中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 8 期: 887～918
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

正实轴上的 Riemann 边值问题

王莹[1], 段萍[2], 杜金元[3*]

1. 中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉 430073;
2. 河南科技大学数学与统计学院, 洛阳 471023;
3. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: wangyingyezi@sina.com, whuduanping@163.com, jydu@whu.edu.cn

收稿日期: 2016-08-05; 接受日期: 2016-12-31; 网络出版日期: 2017-02-27; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171260 和 11326087)、教育部博士点专项基金 (批准号: 20100141110054) 和中央高校基本科研业务费专项基金 (批准号: 31541411204) 资助项目

摘要 本文研究正实轴上的 Riemann 边值问题. 首先, 引入沿正实轴剖开的复平面上的全纯函数在无穷远点和原点处主部及阶的概念, 相比于经典意义下, 这个概念更为广泛. 其次, 讨论了正实轴上 Cauchy 型积分和 Cauchy 主值积分在无穷远点和原点处的性质. 基于此, 以正实轴为跳跃曲线的分区全纯函数的 Riemann 边值问题得以详细解决. 这个过程有别于经典意义下有限曲线上的 Riemann 边值问题, 且比整个实轴上的 Riemann 边值问题更为复杂. 最后, 作为例子讨论了一类矩阵值函数的边值问题, 该问题对于正实轴上正交多项式的渐近分析有重要意义.

关键词 主部 阶 Cauchy 型积分 Riemann 边值问题 矩阵值函数

MSC (2010) 主题分类 30E25, 45E05

1 引言

众所周知, 专著 [1–3] 对解析函数边值理论做了系统的研究. 此后, 有些学者对于给定曲线做了各种拓广, 讨论了在一些比光滑曲线更为广泛曲线上的解析函数边值问题[4–10]. 近些年来, 解析函数边值理论又被推广至更为广泛函数类的各种边值问题, 如 Clifford 分析中的正则函数[11–18]、多解析函数[19–26]、亚解析函数[27–32] 以及其他 (如文献 [33]) 等. 在所有边值问题中, Riemann 边值问题是最基本的边值问题. 其他很多边值问题可以通过转化为 Riemann 边值问题来解决.

文献 [1–3] 详细讨论了有限曲线上解析函数的 Riemann 边值问题. 尽管无穷曲线上 Riemann 边值问题也十分重要, 例如, 在正交多项式的 Riemann-Hilbert 分析中有重要应用 (参见文献 [34–41]), 但除了一些特殊的情形外, 到目前为止关于这方面的研究不多也不够完善. 限定解在无穷远点处有界的前提下, 文献 [2] 讨论了实轴上的 Riemann 边值问题. 但无穷曲线上带无穷远点一般增长性条件的 Riemann 问题的求解仍是一个开问题. 这主要是由于以无穷曲线 (包括实轴在内) 为跳跃曲线的分区全纯函数在无穷远点处的主部及阶并没有给出适当的定义.

英文引用格式: Wang Y, Duan P, Du J Y. Riemann boundary value problems on the positive real axis (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 887–918, doi: 10.1360/N012016-00146

本文将深入讨论以正实轴为跳跃曲线分区全纯函数的 Riemann 边值问题. 这个过程相对于研究有限曲线上 (封闭和开口) 甚至整个实轴上的 Riemann 边值问题更为困难, 这是源于分区全纯函数无穷远点和原点处的行为更难以处理. 第 2 节将首先引入正实轴上的一些函数类. 第 3 节提出沿正实轴剖开的复平面上的全纯函数在无穷远点和原点主部及阶的定义. 这是一个富有创新性的技术, 因为对于沿正实轴剖开的复平面上的全纯函数来说, 无穷远点和原点一般并不是孤立奇点, 因而没有传统意义下的主部及阶的定义. 接着, 我们讨论了正实轴上 Cauchy 型积分在无穷远点和原点处的性质, 这个过程相当困难, 其原因就在于无穷远点和原点均不是孤立奇点. 第 4 节讨论了正实轴上 Cauchy 主值积分在无穷远点和原点处的奇性或 Hölder 连续性, 这推广和深化了文献 [1–3] 中关于有限开口曲线上 Cauchy 主值积分的相关结果, 同时也为下节全面探讨 Riemann 边值问题提供了有力的工具. 第 5 节给出了以正实轴为跳跃曲线的分区全纯函数在无穷远具有限阶的 Riemann 边值问题的合理提法, 并且详细给出了其解和可解条件的封闭形式. 尽管结论与经典意义下有限曲线的相关结论形式上相似, 但数学本质却有着很大的差异. 一些学者误认为这些结论只是经典理论的简单推论, 从而直接应用了这些结论. 事实上, 求解以正实轴为跳跃曲线的分区全纯函数的 Riemann 边值问题比经典以有限曲线作为跳跃曲线的相应边值问题困难, 不能完全直接移植后两者的方法和结论. 最后, 第 6 节讨论了一类矩阵值函数的边值问题, 该问题对于正实轴上正交多项式的渐近分析有着重要意义. 限于篇幅，我们将在后续文章中给出以正实轴为跳跃曲线分区全纯函数的 Riemann 边值问题在带变动大负参数的 Bessel 多项式渐近分析中的应用.

2 正实轴上的一些函数类

定义 2.1 [2] 设 f 定义在区间 I (开或闭, 有限或无限) 上. 若对区间 I 上任意两点 t' 和 t'' 成立

$$|f(t')-f(t'')| \leqslant M|t'-t''|^{\mu}, \quad 0<\mu\leqslant 1, \tag{2.1}$$

其中 M 和 μ 是确定的常数, 则称 f 在 I 上满足 μ 阶的 Hölder 条件, 记为 $f\in H^{\mu}(I)$, 其中 μ 称为 Hölder 指数, 若不强调指出指数 μ, 也可简记为 $f\in H(L)$.

定义 2.2 [2] 设 f 定义在区间 $[\Delta,+\infty)$ 上, 其中 $\Delta>0$. 若对区间 $[\Delta,+\infty)$ 上任意点 t' 和 t'' 成立

$$|f(t')-f(t'')| \leqslant M\left|\frac{1}{t'}-\frac{1}{t''}\right|^{\mu}, \quad 0<\mu\leqslant 1, \tag{2.2}$$

其中 M 和 μ 是确定的常数, 则称 f 在 $+\infty$ 附近满足 μ 阶的 $\widehat{H}$ 条件, 记为 $f\in\widehat{H}^{\mu}(+\infty)$ 或者也简记为 $f\in\widehat{H}(+\infty)$.

定义 2.3 若 $f\in H^{\mu}[\delta,\Delta]$ 对每一个内闭区间 $[\delta,\Delta]\subset(0,+\infty)$ 成立, 则记为 $f\in H_c^{\mu}(0,+\infty)$ 或简记为 $f\in H_c(0,+\infty)$. 若存在某个 $\delta>0$ 使得 $f\in H^{\mu}(0,\delta]$, 则记为 $f\in H^{\mu}(0)$ 或简记为 $f\in H(0)$.

注 2.1 若 $f\in H^{\mu}(0)$, 即 $f\in H^{\mu}(0,\delta]$, 则对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\eta>0$ 使得

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant M|x_1-x_2|^{\mu}<\epsilon, \quad 0<x_1<x_2<\eta<\delta, \tag{2.3}$$

其中 M 是常数. (2.3) 表明 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=:f(0)$ 存在, 并且 $f\in H^{\mu}[0,\delta]$. 鉴于此, 我们在后文中又记 $f\in H^{\mu}(0,+\infty)$ 为 $f\in H^{\mu}[0,+\infty)$ 或简记为 $f\in H[0,+\infty)$.

注 2.2 若 $f\in\widehat{H}^{\mu}(+\infty)$, 即对某一 $\Delta>0$, (2.2) 成立, 则对于任意 $\epsilon>0$, 存在 $\Lambda>0$, 使得

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant M\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|^{\mu}<\epsilon, \quad \Delta<\Lambda<x_1<x_2<+\infty, \tag{2.4}$$

其中 M 是常数. (2.4) 表明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) =: f(+\infty)$ 存在. 若 $f \in \widehat{H}^{\mu}(+\infty)$ 且 $f(+\infty)=0$, 我们记为 $f \in \widehat{H}_0^{\mu}(+\infty)$ 或简记为 $f \in \widehat{H}_0(+\infty)$.

假设 f 是定义在 $x=+\infty$ 附近的实变量函数. 若存在实数 ν 和有界函数 f^*, 使得

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{x^{\nu}}, \tag{2.5}$$

或等价地,

$$f(x) = O(x^{-\nu}), \quad x \to +\infty, \tag{2.6}$$

我们将其记为 $f \in O^{\nu}(+\infty)$.

