 $\tilde{C}_p$, 它在 Ricci 流下保持不变. 本文还分别得到了在曲率条件 C_p 和 $\tilde{C}_p$ 下曲率算子满足的微分 Harnack 估计.

关键词 Hodge Laplace 热方程 曲率锥 最大模原理 Harnack 估计

MSC (2010) 主题分类 58J35

1 前言

本文是作者博士毕业论文的一个简要介绍, 由于篇幅限制, 本文将略去所有证明, 有兴趣的读者可以参考原论文. 论文中关于 Hodge Laplace 方程最大模原理及 Harnack 估计的主要结果可参见文献 [1, 2]. 在博士论文之后, 我们继续进行了这方面的研究. 我们新引入了一类正形式, 且将博士论文的结果推广到 Hodge Laplace 热方程这类解.

2 研究背景

微分方程解的 Harnack 估计及微分 Harnack 估计一直以来都是偏微分方程理论和几何分析中主要的研究对象之一, 有许多的专家学者在这方面都作出了杰出的贡献. 早在 20 世纪 60 年代初期, Moser^[3] 就得到了散度型线性抛物型微分方程正解的 Harnack 估计. 在具有非负 Ricci 曲率的 Riemann 流形上, Li 和 Yau^[4] 利用最大模原理首次证明了热方程的正解满足梯度估计, 并由该估计在时空道路上的积分得到了正解满足的 Harnack 不等式. 虽然他们的证明仿效了处理椭圆型方程的方法, 但是

他们得到的是解的梯度估计, 而且所得到的 Harnack 不等式也是最优的. 不仅如此, 他们的结论及研究方法对非线性几何演化方程的研究有广泛且深刻的影响. 1982 年, Hamilton^[5] 引入了 Ricci 流方程, 并且在文献 [6] 中证明了 Ricci 流方程解的曲率算子满足一族矩阵微分 Harnack 估计. 事实上, Ricci 流方程解的曲率算子满足非线性的反应扩散型方程, 因此 Hamilton 的结果让人称奇, 对于 Ricci 流解的研究也是非常重要的. 鉴于他们在几何演化方程研究上的突出贡献, 人们把此类型的微分估计统称作 “Li-Yau-Hamilton” 型 (以下均简称为 LYH 型) 估计. 除此之外, 还有许多的数学家在其他几何演化方程的研究中作出了突出的贡献, 这些几何演化方程涵盖面极广, 包含平均曲率流、Gauss 曲率流、Kähler-Ricci 流、Hermite-Einstein 流和 Yamabe 流等.

通过研究线性方程解的 Harnack 估计, 可以得到方程弱解的正则性, 然而线性方程对应的著名的 De Giorgi-Nash-Moser 理论对于一般线性方程组是不适用的. 作用在形式上的 Hodge Laplace 热方程在几何中是个非常有趣的方程组. 自 Hodge 和 Kodaira 之后, 人们对 Hodge Laplace 算子作了广泛而深入的研究. 本文主要研究 Kähler 流形上 Hodge Laplace 热方程正解满足的 LYH 型微分 Harnack 估计.

3 Hodge Laplace 热方程的最大模估计

3.1 Hodge Laplace 热方程

给定 (p, p) 形式 ϕ_0 , 我们称以它为初值的演化方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{\bar{\partial}}\right)\phi(x, t) = 0 \quad (3.1)$$

为 (p, p) 形式 $\phi(x, t)$ 满足的 Hodge Laplace 热方程, 其中 $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$.

设 ϕ 为 (p, q) 形式, 在局部全纯坐标系 $(U; z^i)$ 下表示为

$$\phi = \frac{1}{p!q!} \sum \phi_{I_p \bar{J}_q} dz^{I_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{J}_q},$$

其中 $I_p = (i_1, \dots, i_p)$, $\bar{J}_p = (\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_p)$. 当 $p = q$ 时, ϕ 也可写作

$$\phi = \frac{1}{(p!)^2} \sum \phi_{I_p, \bar{J}_p} (\sqrt{-1} dz^{i_1} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1}) \wedge \dots \wedge (\sqrt{-1} dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_p}),$$

此时 $\phi_{1\dots p, \bar{1}\dots\bar{p}}$ 与 $\phi_{1\dots p \bar{1}\dots\bar{p}}$ 相差因子 $(\frac{1}{\sqrt{-1}})^p (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$.

经过直接计算 (参见文献 [7]) 可知,

$$\begin{aligned} (\Delta_{\bar{\partial}}\phi)_{I_p \bar{J}_q} = & -\Delta\phi_{I_p \bar{J}_q} - \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^q R_{i_\mu \bar{j}_\nu}^{k\bar{l}} \phi_{i_1 \dots (k)_\mu \dots i_p \bar{j}_1 \dots (\bar{l})_\nu \dots \bar{j}_q} \\ & + \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu=1}^q R_{\bar{j}_\nu}^{\bar{l}} \phi_{I_p \bar{j}_1 \dots (\bar{l})_\nu \dots \bar{j}_q} + \sum_{\mu=1}^p R_{i_\mu}^k \phi_{i_1 \dots (k)_\mu \dots i_p \bar{j}_q} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里 $R_{i_\mu \bar{j}_\nu}^{k\bar{l}}$, $R_{\bar{j}_\nu}^{\bar{l}}$ 分别为曲率张量 $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ 和 Ricci 张量 $R_{i\bar{j}}$ 通过 Kähler 度量的指标提升, $(k)_\mu$ 意指将第 μ 个位置上的指标替换成 k , 所有的指标求和都是从 1 到 m .

若 (p, p) 形式 $\phi(x, t)$ 为 (3.1) 的解, 则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\phi(x, t) = \mathcal{KB}(\phi), \quad (3.3)$$

其中

$$(\mathcal{KB}(\phi))_{I_p, \bar{J}_p} = \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^p R_{i_\mu \bar{j}_\nu}^{k\bar{l}} \phi_{i_1 \dots (k)_\mu \dots i_p, \bar{j}_1 \dots (\bar{l})_\nu \dots \bar{j}_p} - \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu=1}^p R_{\bar{j}_\nu}^{\bar{l}} \phi_{I_p, \bar{j}_1 \dots (\bar{l})_\nu \dots \bar{j}_p} + \sum_{\mu=1}^p R_{i_\mu}^k \phi_{i_1 \dots (k)_\mu \dots i_p, \bar{J}_p} \right).$$

3.2 正 (p, p) 形式及 r -正 (p, p) 形式

设 (M^m, g) 为复 m - 维的 Kähler 流形, 若对于任意点 $x \in M$ 及向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \in T_x^{1,0}M$, (p, p) 形式 ϕ 满足

$$\left\langle \phi, \frac{1}{\sqrt{-1}} \mathbf{v}_1 \wedge \bar{\mathbf{v}}_1 \wedge \dots \wedge \frac{1}{\sqrt{-1}} \mathbf{v}_p \wedge \bar{\mathbf{v}}_p \right\rangle \geq 0,$$

则称 ϕ 为正 (p, p) 形式. 经过简单的线性代数的计算, 容易验证上面的非负性等价于 ϕ 作用在满足 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ 的向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 上为非负的. 为方便起见, 也可将 $\langle \phi, \frac{1}{\sqrt{-1}} \mathbf{v}_1 \wedge \bar{\mathbf{v}}_1 \wedge \dots \wedge \frac{1}{\sqrt{-1}} \mathbf{v}_p \wedge \bar{\mathbf{v}}_p \rangle$ 记为 $\phi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p; \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p)$, 或 $\phi_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_p, \bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_2 \dots \bar{\mathbf{v}}_p}$. 若对于任意线性无关的向量组 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^p$, $\phi_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_p, \bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_2 \dots \bar{\mathbf{v}}_p} > 0$, 则称 ϕ 为严格正的 (p, p) 形式. 我们记所有正 (p, p) 形式生成的锥为 $\mathcal{P}_p$. 显然 $\mathcal{P}_p$ 是个闭凸锥.