假设 f 是定义在 $(0,\delta)$ 上的实变量函数. 若存在实数 α 和有界函数 f^*, 使得

$$\text{在 } x=0^+ \text{ 附近}, \quad f(x) = \frac{f^*(x)}{x^{\alpha}}, \tag{2.7}$$

或等价地,

$$f(x) = O(x^{-\alpha}), \quad x \to 0^+, \tag{2.8}$$

我们将其记为 $f \in O^{\alpha}(0)$.

注 2.3　显然, 当 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ 时, $O^{\alpha_1}(0) \subseteq O^{\alpha_2}(0)$; 当 $\nu_1 \leqslant \nu_2$ 时, $O^{\nu_2}(+\infty) \subseteq O^{\nu_1}(+\infty)$. 因此, 在实际应用中总可认为在 (2.5) 中 $\nu \leqslant 0$, 在 (2.7) 中 $\alpha \geqslant 0$.

设 $f_m(\tau) = \tau^m f(\tau)$. 若 $f_m \in \widehat{H}^{\mu}(+\infty)$, $f_m \in \widehat{H}_0^{\mu}(+\infty)$, 则我们分别将其记为 $f \in \widehat{H}_m^{\mu}(+\infty)$ 和 $f \in \widehat{H}_{m,0}^{\mu}(+\infty)$, 或简记为 $f \in \widehat{H}_m(+\infty)$ 和 $f \in \widehat{H}_{m,0}(+\infty)$. 显然,

$$\widehat{H}_m^{\mu}(+\infty) \subseteq \widehat{H}_{m-1}^{\mu}(+\infty), \quad \widehat{H}_{m,0}^{\mu}(+\infty) \subseteq O^{m+\mu}(+\infty). \tag{2.9}$$

类似地, 若在 (2.7) 中 $f^* \in H^{\mu}(0)$, 我们将记 $f \in H_{\alpha}^*(0)$. 此外, 我们还定义 (参见文献 [2,3])

$$H^*(0) = \bigcup_{0\leqslant\alpha<1} H_{\alpha}^*(0). \tag{2.10}$$

有时, 我们也需要考虑如下类型的函数:

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{x^{\lambda}}, \quad \text{其中 } f^* \in H^{\mu}(0), \tag{2.11}$$

这里 λ 是一个复数, 且

$$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{2.12}$$

在以下的一些例子中, 我们将讨论 $(0,+\infty)$ 上一些在工程应用中十分重要的权函数所在的类, 它们在后文中都将被用到.

例 2.1　设

$$w_{r,n}(x) = x^r \mathrm{e}^{-\frac{2n}{x}}, \quad x \in (0,+\infty), \tag{2.13}$$

其中 r 是实数, n 是正数. $w_{r,n}$ 在原点处呈指数衰减. 显然, 由于

$$w_{r,n}(x) \sim x^r, \quad x \to +\infty, \quad \lim_{x\to0^+} x^m w_{r,n}(x) = 0, \quad m \text{ 为任意实数}, \tag{2.14}$$

故对于任意实数 m, 有

$$w_{r,n} \in O^m(0) \cap O^{-r}(+\infty). \tag{2.15}$$

此外, 我们分成如下两种情形详细地指出它的 Hölder 连续性.

情形 1 若 $r\leqslant 1$, 则 $w_{r,n}\in H^1[0,+\infty)$. 事实上,

$$w'_{r,n}(x)=\left[r+\frac{2n}{x}\right]x^{r-1}\mathrm{e}^{-\frac{2n}{x}},\quad x>0, \tag{2.16}$$

从而,

$$w'_{r,n}(0)=0,\quad w'_{r,n}(+\infty)=\begin{cases}1, & r=1,\\ 0, & r<1,\end{cases} \tag{2.17}$$

因此 $w'_{r,n}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界. 记

$$M_{r,n}=\sup\{|w'_{r,n}(x)|,x\in(0,+\infty)\}, \tag{2.18}$$

则

$$|w_{r,n}(\tau)-w_{r,n}(x)|\leqslant M_{r,n}|\tau-x|,\quad \tau,x\in[0,+\infty). \tag{2.19}$$

情形 2 若 $r\leqslant 0$, 则 $w_{r,n}\in\widehat{H}(+\infty)$. 事实上, 可分为以下三种情形讨论.

若 $r=0$, 则由

$$|[\mathrm{e}^{-2ny}]'|\leqslant 2n,\quad y\in[0,+\infty), \tag{2.20}$$

可得

$$|w_{0,n}(\tau)-w_{0,n}(x)|=|\mathrm{e}^{-\frac{2n}{\tau}}-\mathrm{e}^{-\frac{2n}{x}}|\leqslant 2n\left|\frac{1}{\tau}-\frac{1}{x}\right|,\quad \tau,x\in(0+\infty). \tag{2.21}$$

若 $-1\leqslant r<0$, 则

$$\begin{aligned}&|w_{r,n}(\tau)-w_{r,n}(x)|\quad(\tau,x\geqslant\Delta)\\ &\quad\leqslant|[\tau^{-1}]^{-r}-[x^{-1}]^{-r}|+\Delta^r|\mathrm{e}^{-\frac{2n}{\tau}}-\mathrm{e}^{-\frac{2n}{x}}|\\ &\quad\leqslant\left|\frac{1}{\tau}-\frac{1}{x}\right|^{-r}+2n\Delta^r\left|\frac{1}{\tau}-\frac{1}{x}\right|\quad(\text{由 (2.21) 可知})\\ &\quad\leqslant\left[1+\frac{4n}{\Delta}\right]\left|\frac{1}{\tau}-\frac{1}{x}\right|^{-r}\quad(0<-r\leqslant 1).\end{aligned} \tag{2.22}$$

若 $r<-1$, 则由

$$|[y^{-r}\mathrm{e}^{-2ny}]'|\leqslant(2n-r\Delta)\Delta^r,\quad y\in(0,\Delta^{-1}], \tag{2.23}$$

可知

$$|w_{r,n}(\tau)-w_{r,n}(x)|\leqslant[(2n-r\Delta)\Delta^r]\left|\frac{1}{\tau}-\frac{1}{x}\right|,\quad \tau,x\in[\Delta,+\infty). \tag{2.24}$$

例 2.2 设

$$v_{m,s}(x)=x^m\mathrm{e}^{-x^s},\quad x\in(0,+\infty), \tag{2.25}$$

其中 m 是实数, s 是正数. $v_{m,s}$ 在无穷远点处呈指数衰减. 显然, 由于

$$v_{m,s}(x)\sim x^m(x\to 0^+),\quad \lim_{x\to+\infty}x^\nu v_{m,s}(x)=0,\quad \nu\text{ 为任意实数}, \tag{2.26}$$

故对于任意实数 ν, 有

$$v_{m,s}\in O^{-m}(0)\cap O^\nu(+\infty). \tag{2.27}$$

进一步, 关于它的 Hölder 连续性质可以分成以下两种情形.

情形 1 若 $m \geqslant 0$, 则 $v_{m,s} \in H(0)$. 在此情形, $x^m \in H(0)$, $x^s \in H(0)$, $\mathrm{e}^\tau \in H(0)$, 从而 $v_{m,s} \in H(0)$.

情形 2 对于任意实数 m, 我们有 $v_{m,s} \in H^*_{-m}(0) \cap H_c(0,+\infty) \cap \widehat{H}^1(+\infty)$. 事实上, 由情形 1 可知,

$$x^{-m} v_{m,s}(x) = v_{0,s}(x) \in H(0), \quad \text{从而 } v_{m,s} \in H^*_{-m}(0). \tag{2.28}$$

由于

$$\lim_{y\to 0^+} [y^{-m}\mathrm{e}^{-y^{-s}}]' = \lim_{y\to 0^+} y^{-m-1}\mathrm{e}^{-y^{-s}}[-m + sy^{-s}] = 0, \tag{2.29}$$

故

$$\widehat{N}_{m,s} = \max\{|[y^{-m}\mathrm{e}^{-y^{-s}}]'|, y \in (0, \Delta^{-1}]\} \tag{2.30}$$

存在, 从而,

$$|v_{m,s}(\tau) - v_{m,s}(x)| \leqslant \widehat{N}_{m,s}\left|\frac{1}{\tau} - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{2\widehat{N}_{m,s}}{\Delta^{1+\mu}}|\tau - x|^\mu, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \quad \tau, x \in [\Delta, +\infty). \tag{2.31}$$

(2.31) 表明, 对任意 $0 < \mu \leqslant 1$,

$$v_{m,s} \in \widehat{H}^1(+\infty), \quad v_{m,s} \in H^\mu[\Delta, +\infty). \tag{2.32}$$

特别地, 由 (2.32) 中第二结论和情形 1 中 $v_{m,s} \in H(0)$ 可得

$$\text{当 } m \geqslant 0 \text{ 时}, \quad v_{m,s} \in H(0, +\infty). \tag{2.33}$$