若对于任意点 $x \in M$, ϕ 可表示为

$$\phi(x) = \frac{1}{(p!)^2} \sum \gamma_s \mathbf{i} \alpha_{s,1} \wedge \bar{\alpha}_{s,1} \wedge \dots \wedge \mathbf{i} \alpha_{s,p} \wedge \bar{\alpha}_{s,p},$$

其中 $\gamma_s \geq 0$, $\alpha_{s,\mu} \in \Lambda^{1,0} T_x^* M$, $1 \leq \mu \leq p$, 则称 ϕ 为强正的 (p, p) 形式. 不难验证 ϕ 为强正 (p, p) 形式当且仅当对于任意的 $u \in \Lambda^{p,0} T_x^{1,0} M$, $(-\sqrt{-1})^{p^2} \phi(u, \bar{u}) \geq 0$. 且当 $p = 1, m - 1$ 时, ϕ 为正形式当且仅当其为强正形式.

若对于任意点 $x \in M$ 及

$$X_s = X_{s,1} \wedge X_{s,2} \wedge \dots \wedge X_{s,p} \in \Lambda^{p,0} T_x M, \quad 1 \leq s \leq r, \quad (-\sqrt{-1})^{p^2} \phi \left(\sum_{s=1}^r X_s, \overline{\sum_{s=1}^r X_s} \right) \geq 0,$$

则称 (p, p) 形式 ϕ 为 r -正的 (p, p) 形式, 记为 $\phi \geq_r 0$. 我们记所有 r -正 (p, p) 形式生成的锥为 $\mathcal{P}_p^r$. 显然 $\mathcal{P}_p^r$ 也是个闭凸锥, 且当 $r = 1$ 时, $\mathcal{P}_p^1 = \mathcal{P}_p$; 当 $r \geq C_m^p$ 时, r -正形式也是强正 (p, p) 形式.

记 (M^m, g) 的曲率算子为 Rm . 若对于任意的 $(1, 1)$ 型向量 $\alpha = \sum_{l=1}^k X_l \wedge \bar{Y}_l$, 其中 $X_l, Y_l \in T^{1,0}M$, 有 $\langle \text{Rm}(\alpha), \bar{\alpha} \rangle \geq 0$, 则称 Rm 满足条件 $\mathcal{C}_k$ (落在 $\mathcal{C}_k$ 锥内). 此时 $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 Riemann 内积的复双线性延拓. 这里我们将 $T^{1,0}M$ 与 $\mathbb{C}^m$ 等同. 显然当 $k = 1$ 时, $\text{Rm} \in \mathcal{C}_1$ 当且仅当流形具有非负的全纯双截曲率. 由 Wilking^[8] 最近的工作, 我们不难得到曲率锥 $\mathcal{C}_p$ 在 Kähler-Ricci 流下保持不变.

3.3 $\mathcal{P}_p^r$ 的不变性

3.3.1 固定度量

Ni 和 Tam^[9] 研究了 Lichnerowicz 热方程非负 Hermite 对称张量解满足的最大模原理. 而当 $p = 1$ 时, 利用实 $(1, 1)$ -形式与 Hermite 对称张量之间的一一对应关系, 不难验证 Lichnerowicz 热方程的最

大模原理也适用于 Hodge Laplace 热方程 (1,1) 形式的解, 即在 Hodge Laplace 热方程下保持. 事实上, 在合适的曲率条件下我们可以证明锥 $\mathcal{P}_p^r$ 在 Hodge Laplace 热方程下也是保持的.

定理 1 设 (M^m, g) 为完备的复 m - 维 Kähler 流形, 其曲率算子 Rm 满足 $\mathcal{C}_{rp}$ 条件. 设 $\phi(x, t)$ 为方程 (3.1) 的解且 $\phi(x, 0)$ 为 r - 正 (p, p) 形式. 若 M 为完备非紧流形, 进一步假设 $\phi(x, t)$ 满足假设条件

$$\int_M \|\phi\|(y, 0) \exp(-ar^2(y)) d\mu(y) < \infty \quad (3.4)$$

和

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{B_o(r)} \|\phi\|^2(x, t) \exp(-ar^2(x)) d\mu(x) dt < \infty. \quad (3.5)$$

则对于任意的 $t > 0$, 有 $\phi(x, t)$ 为 r - 正 (p, p) 形式.

定理的证明方法综合了 Hamilton 张量的最大模原理及文献 [9] 中的技巧, 当 M 为完备非紧流形时, 定理的证明还需要借助于下面推广的 Bishop-Goldberg 引理.

引理 2 (Bishop-Goldberg 引理的推广) 设 Kähler 流形 (M^m, g) 的曲率算子满足 $Rm \in \mathcal{C}_2$. 则对于 M 上任意的 (p, q) 形式 ϕ , 有 $\langle \mathcal{KB}(\phi), \bar{\phi} \rangle \leq 0$.

注 1 当 $r = 1$ 时, 详细的证明参见文献 [1, 2]; 当 $r \geq 1$ 时, 证明仿照 $r = 1$ 的情形.

3.3.2 Kähler-Ricci 流

利用文献 [10, 11] 中的技巧, 不难验证若满足 Kähler-Ricci 流方程的 Kähler 流形具有非负的全纯双截曲率, 相应的 Lichnerowicz 热方程 Hermite 对称张量解也满足最大模原理. 综合文献 [2, 11] 中的讨论, 有下面的定理成立.

定理 3 假设 (M^m, g) 为 Kähler-Ricci 流方程的完备解且其曲率算子满足曲率条件 $\mathcal{C}_{rp}$. 令 $\phi(x, t)$ 为 Hodge Laplace 方程 (3.1) 的解且 $\phi(x, 0) \geq_r 0$. 若 M 为非紧流形, 进一步假设其曲率算子有界且解 $\phi(x, t)$ 满足条件 (3.4) 和 (3.5), 则对于任意的 $t > 0$, 有 $\phi(x, t)$ 为 r - 正 (p, p) 形式.

4 (p, p) 形式的 LYH 型 Harnack 估计

4.1 固定 Kähler 流形

Ni^[12] 证明了若半正定 Hermite 对称张量满足 Lichnerowicz Laplace 热方程, 则其满足 LYH 型微分估计. 由 Hermite 对称张量与实 (1,1) 形式之间的对应关系可知, Ni 的结论也适用于 Hodge Laplace 热方程 (1,1) 形式的正解. 在具有 $\mathcal{C}_{rp}$ 曲率条件的 Kähler 流形上, 综合 Hamilton 的张量最大模原理及文献 [12] 中采用的技巧, 可以证明 Hodge Laplace 热方程 r - 正 (p, p) 形式解也满足族 LYH 型的微分 Harnack 估计.

定理 4 设 (M^m, g) 为完备的 Kähler 流形, 其曲率算子满足 $Rm \in \mathcal{C}_{rp}$. 设 (p, p) 形式 $\phi(x, t)$ 为方程 (3.1) 的 r - 正解, 则对于任意的 $t > 0$, 有 $(p-1, p-1)$ 形式 $Q(\phi, V) \geq_r 0$, 这里

$$Q(\phi, V) \doteq \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\bar{\partial}^* \partial^* - \partial^* \bar{\partial}^*)\phi + \frac{1}{\sqrt{-1}}(\bar{\partial}^* \phi)_V - \frac{1}{\sqrt{-1}}(\partial^* \phi)_{\bar{V}} + \phi_{V, \bar{V}} + \frac{\Lambda \phi}{t},$$