例 2.3 设

$$R_{n,s}(x) = \mathrm{e}^{-(\frac{n}{x} + x^s)}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{2.34}$$

其中 $n > 0$, $s > 0$. $R_{n,s}$ 在原点和无穷远点处均呈指数衰减. 显然, 由

$$\lim_{x\to+\infty} x^\nu R_{n,s}(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^m R_{n,s}(x) = 0 \tag{2.35}$$

可知, 对于任意实数 m 和 ν, 有 $R_{n,s} \in O^m(0) \cap O^\nu(+\infty)$. 此外, 对于任意实数 m, 也有

$$R_{n,s} \in H^1[0, +\infty) \cap \widehat{H}_{m,0}(+\infty). \tag{2.36}$$

事实上,

$$R'_{n,s}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{n}{x} - x^s}\left[\frac{n}{x^2} - sx^{s-1}\right], \quad x > 0, \tag{2.37}$$

从而,

$$R'_{n,s}(0) = 0, \quad R'_{n,s}(+\infty) = 0. \tag{2.38}$$

因此 $R'_{n,s}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界. 记

$$D_{n,s} = \max\{|R'_{n,s}(x)|, x \in (0, +\infty)\}, \tag{2.39}$$

则

$$|R_{n,s}(\tau) - R_{n,s}(x)| \leqslant D_{n,s}|\tau - x|, \quad \tau, x \in [0, +\infty). \tag{2.40}$$

由于

$$\lim_{y\to 0^+}[y^{-m}\mathrm{e}^{-ny-y^{-s}}]'=\lim_{y\to 0^+}y^{-m}\mathrm{e}^{-ny-y^{-s}}[-n+sy^{-s-1}-my^{-1}]=0, \tag{2.41}$$

故存在

$$\widehat{D}_{n,s}=\max\{|[y^{-m}\mathrm{e}^{-ny-y^{-s}}]'|,y\in(0,\Delta^{-1}]\}, \tag{2.42}$$

使得

$$|\tau^m R_{n,s}(\tau)-x^m R_{n,s}(x)|\leqslant \widehat{D}_{n,s}\left|\frac{1}{\tau}-\frac{1}{x}\right|,\quad \tau,x\in[\Delta,+\infty), \tag{2.43}$$

此式和 (2.35) 表明

$$R_{n,s}\in\widehat{H}_{m,0}(+\infty). \tag{2.44}$$

3 正实轴上跳跃的分区全纯函数

为了适当地提出正实轴上的 Riemann 边值问题, 我们必须引入以正实轴为跳跃曲线的分区全纯函数以及其在正实轴的两端点 0 和 $+\infty$ 处的 (广义) 主部. 前者是经典的以光滑 (开口或封闭) 曲线为跳跃曲线的分区全纯函数的自然推广 (参见文献 [1–3]), 后者则是解析函数在孤立奇点处的主部概念的一种技术性拓展 (参见文献 [42]).

若 Ω 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开集, 函数 F 在 Ω 上全纯, 则记为 $F\in\mathbf{A}(\Omega)$. 特别地, 若 F 在沿正实轴剖开的复平面上全纯, 则记为 $F\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$. 作为一类重要的例子, 我们引入正实轴上的 Cauchy 型积分, 它同时也是后文求解正实轴上 Riemann 边值问题的重要工具, 因此, 本节还将详细讨论它的一些性质.

定义 3.1 设 f 定义在 $(0,+\infty)$ 上, 且在任意有限区间 $[\delta,\Delta]\subset(0,+\infty)$ 上可积, 我们称

$$(C[f])(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty) \tag{3.1}$$

为正实轴上带核密度 f 的 Cauchy 型积分或简称为 Cauchy 型积分. 此处, (3.1) 右边的积分是广义积分, 即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=\lim_{\delta\to 0^+,\Delta\to+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\delta^{\Delta}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{3.2}$$

注 3.1 显然, 取任意正实数 b, Cauchy 型积分可以看作下面两个分别以 0 和 $+\infty$ 为瑕点的 (广义) 积分

$$(C_{[0,b]}[f])(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{b}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,b] \tag{3.3}$$

和

$$(C_{[b,+\infty)}[f])(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_b^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[b,+\infty) \tag{3.4}$$

的和, 即

$$(C[f])(z)=(C_{[0,b]}[f])(z)+(C_{[b,+\infty)}[f])(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty). \tag{3.5}$$

引理 3.1 (Cauchy 型积分的解析性) 若 $f\in O^{\alpha}(0)\cap O^{\nu}(+\infty)$ ($\alpha<1$, $\nu>0$), 且 f 在任意有限闭区间 $[\delta,\Delta]\subset(0,+\infty)$ 上可积, 则

$$C[f]\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)). \tag{3.6}$$

证明 显然, 在给定条件下 $C[f]$ 有意义. 设

$$d(w)=\begin{cases}|w|, & \operatorname{Re}(w)\leqslant 0,\\ |\operatorname{Im}(w)|, & \operatorname{Re}(w)>0,\end{cases}\tag{3.7}$$

那么,

$$\left|\frac{(C[f])(w)-(C[f])(z)}{w-z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau\right|\leqslant\frac{|w-z|}{2\pi d(w)}\int_0^{+\infty}\left|\frac{f(\tau)}{(\tau-z)^2}\right|d\tau,\tag{3.8}$$

从而,

$$(C[f])'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{3.9}$$

这表明 $C[f]\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$. □

推论 3.1 若 $f\in O^{\nu}(+\infty)$ $(\nu>0)$ 且 f 在 $(0,+\infty)$ 的任意有限闭区间上可积, 则

$$C_{[b,+\infty)}[f]\in A(\mathbb{C}\setminus[b,+\infty)).\tag{3.10}$$

证明 令

$$f^{\#}(\tau)=f(\tau+b),\quad \tau\in(0,+\infty),\tag{3.11}$$

则 $f^{\#}\in O^{\alpha}(0)\cap O^{\nu}(+\infty)$ $(\alpha=0,\,\nu>0)$, 从而,

$$(C_{[b,+\infty)}[f])(z)=(C[f^{\#}])(z-b),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[b,+\infty).\tag{3.12}$$

再由引理 3.1 得到 (3.10). □

定义 3.2 设 $F\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$. 若存在一个整函数 $E(z)$, 使得

$$\lim_{z\to\infty}[F(z)-E(z)]=0,\tag{3.13}$$

则称 $E(z)$ 为 F 在 $z=\infty$ 处的 (广义) 主部, 记为 $\mathrm{G.P}[F,\infty](z)$.

定义 3.3 设 $F\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$. 若存在一个整函数 $E(z)$, 使得

$$\lim_{z\to 0}[F(z)-E(z^{-1})]=0,\tag{3.14}$$

则称 $E(z^{-1})$ 为 F 在 $z=0$ 处的 (广义) 主部, 记为 $\mathrm{G.P}[F,0](z)$.

注 3.2 若 F 有孤立奇点 $z=\infty$, 则它在 ∞ 附近有 Laurent 级数展开

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kz^k,\tag{3.15}$$

记其主部为

$$\mathrm{P.P}[F,\infty](z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k,\quad z\in\mathbb{C},\tag{3.16}$$

这是经典意义下 (带常数项 a_0) 的主部. 我们可以证明

$$\mathrm{G.P}[F,\infty]=\mathrm{P.P}[F,\infty].\tag{3.17}$$

事实上, 由 (3.13)、(3.15) 和 (3.16), 有

$$\lim_{z\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty),z\to\infty}[\mathrm{P.P}[F,\infty](z)-\mathrm{G.P}[F,\infty](z)]=0. \tag{3.18}$$

注意到 P.P$[F,\infty]$ 和 G.P$[F,\infty]$ 均是整函数, 我们可知 (3.18) 等价于

$$\lim_{z\in\mathbb{C},z\to\infty}[\mathrm{P.P}[F,\infty](z)-\mathrm{G.P}[F,\infty](z)]=0, \tag{3.19}$$

因此可得 (3.17).

注 3.3 一般来讲, $z=\infty$ 可能不是 F 的孤立奇点, 因此它没有 P.P(F,∞), 例如,

$$F(z)=\frac{\ln(-z)}{z^m},\quad m=1,2,\ldots, \tag{3.20}$$

其中, 对数函数 $\ln w$ 取沿 $(-\infty,0]$ 剖开的复平面上的主支, 即

$$\ln w=\ln|w|+\mathrm{i}\arg(w),\quad -\pi<\arg(w)<\pi,\quad w\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]. \tag{3.21}$$

但是

$$\mathrm{G.P}[F,\infty](z)=0. \tag{3.22}$$

由注 3.2 和 3.3 可知, 此处 (广义) 主部概念 G.P 比经典意义下的主部概念 P.P 更为广泛, 是其一种拓广.