其中 $\bar{\partial}^*$ 和 ∂^* 分别为算子 $\bar{\partial}$ 和 ∂ 的伴随算子, Λ 为缩并算子, 且局部上有

$$(\bar{\partial}^* \phi)_V = \sum_{i=1}^m V^i \iota_i(\bar{\partial}^* \phi), \quad (\partial^* \phi)_{\bar{V}} = \sum_{j=1}^m V^{\bar{j}} \iota_{\bar{j}}(\partial^* \phi),$$

ι_i 为算子 $dz^i \wedge (\cdot)$ 的伴随算子,

$$(\phi_{V, \bar{V}})_{I_{p-1}, \bar{J}_{p-1}} = \phi_{V I_{p-1}, \bar{V} \bar{J}_{p-1}}, \quad (\Lambda \phi)_{I_{p-1}, \bar{J}_{p-1}} = g^{i\bar{j}} \phi_{i I_{p-1}, \bar{j} \bar{J}_{p-1}}.$$

而且如果存在 $t > 0$ 使得 $Q = 0$ 成立, 则流形 (M, g) 一定是平坦的.

特别地, 对于闭形式我们有下面的推论.

推论 5 设流形 (M^m, g) 和 (p, p) 形式 ϕ 满足定理 4 中的假设条件且 $d\phi = 0$. 令 $\psi = \Lambda\phi$, 则有

$$\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}(t\psi) + \frac{1}{2}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \partial\partial^*)\psi \geq -\min_V(\partial_V\psi + \bar{\partial}_{\bar{V}}\psi + \phi(V, \bar{V})) \geq_r 0.$$

特别地, 如果 M 为紧流形, 那么

$$\frac{d}{dt} \int_M t\psi \wedge \omega^{m-p+1} \geq 0. \quad (4.1)$$

对于完备非紧流形, 如果我们可以控制在边界上的积分, 那么 (4.1) 也成立.

4.2 曲率算子的 LYH 型 Harnack 估计

4.2.1 $\mathcal{C}_p$ 条件下曲率算子满足的 LYH 型 Harnack 估计

对于一族具有非负全纯双截曲率的 Kähler-Ricci 流方程的解, Ni 和 Tam^[10] 借助于 Kähler-Ricci 流下曲率算子满足的矩阵 Harnack 估计^[13], 证明了 Hodge Laplace 热方程正 $(1, 1)$ 形式解满足一族 LYH 型的微分 Harnack 估计. 事实上, 利用张量的最大模原理, 我们可以证明在曲率条件 $\mathcal{C}_k$ 下曲率算子也满足一族微分 Harnack 估计, 此估计介于 Cao^[13] 和 Hamilton^[6] 得到的矩阵 Harnack 估计.

定理 6 设 $(M^m, g(t))$ 为 Kähler-Ricci 流方程 $\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = -R_{i\bar{j}}$ 的完备解且曲率算子 $\text{Rm}(t)$ 在 $M \times [0, T]$ 上满足条件 $\mathcal{C}_k$. 当 M 为非紧流形时, 进一步假设 $(M, g(t))$ 的曲率张量在 $M \times [0, T]$ 上一致有界. 则对于任意的 $(1, 1)$ 型向量 $U = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{X}_i \wedge \bar{\mathbf{Y}}_i + \mathbf{W} \wedge \bar{\mathbf{V}}$, 其中 $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{W}, \mathbf{V}$ 均为 $(1, 0)$ 型的向量, Hermite 双线性形式

$$\mathcal{Q}(U \oplus \mathbf{W}) \doteq \mathcal{M}_{\alpha\bar{\beta}} W^\alpha W^{\bar{\beta}} + P_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \bar{U}^{\bar{\beta}\gamma} W^\alpha + P_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} U^{\alpha\bar{\gamma}} W^{\bar{\beta}} + R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} U^{\alpha\bar{\beta}} \bar{U}^{\bar{\delta}\gamma}$$