注 3.4 同样地, 若 F 有孤立奇点 $z=0$, 则它在 $z=0$ 附近有 Laurent 级数展开

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kz^k. \tag{3.23}$$

我们称

$$\mathrm{P.P}[F,0](z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{-k}z^{-k},\quad z\neq 0 \tag{3.24}$$

为 F 在 $z=0$ 处的 (带常数项 a_0) 主部. 同样也可证明

$$\mathrm{P.P}[F,0]=\mathrm{G.P}[F,0]. \tag{3.25}$$

类似地, 也可验证此处 (广义) 主部 G.P$[F,0]$ 的概念比经典意义下的主部 P.P$[F,0]$ 的概念更为广泛, 也是其一种拓广.

注 3.5 主部 G.P$[F,\infty]$ (G.P$[F,0]$) 是唯一的. 例如, 若 E_1 和 E_2 均为 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主部, 那么它们是整函数, 则由注 3.2 可知,

$$\mathrm{P.P}[E_1-E_2,\infty]=\mathrm{G.P}[E_1-E_2,\infty]=0.$$

从而由 Liouville 定理又知 $E_1=E_2$.

对于 $F\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$, 有时需引入原点及无穷远点阶的概念.

定义 3.4 设 $F\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$. 若

$$0<\beta_m=\limsup_{z\to\infty}|z^{-m}F(z)|<+\infty, \tag{3.26}$$

则称 F 在 $z=\infty$ 是 m 阶的, 记为 Ord $(F,\infty)=m$. 若

$$0<\alpha_m=\limsup_{z\to 0}|z^m F(z)|<+\infty, \tag{3.27}$$

则称 F 在 $z=0$ 是 m 阶的, 记为 Ord $(F,0)=m$.

注 3.6 显然, 若 $\mathrm{G.P}[z^{-m}F,\infty]=\beta_m\neq 0$, 则 Ord $(F,\infty)=m$. 同样, 若 $\mathrm{G.P}[z^m F,0]=\alpha_m\neq 0$, 则 Ord $(F,0)=m$. 特别地, 当 $\mathrm{G.P}[F,\infty]$ 是一个 m $(m\geqslant 0)$ 次多项式时, 我们有 Ord $(F,\infty)=m$; 当 $\mathrm{G.P}[F,0]$ 是一个 m $(m\geqslant 0)$ 次 Laurent 多项式时, 我们有 Ord $(F,0)=m$.

注 3.7 我们指出后面要用到的事实. 若 Ord $(F,\infty)\leqslant m$, 则 $\mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}F,\infty]=0$. 同样地, 若 Ord $(F,0)\leqslant m$, 则 $\mathrm{G.P}[z^{m+1}F,0]=0$. 因此,

$$\{F,|F(z)|=O(z^m)\text{ 当 }z\to\infty\}\subseteq\{F,\mathrm{Ord}\ (F,\infty)\leqslant m\}\subseteq\{F,\mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}F,\infty]=0\}, \tag{3.28}$$

$$\{F,|F(z)|=O(z^{-m})\text{ 当 }z\to 0^+\}\subseteq\{F,\mathrm{Ord}\ (F,0)\leqslant m\}\subseteq\{F,\mathrm{G.P}[z^{m+1}F,0]=0\}. \tag{3.29}$$

为了考察 Cauchy 型积分在原点和无穷远处的 (广义) 主部, 我们先建立下面的一个重要结果. 这个结果是对文献 [1–3] 中关于开口曲线上 Cauchy 型积分和 Cauchy 主值积分在端点处性态结果的精化.

引理 3.2 设 $f\in H^\mu(0)$, 且 $f(0)=0$, f 在 $(0,b]$ 的任意内闭子区间 $[\eta,b]$ 上可积, 则

$$\lim_{z\in\mathbb{C},z\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^b\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^b\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau, \tag{3.30}$$

其中, 左边的积分当 $z\in\mathbb{C}\setminus[0,b]$ 时理解为 Cauchy 型积分, 当 $z\in(0,b)$ 时理解为 Cauchy 主值积分; 而右边的积分为正常 (瑕) 积分.

证明 设 $x=\mathrm{Re}(z)$, $y=\mathrm{Im}(z)$,

$$z^*=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases} \tag{3.31}$$

假设 δ 是一个充分小正数使得 $f\in H^\mu[0,\delta]$, 注意到

$$\begin{aligned}\Delta&=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^b\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^b\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\delta\frac{f(\tau)-f(z^*)}{\tau-z}d\tau\right|+\frac{|f(z^*)|}{2\pi}\left|\int_0^\delta\frac{1}{\tau-z}d\tau\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\delta\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right|\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\left|\int_\delta^b\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau-\int_\delta^b\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right|\\&\triangleq\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4.\end{aligned} \tag{3.32}$$

以下分别估计 ρ_1、ρ_2、ρ_3 和 ρ_4,

$$\begin{aligned}\rho_1&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta\frac{|f(\tau)-f(z^*)|}{|\tau-z^*|}d\tau\quad(\text{由 }|\tau-z^*|\leqslant|\tau-z|\text{ 可得})\\&\leqslant\frac{M}{2\pi}\int_0^\delta|\tau-z^*|^{\mu-1}d\tau\quad(\text{由 }f\in H^\mu[0,\delta]\text{ 可得})\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{M\delta^{\mu}}{\pi\mu} \quad (\text{当 } |z|<\delta \text{ 时 } z^* \leqslant \delta). \tag{3.33}$$

类似地, 注意到 $f(0)=0$, 可得

$$\rho_3 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\frac{|f(\tau)-f(0)|}{|\tau-0|}d\tau \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_0^{\delta}\tau^{\mu-1}d\tau = \frac{M\delta^{\mu}}{2\pi\mu}. \tag{3.34}$$

利用 (3.21) 中所给的对数函数 $\ln w$, 我们有

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \frac{|f(z^*)|}{2\pi}|\ln(\delta-z)-\ln(-z)| \\ &\leqslant \frac{M|z^*|^{\mu}}{2\pi}|\ln(\delta-z)-\ln(-z)| \\ &\leqslant \frac{M|z|^{\mu}}{2\pi}[|\ln|\delta-z||+|\ln|z||+2\pi].\end{aligned} \tag{3.35}$$

又注意到

$$(C_{[\delta,b]}[f])(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\delta}^{b}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau \in A(\mathbb{C}\setminus[\delta,b]), \tag{3.36}$$

从而,

$$\lim_{z\in\mathbb{C}, z\to 0}\rho_4 = 0. \tag{3.37}$$

因此, 由 (3.32)–(3.35) 和 (3.37), 可得

$$\limsup_{z\in\mathbb{C}, z\to 0}\Delta = 0, \tag{3.38}$$

再由 δ 的任意性, 得

$$\lim_{z\in\mathbb{C}, z\to 0}\Delta = 0, \tag{3.39}$$

即 (3.30) 成立. □

推论 3.2 (Cauchy 型积分在原点处的广义主部) 设 $f\in H^{\mu}(0)\cap O^{\nu}(+\infty)$ $(\nu>0)$, 并且 $f(0)=0$ 和 f 在任意有限区间 $[\delta,\Delta]\subset(0,+\infty)$ 上可积, 则

$$\mathrm{G.P}[C[f],0] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau, \tag{3.40}$$

其中 $C[f]$ 是 (3.1) 中所给的 Cauchy 型积分.

证明 由 (3.5), 我们只须分别考察 (3.3) 和 (3.4). 由引理 3.2 知,

$$\lim_{z\to 0}(C_{[0,b]}[f])(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{b}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau. \tag{3.41}$$

由推论 3.1 知,

$$\lim_{z\to 0}(C_{[b,+\infty)}[f])(z) = (C_{[b,+\infty)}[f])(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_b^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau. \tag{3.42}$$

因此, 由 (3.5)、(3.41) 和 (3.42) 可得 (3.40). □

注 3.8 推论 3.2 表明了 $C[f]$ 可以连续延拓到原点处.

定理 3.1 (Cauchy 型积分在无穷远点处的广义主部) 若 $f \in O^{\alpha}(0) \cap \widehat{H}_0^{\mu}(+\infty)$ $(\alpha < 1)$, 且在任意有限区间 $[\delta, \Delta] \subset (0, +\infty)$ 上可积, 则

$$\mathrm{G.P}[C[f], \infty] = 0, \tag{3.43}$$

其中 $C[f]$ 是 (3.1) 中所给的 Cauchy 型积分.

注 3.9 应该强调, 在有限曲线情形下由积分号下取极限 $z \to \infty$ 容易得到 (3.43) (如下文 (3.44) 中), 但此处不能这样直接而得. 这就表明两者之间有着本质差异, 有些作者往往忽略了这种不同.

证明 由于 $f \in O^{\alpha}(0)$ $(\alpha < 1)$, 故

$$(C_{[0,b]}[f])(\infty) = \lim_{z \to \infty} (C_{[0,b]}[f])(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^b \lim_{z \to \infty} \left[\frac{f(\tau)}{\tau - z}\right] d\tau = 0. \tag{3.44}$$

事实上, 更确切地讲, 在 ∞ 附近有 Laurent 展式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^b \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^b \left[-\frac{f(\tau)}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{z}\right)^k\right] d\tau = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k-1}}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^b f(\tau) \tau^k d\tau. \tag{3.45}$$

设

$$g(\tau) = f(\tau^{-1}), \quad \tau \in (0, +\infty), \tag{3.46}$$

根据假设, 对于某足够大的 $b > 0$, 有

$$g(0) = 0, \quad |g(\tau)| \leqslant M |\tau|^{\mu}, \quad \tau \in (0, b^{-1}). \tag{3.47}$$

用分式线性变换

$$\tau = \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta \in (0, +\infty) \tag{3.48}$$

可得 Cauchy 型积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 的变量代换公式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_b^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - w^{-1}} d\tau = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{b^{-1}} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{b^{-1}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta, \quad w \in \mathbb{C} \setminus [0, b^{-1}]. \tag{3.49}$$

上式两边令 $w \to 0$, 注意到 (3.47), 再由引理 3.2 可得

$$(C_{[b,+\infty)}[f])(\infty) = 0. \tag{3.50}$$

因此, 由 (3.5)、(3.44) 和 (3.50) 可得

$$(C[f])(\infty) = 0, \tag{3.51}$$

此即 (3.43). □

注 3.10 当 $f \in O^{\nu}(+\infty)$ $(\nu > 0)$ 且在任意有限区间 $[b, \Delta] \subset (0, +\infty)$ 上可积, Cauchy 型积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 的变量代换公式 (3.49) 仍成立. 事实上, 此时 $g \in O^{\alpha}(0)$ $(\alpha = 1 - \nu < 1)$, 从而 (3.49) 右边的第一个积分仍是一个有意义的广义积分.

推论 3.3 (Cauchy 型积分在无穷远点处广义主部的有限展式) 若 $f \in O^{\alpha}(0) \cap \widehat{H}_{\lambda,0}^{\mu}(+\infty)$ $(\alpha < 1)$, 其中 λ 是一个正整数, 且假定 f 在任意有限区间 $[\delta, \Delta] \subset (0, +\infty)$ 上可积, 则

$$\mathrm{G.P}[z^{\lambda} C[f], \infty](z) = -\sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{z^{\lambda-1-k}}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \tau^k d\tau, \tag{3.52}$$

其中 $C[f]$ 是 (3.1) 中所给的 Cauchy 型积分.

注 3.11 在有限曲线情形下, 我们可以利用 Cauchy 核在 ∞ 处幂级数展开再逐项积分的方法得到 $C[f]$ 的 Laurent 展开式 (如 (3.45) 中), 但此处这种经典处理方法又失效, 甚至 $C[f]$ 可能在 ∞ 处没有 Laurent 展开式. 这个事实首先为 Lubinsky 在研究实轴上的 Cauchy 型积分的类似问题时发现并加以严谨处理 (参见文献 [39]).

证明 记 $f_k(\tau)=\tau^k f(\tau)$ $(k=0,1,\ldots,\lambda)$, 由于 $f\in O^{\alpha}(0)\cap\widehat{H}^{\mu}_{\lambda,0}(+\infty)$ $(\alpha<1)$, 则有 $f_k\in O^{\alpha}(0)\cap O^{\lambda-k+\mu}(+\infty)$. 由注 2.3 可知,

$$\begin{aligned} z^{\lambda}(C[f])(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)(z^{\lambda}-\tau^{\lambda})}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)\tau^{\lambda}}{\tau-z}d\tau \\ &= -\sum_{k=0}^{\lambda-1}\frac{z^k}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}f(\tau)\tau^{\lambda-1-k}d\tau+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)\tau^{\lambda}}{\tau-z}d\tau. \end{aligned} \tag{3.53}$$

由定理 3.1 及对 f 的假设可得

$$\lim_{z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),z\to\infty}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)\tau^{\lambda}}{\tau-z}d\tau=0, \tag{3.54}$$

从而可得 (3.52). □

下面的例子给出了以例 2.1 中 $w_{r,n}$ 为密度的 Cauchy 型积分在无穷远点处广义主部的有限展式, 或详细地讲, $m-1$ 级展式.

例 3.1 设

$$W_{m,r,n}(z)=\frac{z^m}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{w_{r,n}(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty), \tag{3.55}$$

其中 $w_{r,n}$ 为 (2.13) 所给, 且 $r<-m$ (m 为非负整数), 则

$$\mathrm{G.P}[W_{m,r,n},\infty](z)=-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^{m-1-k}}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{+\infty}w_{r,n}(\tau)\tau^k d\tau. \tag{3.56}$$

引理 3.3 (Cauchy 型积分在原点处不足一阶奇性) 设 $f\in H^*_{\alpha}(0)\cap O^{\nu}(+\infty)$ $(\alpha<1,\nu>0)$, 且 f 在任意有限区间 $[\delta,\Delta]\subset(0,+\infty)$ 上可积, 则

$$\mathrm{G.P}[zC[f],0]=0, \tag{3.57}$$

其中 $C[f]$ 是 (3.1) 中所给的 Cauchy 型积分. 更一般地, 若

$$f(\tau)=\frac{f^*(\tau)}{\tau^{\lambda}},\quad 其中\ f^*\in H^{\mu}[0,\Delta],\quad 0\leqslant\alpha=\mathrm{Re}(\lambda)<1, \tag{3.58}$$

则

$$(C[f])(z)=\begin{cases}-\dfrac{f(0)}{2\pi \mathrm{i}}\ln(-z)+\Phi(z), & \lambda=0,\\ \dfrac{1}{2\mathrm{i}\sin(\lambda\pi)}\dfrac{f^*(0)}{(-z)^{\lambda}}+\Psi(z), & \lambda\neq0,\end{cases} \tag{3.59}$$

其中 Φ 和 Ψ 分别在 $z=0$ 附近沿正实轴剖开的邻域中全纯, 当 $z\to0$ 时 Φ 的极限存在, 且在 $z=0$ 附近, $\Psi=O(|z|^{-\alpha})$, $\ln w$ 为 (3.21) 所给定, 而 $(-z)^{\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda\ln(-z)}$.

证明 从文献 [2,3] 可知,

$$
(C_{[0,b]}[f])(z)=\begin{cases}-\dfrac{f(0)}{2\pi\mathrm{i}}\ln(-z)+\Phi_1(z), & \lambda=0,\\ \dfrac{1}{2\mathrm{i}\sin(\lambda\pi)}\dfrac{f^*(0)}{(-z)^{\lambda}}+\Psi_1(z), & \lambda\neq 0,\end{cases}\tag{3.60}
$$

其中 Φ_1 和 Ψ_1 分别在 $z=0$ 附近沿正实轴剖开的邻域中全纯, 当 $z\to 0$ 时, Φ_1 的极限存在, 且在 $z=0$ 附近, $\Psi_1=O(|z|^{-\alpha})$.

由 (3.5)、(3.60) 和推论 3.1 中 (3.10) 可知 (3.59) 成立, 从而 $\mathrm{G.P}[zC[f],0]=0$. □

注 3.12 引理 3.3 把文献 [1–3] 中开口曲线上 Cauchy 型积分的经典结果推广到了正实轴上 Cauchy 型积分的场合.

设 $F\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$. 若

$$
\begin{cases}F^+(x)=\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)>0,z\to x}F(z),\\ F^-(x)=\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)<0,z\to x}F(z),\end{cases}\quad x\in(0,+\infty)\tag{3.61}
$$

存在, 则称 F 有正负边值 $F^{\pm}(x)$.

为了考察 Cauchy 型积分的边值, 我们引入正实轴上的 Cauchy 主值积分. 如果

$$
\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\int_0^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^{\infty}\right]\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau\tag{3.62}
$$

存在, 记为

$$
(C[f])(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau,\quad x\in(0,+\infty),\tag{3.63}
$$

则称它为正实轴上带密度 f 的 Cauchy 主值积分.

类似地, 对于正数 b, 我们也需要引入 $[b,+\infty)$ 上的 Cauchy 主值积分. 如果

$$
\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\int_b^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^{\infty}\right]\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau\tag{3.64}
$$

存在, 记为

$$
(C_{[b,+\infty)}[f])(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_b^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau,\quad x\in(b,+\infty),\tag{3.65}
$$

则称它为 $[b,+\infty)$ 上的带密度 f 的 Cauchy 主值积分.