满足下面结论: 对于任意的 $t > 0$ 有 $\mathcal{Q} \geq 0$. 再者, 如果存在某一时刻 $t > 0$ 使得上面的等号成立, 则 $(M, g(t))$ 的万有覆盖空间为扩张的梯度 Kähler-Ricci 孤立子, 这里张量 $\mathcal{M}$ 和 P 分别为

$$\mathcal{M}_{\alpha\bar{\beta}} = \Delta R_{\alpha\bar{\beta}} + R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} R_{\delta\bar{\gamma}} + \frac{R_{\alpha\bar{\beta}}}{t}, \quad P_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = \nabla_\gamma R_{\alpha\bar{\beta}}, \quad P_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \nabla_{\bar{\gamma}} R_{\alpha\bar{\beta}}.$$

4.2.2 $\tilde{\mathcal{C}}_p$ 条件下曲率算子满足的 LYH 型 Harnack 估计

对于 Riemann 流形 (M^n, g) , 在文献 [2] 中我们定义了一族新的曲率锥 $\tilde{\mathcal{C}}_k$. 如果对于任意点 $x \in M$, 任意的非零 2 向量 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \mathbf{Z}_i \wedge \mathbf{W}_i \in \wedge^2(T_x M \otimes \mathbb{C})$, 其中 $\mathbf{Z}_i, \mathbf{W}_i \in T_x M \otimes \mathbb{C}$, 都有

$$\langle \text{Rm}(\mathbf{v}), \bar{\mathbf{v}} \rangle > 0,$$

则称流形 (M^n, g) 具有 k 正的复截曲率.

显然, 流形具有 1 正复截曲率的充分必要条件是它具有正的复截曲率. 事实上在 Sampson^[14] 早期关于调和映射的工作中就已经引入了复截曲率的概念. 当 $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ 时, 流形具有 k 正复截曲率等

价于其具有正的曲率算子. 记 $\tilde{\mathcal{C}}_k$ 为由所有 k 非负复截曲率算子构成的集合. 容易验证 $\tilde{\mathcal{C}}_k$ 为代数曲率算子空间 $S_B^2(\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}))$ 的一个闭凸锥. 对于 Kähler 流形, 容易验证, $\tilde{\mathcal{C}}_p = \mathcal{C}_{2p}$.

利用 Wilking^[8] 的结论不难验证曲率锥 $\tilde{\mathcal{C}}_p$ 在 Ricci 流下保持不变. 与 $\mathcal{C}_p$ 条件下的结论类似, 我们也证明了在曲率条件 $\tilde{\mathcal{C}}_p$ 下曲率算子满足的微分 Harnack 估计, 其介于 Brendle^[15] 和 Hamilton^[6] 得到的微分 Harnack 估计.

定理 7 设 $(M^n, g(t)), t \in [0, T]$ 为 Ricci 流方程的完备解且曲率算子 $\text{Rm}(t)$ 满足条件 $\tilde{\mathcal{C}}_p$. 如果 M 为非紧的, 进一步假设 $(M, g(t))$ 的曲率张量在 $M \times [0, T]$ 上一致有界. 则对于任意点 $(x, t) \in M \times (0, T]$, 向量 $\mathbf{W}, \mathbf{W}_\mu \in T_x M \otimes \mathbb{C}$ ($\mu = 1, \dots, p-1$) 及任意的 2 向量 $\mathbf{U} = \sum_{\mu=1}^p \mathbf{W}_\mu \wedge \mathbf{Z}_\mu \in \wedge^2(T_x M \otimes \mathbb{C})$, 其中 $\mathbf{W}_p = \mathbf{W}$, 有 $\tilde{Q} \geq 0$, 其中

$$\tilde{Q}(\mathbf{W} \oplus \mathbf{U}) \doteq \langle \mathcal{M}(\mathbf{W}), \overline{\mathbf{W}} \rangle + 2\text{Re}(\langle P(\mathbf{W}), \overline{\mathbf{U}} \rangle) + \langle \text{Rm}(\mathbf{U}), \overline{\mathbf{U}} \rangle.$$