注 3.13 Cauchy 主值积分也可以分成两个积分, 即

$$
(C[f])(x)=(C_{[0,b]}[f])(x)+(C_{[b,+\infty)}[f])(x),\quad x\in(0,b)\cup(b,+\infty).\tag{3.66}
$$

(1) 当 $x\in(0,b)$ 时, $C_{[0,b]}[f]$ 是 $(0,b)$ 上的 Cauchy 主值积分 (参见文献 [1–3]), 而 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 是 (3.4) 给出的 $[b,+\infty)$ 上的 Cauchy 型积分;

(2) 当 $x\in(b,+\infty)$ 时, $C_{[0,b]}[f]$ 是 $[0,b]$ 上的 Cauchy 型积分 (参见文献 [1–3]), 而 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 为 (3.65) 给出的 $[b,+\infty)$ 上的 Cauchy 主值积分.

引理 3.4 (Cauchy 型积分的边值) 若 $f\in H_c^{\mu}(0,+\infty)\cap O^{\alpha}(0)\cap O^{\nu}(+\infty)$ $(\alpha<1,\ \nu>0)$, 则它的 Cauchy 型积分 $C[f]$ 有正负边值, 并且满足下面 Plemelj 公式:

$$\begin{cases}(C[f])^+(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau,\\ (C[f])^-(x)=-\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau,\end{cases}\quad x\in(0,+\infty), \tag{3.67}$$

其中上式中出现的积分是正实轴上的 Cauchy 主值积分.

证明 对于 $x\in(0,+\infty)$, 取 $b>0$ 使得 $x\in(0,b)$, 在 (3.66) 中利用 $[0,b]$ 上 Cauchy 型积分的 Plemelj 公式[1–3], 并且注意 (3.10), 马上得到

$$\begin{aligned}(C[f])^{\pm}(x)&=\pm\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{b}\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_b^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau\\&=\pm\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau.\end{aligned} \tag{3.68}$$

结论得证. □

注意到 (3.12), 立即可得下面的推论.

推论 3.4 若 $f\in O^{\nu}(+\infty)$ $(\nu>0)$, 且对于任何 $[b,\Delta]\subset[b,+\infty)$ 有 $f\in H([b,\Delta])$, 则它的 Cauchy 型积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 有正负边值, 并且满足下面 Plemelj 公式:

$$\begin{cases}(C_{[b,+\infty)}[f])^+(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_b^{+\infty}\dfrac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau,\\ (C_{[b,+\infty)}[f])^-(x)=-\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_b^{+\infty}\dfrac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau,\end{cases}\quad x\in(b,+\infty). \tag{3.69}$$

定义 3.5 设 F 是定义在沿正实轴剖开的复平面上的函数, 若 $F\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$, 它的正负边值 $F^{\pm}$ 存在, 且

$$\mathrm{G.P}[zF,0]=0, \tag{3.70}$$

则称之为以正实轴为跳跃曲线的分区全纯函数.

注 3.14 此处分区全纯函数的概念较之文献 [1–3] 中分区全纯函数的概念略微不同. 在那里, $\mathrm{G.P}[zF,0]=0$ 被替换为下面更强的条件:

$$\text{在 } z=0 \text{ 附近,}\quad |\Phi(z)|\leqslant\frac{C}{|z|^{\alpha}},\quad C \text{ 是常数.} \tag{3.71}$$

事实上, 由 (3.71) 可得出 $\mathrm{G.P}[zF,0]=0$, 但反之未必成立. 例如, 设

$$\Phi(z)=\frac{1}{z\ln(-z)},\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty), \tag{3.72}$$

其中 $\ln(w)$ 为 (3.21) 中所给函数, 那么 $\mathrm{G.P}[z\Phi,0]=0$ 但 (3.71) 不成立. 因此, 定义 3.5 中分区全纯函数的概念是对文献 [1–3] 中分区全纯函数概念的一个改进.

定理 3.2 若 $f\in H_{\alpha}^{*}(0)\cap H_c^{\mu}(0,+\infty)\cap O^{\nu}(+\infty)$ $(\alpha<1,\ \nu>0)$, 则 (3.1) 中所给 Cauchy 型积分 $C[f]$ 是以正实轴为跳跃曲线的分区全纯函数.

证明 由引理 3.1、3.3 和 3.4, 可证得此定理. □

4 Cauchy 主值积分的连续性和在端点处的奇性

本节将深入细致讨论 Cauchy 主值积分的连续性及其在端点处的性态, 这些结果是文献 [1–3] 中关于开口曲线上 Cauchy 主值积分的结果深化并推广到正实轴的场合, 它们在下节中有重要应用.

首先, 直接由经典结果, 我们有如下 Privalov 定理.

定理 4.1 (Cauchy 主值积分的 Hölder 连续性) 若 $f \in O^{\alpha}(0) \cap O^{\nu}(+\infty)$ ($\alpha < 1$, $\nu > 0$), 并且又有 $f \in H_c^{\mu}(0,+\infty)$, 则对于 (3.63) 所给定的 Cauchy 主值积分 $C[f]$ 及 (3.67) 所给定的边值 $(C[f])^{\pm}$, 有

$$C[f], C[f]^{\pm} \in \begin{cases} H_c^{\mu}(0,+\infty), & \text{当 } 0 < \mu < 1 \text{ 时}, \\ H_c^{\varepsilon}(0,+\infty) \quad (0 < \varepsilon < 1), & \text{当 } \mu = 1 \text{ 时}. \end{cases} \tag{4.1}$$

证明 由 Plemelj 公式 (3.67), 只须证实 Cauchy 主值积分的 Hölder 连续性. 对于任意的有限区间 $[\delta,\Delta] \subset (0,+\infty)$, 记

$$\begin{aligned} C[f](x) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{\frac{1}{2}\delta} \frac{f(\tau)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\frac{1}{2}\delta}^{2\Delta} \frac{f(\tau)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{2\Delta}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x} d\tau \\ &\triangleq F_1(x) + F_2(x) + F_3(x), \quad x \in [\delta,\Delta]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

由于 F_1 和 F_3 在 $[\delta,\Delta]$ 上解析, 故 $F_1, F_3 \in H^1[\delta,\Delta]$. 又由文献 [2] 可知, $F_2 \in H[\delta,\Delta]$. 因此有

$$C[f] \in \begin{cases} H_c^{\mu}(0,+\infty), & \text{当 } 0 < \mu < 1 \text{ 时}, \\ H_c^{\varepsilon}(0,+\infty)(0 < \varepsilon < 1), & \text{当 } \mu = 1 \text{ 时}. \end{cases} \tag{4.3}$$

再引用 Plemelj 公式 (3.67), 我们又得 Cauchy 型积分边值的 Hölder 连续性. □

定理 4.2 (Cauchy 主值积分在原点处的奇性) 设 $f \in H_{\alpha}^{*}(0) \cap O^{\nu}(+\infty)$ ($\alpha < 1$, $\nu > 0$), 且 f 在任意有限区间 $[\delta,\Delta] \subset (0,+\infty)$ 上可积, $C[f]$ 是 Cauchy 主值积分, 则 $C[f] \in H^{*}(0)$. 更准确地讲, 若

$$f(\tau) = \frac{f^{*}(\tau)}{\tau^{\lambda}}, \quad \text{其中 } f^{*} \in H^{\mu}[0,\delta], \quad 0 \leqslant \alpha = \mathrm{Re}(\lambda) < 1, \tag{4.4}$$

则在 $x = 0$ 附近,

$$(C[f])(x) = \begin{cases} -\dfrac{f(0)}{2\pi \mathrm{i}} \ln x + \varphi(x), & \lambda = 0, \\ \dfrac{\cot(\lambda\pi)}{2\mathrm{i}} \dfrac{f^{*}(0)}{x^{\lambda}} + \dfrac{\varphi(x)}{x^{\lambda}}, & \lambda \neq 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

其中 $\varphi \in H[0,\eta]$ ($\eta < \delta$), $x^{\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda \ln x}$ ($x > 0$).

证明 从文献 [2,3] 可知, 在 $x = 0$ 附近,

$$(C_{[0,b]}[f])(x) = \begin{cases} -\dfrac{f(0)}{2\pi \mathrm{i}} \ln x + \varphi_0(x), & \lambda = 0, \\ \dfrac{\cot(\lambda\pi)}{2\mathrm{i}} \dfrac{f^{*}(0)}{x^{\lambda}} + \dfrac{\varphi_0(x)}{x^{\lambda}}, & \lambda \neq 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

其中 $\varphi_0 \in H[0,\eta]$ ($\eta < \delta$).

由 (3.66)、(4.6) 和 (3.10) 可知 (4.5) 成立. □

注 4.1 定理 4.2 把文献 [1–3] 经典开口曲线上 Cauchy 主值积分的相关结果推广到了正实轴上 Cauchy 主值积分的场合.