这里我们采用与前面相同的张量记号 $\mathcal{M}$ 和 P . 在局部标准正交标架场下, 他们分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij} &\doteq \Delta R_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j R + 2R_{ikjl} R_{kl} - R_{ik} R_{kj} + \frac{1}{2t} R_{ij}, \\ P_{ijk} &\doteq \nabla_i R_{kj} - \nabla_j R_{ik}. \end{aligned}$$

再者, 如果存在某时刻 $t > 0$ 使得上面等号成立, 那么流形 $(M, g(t))$ 的万有覆盖空间为扩张的梯度孤立子.

注 2 事实上, Wilking^[8] 证明了更为一般的曲率锥在 Kähler-Ricci 流和 Ricci 流下保持且在此曲率条件下, 曲率算子也满足一族微分 Harnack 估计. 在我们的论文完成时尚不知道 Wilking 的结论, 且相较而言, 我们的证明只是利用张量的最大模原理, 证明过程更为直接和明确.

4.3 Hodge Laplace 热方程解的 LYH 型 Harnack 估计

综合利用曲率算子满足的矩阵 Harnack 估计及固定 Kähler 流形上的技巧, 有下面定理.

定理 8 设 $(M^m, g(t)), t \in [0, T]$ 为 Kähler-Ricci 流方程的完备解且其曲率算子 $\text{Rm}(t)$ 满足 $\mathcal{C}_{rp}$ 条件. 若 M 为非紧流形, 进一步假设流形 $(M^m, g(0))$ 的曲率算子一致有界. 令 (p, p) 形式 $\phi(x, t)$ 为方程 (3.1) 的 r -正解, 则当 $t > 0$ 时, 对于任意的 $(1, 0)$ 型切向量场 V , 我们有 $\tilde{Q} \geq_r 0$, 其中

$$\tilde{Q} = Q + \text{Ric}(\phi).$$

这里 Q 为第 4.1 节中定义的 LYH 量, 是关于 V 的 $(p-1, p-1)$ 形式. $\text{Ric}(\phi)$ 也为 $(p-1, p-1)$ 形式, 局部定义为

$$\text{Ric}(\phi)_{I_{p-1}, \bar{J}_{p-1}} \doteq g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} R_{i\bar{j}} \phi_{k I_{p-1}, \bar{l} \bar{J}_{p-1}}.$$

4.4 插值估计

与文献 [12, 16] 中的讨论类似, 在定理 4 和 8 中也存在一族插值估计. 对于任意的 $\delta > 0$, 若 $(M^m, g(t))$ 为 δ -Kähler-Ricci 流 $\frac{\partial}{\partial t} g_{\alpha\bar{\beta}} = -\delta R_{\alpha\bar{\beta}}$ 的完备解, 令 $\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}}(x, t) = \delta g_{\alpha\bar{\beta}}$. 不难验证, $\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}}$ 为 Kähler-Ricci 流方程的解且 $\tilde{R}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = \delta R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$. 因此由 Wilking 结论可知, 曲率锥 $\mathcal{C}_k$ 在 δ -Kähler-Ricci 流下保持不变.