同引理 3.2, 下面结果也是对文献 [1–3] 中关于开口曲线上 Cauchy 主值积分在端点处的 Hölder 连续性结果的精化.

引理 4.1 若 $g \in H^{\mu}[0,\delta]$, $g(0)=0$, 则 Cauchy 主值积分

$$C_{[0,\delta]}[g] \in H(0,\eta], \quad \eta < \delta. \tag{4.7}$$

证明 记

$$\int_0^{\delta} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_0^{\delta} \frac{g(\tau)-g(t)}{\tau - t} d\tau + g(t)\int_0^{\delta} \frac{1}{\tau - t} d\tau \triangleq S_1(t) + S_2(t), \quad t \in (0,\delta). \tag{4.8}$$

容易看出

$$S_2(t) = g(t)\ln(\delta - t) - g(t)\ln t = \zeta_1(t) + \zeta_2(t), \quad t \in (0,\eta]. \tag{4.9}$$

由于文献 [1–3] 可知,

$$g \in H^{\mu}(0,\delta], \quad \ln(\delta - t) \in H^1[0,\eta], \tag{4.10}$$

我们有

$$\zeta_1 \in H^{\mu}(0,\eta]. \tag{4.11}$$

由文献 [2, 第四章引理 1.2.3] 可知,

$$\zeta_2 \in H^{\mu-\epsilon}[0,\eta]. \tag{4.12}$$

(4.11) 和 (4.12) 表明

$$S_2 \in H^{\mu-\epsilon}(0,\eta]. \tag{4.13}$$

此外, 我们有

$$\begin{aligned}
&|S_1(t) - S_1(x)| \quad (\text{对于任意的 } t, x \in [0,\delta)) \\
&\leqslant \left| \int_{|\tau - x| \leqslant 2|t-x|} \frac{g(\tau)-g(t)}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \int_{|\tau - x| \leqslant 2|t-x|} \frac{g(\tau)-g(x)}{\tau - x} d\tau \right| \\
&\quad + \left| (t-x) \int_{|\tau - x| \geqslant 2|t-x|} \frac{g(\tau)-g(t)}{(\tau - t)(\tau - x)} d\tau \right| \\
&\quad + \left| [g(t)-g(x)] \int_{|\tau - x| \geqslant 2|t-x|} \frac{1}{\tau - x} d\tau \right| \\
&\triangleq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

由假设可知,

$$|g(t) - g(x)| \leqslant M|t-x|^{\mu}, \quad t, x \in [0,\delta]. \tag{4.15}$$

不失一般性, 取 $\mu < 1$. 显然,

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leqslant \frac{4M}{\mu}|t-x|^{\mu}. \tag{4.16}$$

注意

$$\text{当 } |\tau - x| \geqslant 2|t-x| \text{ 时}, \quad \left|\frac{\tau - x}{\tau - t}\right| \leqslant 1 + \left|\frac{t-x}{\tau - t}\right| \leqslant 2, \tag{4.17}$$

并且当 $\{\tau : |\tau - x| > 2|t-x|\}$ 非空时, x 到它的距离刚好是 $2|t-x|$, 由此可得

$$\varepsilon_3 \leqslant 2|t-x| \int_{|\tau - x| \geqslant 2|t-x|} \left|\frac{g(\tau)-g(t)}{(\tau - x)^2}\right| d\tau$$

$$\leqslant 4M|t-x|\int_{|\tau-x|\geqslant 2|t-x|}\frac{1}{|\tau-x|^{2-\mu}}d\tau$$
$$\leqslant \frac{4M}{1-\mu}|t-x|^{\mu}. \tag{4.18}$$

由 (4.15) 结合

$$\max\{|y^{\epsilon}\ln y|, y\in[0,1]\}=(\epsilon\mathrm{e})^{-1}, \quad 0<\epsilon<\mu, \tag{4.19}$$

可知

$$\varepsilon_4\leqslant M|t-x|^{\mu}\ln\frac{\delta}{|t-x|}\leqslant M\delta^{\epsilon}(\epsilon\mathrm{e})^{-1}|t-x|^{\mu-\epsilon}, \quad 0<\epsilon<\mu. \tag{4.20}$$

(4.16)、(4.18) 和 (4.20) 表明

$$S_1\in H^{\mu-\epsilon}(0,\delta]. \tag{4.21}$$

由 (4.8)、(4.21) 和 (4.13) 可得 (4.7) 成立. □

为了研究 Cauchy 主值积分在 ∞ 处的 Hölder 性质, 我们先分别探讨关于 Cauchy 型积分 $C_{[0,b]}[f]$ 和 Cauchy 主值积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 在 ∞ 处的 Hölder 性质. 为此, 我们有必要把第 2 节中一些记号加以拓广并引入 Cauchy 型积分的变量代换公式.

注 4.2 一般地, 设 f 定义在 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, 若对于 Ω 中任何两点 t' 和 t'' 成立 (2.1), 则记 $f\in H^{\mu}(\Omega)$, 又特别地, 若 $\Omega=\{z,|z|<\delta\}$ 是原点的一个邻域, 则记 $f\in H^{\mu}(0)$. 类似地, 对于 $\Omega\setminus\{0\}$ 中任何两点 t' 和 t'' 成立 (2.2), 则记 $f\in\widehat{H}^{\mu}(\Omega)$; 若 $\Omega=\{z,|z|>\Delta\}$ 是无穷远点的一个邻域, 则记 $f\in\widehat{H}^{\mu}(\infty)$; 若 $f(\infty)=0$, 则记 $f\in\widehat{H}_0^{\mu}(\infty)$.

引理 4.2 若 $f\in O^{\alpha}(0)$ $(\alpha<1)$, 且 f 在任意有限区间 $[\delta,b]$ $(b>\delta>0)$ 上可积, 则

$$C_{[0,b]}[f]\in\widehat{H}_0(\infty), \tag{4.22}$$

其中 $C_{[0,b]}[f]$ 是 $[0,b]$ 上的 Cauchy 型积分.

证明 由分式线性变换 (3.48) 得 Cauchy 型积分 $C_{[0,b]}[f]$ 的变量代换公式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^b\frac{f(\tau)}{\tau-w^{-1}}d\tau=-\frac{w}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b^{-1}}^{\infty}\frac{f(\zeta^{-1})}{\zeta(\zeta-w)}d\zeta, \quad w\in\mathbb{C}\setminus[b^{-1},+\infty). \tag{4.23}$$

令

$$k(\zeta)=\frac{f(\zeta^{-1})}{\zeta}, \quad \zeta\in(b^{-1},+\infty), \tag{4.24}$$

从而,

$$k\in O^{\nu}(+\infty), \quad \nu=1-\alpha>0. \tag{4.25}$$

记

$$\Theta(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b^{-1}}^{\infty}\frac{f(\zeta^{-1})}{\zeta(\zeta-w)}d\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b^{-1}}^{\infty}\frac{k(\zeta)}{\zeta-w}d\zeta, \quad w\in\mathbb{C}\setminus[b^{-1},+\infty), \tag{4.26}$$

由推论 3.1 知,

$$\Theta=C_{[b^{-1},+\infty)}[k]\in A(\mathbb{C}\setminus[b^{-1},+\infty)). \tag{4.27}$$

从而,

$$\Theta\in H^1(0). \tag{4.28}$$

现在, 从 (4.23)、(4.28) 和 (3.44) 可知 (4.22) 成立. □

注 4.3 记 $C_{[0,b]}[f]$ 在 $(b,+\infty)$ 上的限制为 $C_{[0,b]}[f]|_{(b,+\infty)}$, 那么,

$$C_{[0,b]}[f]\,|_{(b,+\infty)}\in \widehat{H}_0(+\infty). \tag{4.29}$$

引理 4.3 (Cauchy 主值积分的变量代换) 若 $f\in O^{\nu}(+\infty)$ $(\nu>0)$ 且对任意内闭有限区间 $[b,\Delta]$ 又有 $f\in H([b,\Delta])$, 则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_b^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-t^{-1}}d\tau=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{b^{-1}}\frac{g(\zeta)}{\zeta}d\zeta-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{b^{-1}}\frac{g(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta,\quad t\in(0,b^{-1}), \tag{4.30}$$

其中 $g(\zeta)=f(\tau^{-1})$ 如 (3.46).

证明 我们在 Cauchy 型积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 的变量代换公式 (3.49) 中取正边值, 也就是, $w\to t$ $(\mathrm{Im}(w)>0,\ t\in(0,b^{-1}))$, 从 Cauchy 型积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 的 Plemelj 公式 (3.69) 和 Cauchy 型积分 $C_{[0,b^{-1}]}[g]$ 的 Plemelj 公式[1–3], 立即得到 Cauchy 主值积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 的变量代换公式 (4.30). □

注 4.4 不少学者不加证明而采用各种场合下的 Cauchy 主值积分的变量代换公式, 由于这种积分并非真正意义上的 "积分", 它的变量代换公式并不是很明显而需证明. 例如, 文献 [2,3] 在使用实轴上的 Cauchy 主值积分的变量代换公式时就存在失察. 以上 Cauchy 主值积分 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 的变量代换公式 (4.30) 的证明虽不复杂, 但却援引了各种场合下的 Plemelj 公式, 而后者是边值理论中相当深刻的工具.