定理 9 对于任意给定的 $\delta > 0$, 设 $(M^m, g(t))$ 为 δ -Kähler-Ricci 流的完备解且曲率算子满足 $\text{Rm} \in \mathcal{C}_{rp}$. 若 M 为非紧流形, 进一步假设流形 $(M^m, g(t))$ 的曲率算子一致有界. 令 (p, p) 形式 $\phi(x, t)$ 为方程 (3.1) 的 r -正解, 则当 $t > 0$ 时, 对于任意的 $(1, 0)$ 型切向量场 V , 有 $\tilde{Q}_\delta \geq_r 0$, 其中

$$\tilde{Q}_\delta = Q + \delta \text{Ric}(\phi).$$

参考文献

- 1 Niu Y Y. Maximum principles for real (p, p) -forms on Kähler manifolds. *Geom Dedicata*, 2010, 149: 363–371
- 2 Ni L, Niu Y Y. Sharp differential estimate of Li-Yau-Hamilton type for positive (p, p) -forms on Kähler manifolds. *Comm Pure Appl Math*, 2011, 64: 920–974
- 3 Moser J. A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Comm Pure Appl Math*, 1964, 17: 101–134
- 4 Li P, Yau S T. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math*, 1986, 156: 153–201
- 5 Hamilton R. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J Differential Geom*, 1982, 17: 255–306
- 6 Hamilton R. The Harnack estimate for the Ricci flow. *J Differential Geom*, 1993, 37: 225–243
- 7 Morrow J, Kodaira K. *Complex Manifolds*. New York: Holt Rinehart and Winston Inc, 1971
- 8 Wilking B. A Lie algebraic approach to the Ricci flow invariant curvature conditions and Harnack inequalities. *ArXiv:1011.3561v1*, 2010
- 9 Ni L, Tam L F. Plurisubharmonic functions and the structure of complete Kähler manifolds with nonnegative curvature. *J Differential Geom*, 2003, 64: 457–524
- 10 Ni L, Tam L F. Plurisubharmonic functions and the Kähler-Ricci flow. *Amer J Math*, 2003, 125: 623–654
- 11 Ni L. Ricci flow and nonnegativity of sectional curvature. *Math Res Lett*, 2004, 11: 883–904
- 12 Ni L. A monotonicity formula on complete Kähler manifolds with nonnegative bisectional curvature. *J Amer Math Soc*, 2004, 17: 909–946
- 13 Cao H D. On Harnack's inequalities for the Kähler-Ricci flow. *Invent Math*, 1992, 109: 247–263
- 14 Sampson J H. Harmonic maps in Kähler geometry. In: *Lecture Notes in Math*, vol. 1161. Berlin: Springer, 1985, 193–205
- 15 Brendle S. A generalization of Hamilton's differential Harnack inequality for the Ricci flow. *ArXiv: 0707.2192v2*, 2007
- 16 Ni L. A matrix Li-Yau-Hamilton estimate for Kähler-Ricci flow. *J Differential Geom*, 2007, 75: 303–358

Differential Harnack estimates on manifolds

NIU YanYan

Abstract In the thesis, we study the differential Harnack estimate for the heat equation of the Hodge Laplacian deformation of (p, p) -forms on both fixed and evolving (by Kähler-Ricci flow) Kähler manifolds, which generalize the known differential Harnack estimates for $(1, 1)$ -forms. On a Kähler manifold, we define a new curvature cone $\mathcal{C}_p$ and prove that the cone is invariant under Kähler-Ricci flow and that the cone ensures the preservation of the nonnegativity of the solutions to Hodge Laplacian heat equation. After identifying the curvature conditions, we prove the sharp differential Harnack estimates for the positive solution to the Hodge Laplacian heat equation. We also prove a nonlinear version coupled with the Kähler-Ricci flow after obtaining some interpolating matrix differential Harnack type estimates for curvature operators between Hamilton's and Cao's matrix Harnack estimates. Similarly, we define another new curvature cone $\tilde{\mathcal{C}}_p$, which is invariant under Ricci flow, and prove another interpolating matrix differential Harnack estimates for curvature operators on Riemannian manifolds.

Keywords Hodge Laplacian heat equation, curvature cone, maximum principle, Harnack estimate

MSC(2010) 58J35

doi: 10.1360/012013-95