以下我们回避 Plemelj 公式而直接证明 (4.30), 从中更可以看出它并非显而易见而需认真加以处理的关键所在. 为了避开端点处的讨论, 我们只证有限线段上的 Cauchy 主值积分的变量代换公式, 实际上这也是本质的, (4.30) 可以作为它的推论.

定理 4.3 若 $f\in H([c,d])$ $(d>c>0)$, 则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_c^{d}\frac{f(\tau)}{\tau-t^{-1}}d\tau=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{d^{-1}}^{c^{-1}}\frac{f(\zeta^{-1})}{\zeta}d\zeta-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{d^{-1}}^{c^{-1}}\frac{f(\zeta^{-1})}{\zeta-t}d\zeta,\quad t\in(d^{-1},c^{-1}). \tag{4.31}$$

证明 取足够小 $\epsilon>0$, 那么由复积分在变换 (3.48) 下的变换公式得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\int_c^{t^{-1}-\epsilon}+\int_{t^{-1}+\epsilon}^{d}\right]\frac{f(\tau)}{\tau-t^{-1}}d\tau=-\frac{t}{2\pi \mathrm{i}}\left[\int_{\frac{1}{d}}^{\frac{1}{t^{-1}+\epsilon}}+\int_{\frac{1}{t^{-1}-\epsilon}}^{\frac{1}{c}}\right]\frac{k(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta,\quad t\in(d^{-1},c^{-1}), \tag{4.32}$$

其中

$$k(\zeta)=\frac{f(\zeta^{-1})}{\zeta}\quad 且\quad k\in H([d^{-1},c^{-1}]). \tag{4.33}$$

记 (4.32) 左边为 $R(\epsilon)$, 则

$$\lim_{\epsilon\to0^+}R(\epsilon)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_c^{d}\frac{f(\tau)}{\tau-t^{-1}}d\tau. \tag{4.34}$$

记 (4.32) 右边为 $L(\epsilon)$, 且

$$t'=\frac{1}{t^{-1}+\epsilon}=\frac{t}{1+\epsilon t},\quad t''=\frac{1}{t^{-1}-\epsilon}=\frac{t}{1-\epsilon t}, \tag{4.35}$$

可得

$$\Delta'=t-t'=\frac{t^2\epsilon}{1+\epsilon t},\quad \Delta''=t''-t=\frac{t^2\epsilon}{1-\epsilon t}, \tag{4.36}$$

虽然

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\Delta'=\lim_{\epsilon\to0^+}\Delta''=0,\tag{4.37}$$

但

$$\Delta'\neq\Delta'',\tag{4.38}$$

确切地讲,

$$\Delta'<\Delta''.\tag{4.39}$$

为此, 取

$$t^*=t+\Delta',\tag{4.40}$$

现在有

$$L(\epsilon)=-\frac{t}{2\pi\mathrm{i}}\left[\int_{\frac{1}{d}}^{t'}+\int_{t^*}^{\frac{1}{c}}\right]\frac{k(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta+\frac{t}{2\pi\mathrm{i}}\int_{t^*}^{t''}\frac{k(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta\triangleq-t[I_1+I_2].\tag{4.41}$$

注意 (4.36)、(4.40)、(4.37) 和 (4.33), 从而,

$$\lim_{\epsilon\to0^+}I_1=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\frac{1}{d}}^{\frac{1}{c}}\frac{k(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta,\quad \lim_{\epsilon\to0^+}I_2=0,\tag{4.42}$$

于是,

$$\lim_{\epsilon\to0^+}L(\epsilon)=-\frac{t}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\frac{1}{d}}^{\frac{1}{c}}\frac{k(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta.\tag{4.43}$$

由 (4.32)、(4.34) 和 (4.43) 得 (4.31). □

引理 4.4 若 $f\in\widehat{H}_0^{\mu}(+\infty)$, 且对任意 $\Delta>b>0$, 有 $f\in H([b,\Delta])$, 则

$$C_{[b,+\infty)}[f]\in\widehat{H}_0(+\infty),\tag{4.44}$$

其中 $C_{[b,+\infty)}[f]$ 是 (3.65) 中的 Cauchy 主值积分.

证明 注意 (4.30)、(3.46) 和 (3.47), 由引理 4.1 中 (4.7) 立刻可得 (4.44). □

定理 4.4 (Cauchy 主值积分在 ∞ 处的 Hölder 性质) 若 $f\in O^{\alpha}(0)\cap\widehat{H}_0^{\mu}(+\infty)$ $(\alpha<1)$, 且 f 在任意有限区间 $[\delta,\Delta]\subset(0,+\infty)$ 上可积, 则 $C[f]\in\widehat{H}_0(+\infty)$, 其中 Cauchy 主值积分 $C[f]$ 为 (3.63) 所给定.

证明 由 (3.66)、引理 4.2 和 4.4, 本定理得证. □

5 边值问题

考虑正实轴上 Riemann 边值问题如下: 寻求以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线的分区全纯函数 Φ, 使之满足

$$\begin{cases}\Phi^+(x)=G(x)\Phi^-(x)+g(x),\quad x\in(0,+\infty)\quad(\text{边值条件}),\\ \mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}\Phi,\infty]=0\quad(\text{无穷远点的增长性条件}),\end{cases}\tag{5.1}$$

其中 m 为整数, G 和 g 为 $(0,+\infty)$ 上给定的函数. Riemann 边值问题 (5.1) 记为 R_m 问题. 为解决此问题, G 和 g 需满足一些条件, 下文中将逐一探讨.

最简单的边值问题是 (5.1) 中当 $G=1$, $g=0$, 且不考虑无穷远点的增长性条件, 称为所谓的 Painlevé 问题. 我们将从 Painlevé 问题开始讨论.

问题 5.1 (Painlevé 问题) 寻求一个分区全纯函数 Φ, 以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线, 满足

$$\Phi^+(x)=\Phi^-(x),\quad x\in(0,+\infty). \tag{5.2}$$

引理 5.1 Painlevé 问题的解是任意整函数.

证明 充分性. 显然任意整函数是 Painlevé 问题 (5.2) 的解.

必要性. 若以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线的全纯函数 Φ 满足边界条件 (5.2), 则由 Painlevé 定理可知, Φ 在可能除原点外的整个复平面上解析. 换句话讲, $z=0$ 是孤立奇点. 又由 Φ 是分区全纯可知,

$$\mathrm{G.P}[z\Phi,0]=0,$$

从而根据注 3.4 可得 $\mathrm{P.P}[z\Phi,0]=0$, 这样, $z=0$ 是可去奇点. 从而 (5.2) 的解 Φ 是整函数. □

注 5.1 由注 3.14 可知, 此引理是文献 [1–3] 中相应经典 Painlevé 问题的进一步推广.

最简单的 R_m 问题是如下的 Liouville 问题.

问题 5.2 (Liouville 问题) 寻求分区全纯函数 Φ, 以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线, 满足

$$\begin{cases}\Phi^+(x)=\Phi^-(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}\Phi,\infty]=0.\end{cases} \tag{5.3}$$

引理 5.2 当 $m\geqslant 0$ 时, Liouville 问题 (5.3) 的解为任意次数不超过 m 的多项式 $p_m(z)$, 当 $m<0$ 时, $\Phi=0$. 换句话讲,

$$\Phi(z)=p_m(z), \tag{5.4}$$

其中约定当 $m<0$ 时, $p_m=0$.

证明 利用 Painlevé 问题的解、注 3.2 以及推广的 Liouville 定理, 结论显然成立. □

注 5.2 此引理与文献 [1–3] 中经典 Liouville 问题在形式上是类似的, 但本质上有所不同. 从注 3.14 和 (3.28) 可知, 本处在原点奇性和无穷远处的增长性条件都更为宽泛. 确切地讲, 此处推广了经典 Liouville 定理.

问题 5.3 (跳跃问题 R_m) 寻求分区全纯函数 Φ, 以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线, 满足

$$\begin{cases}\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=g(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}\Phi,\infty]=0,\end{cases} \tag{5.5}$$

其中

$$g\in H^*(0)\cap H_c(0,+\infty)\cap\widehat{H}_{m_0,0}(+\infty),\quad \text{这里 } m_0=\max\{0,-(m+1)\}. \tag{5.6}$$

特别地, 当 $m=-1$ 时, 我们得到 R_{-1} 问题, R_{-1} 问题是 R_m 中最基本的问题.

问题 5.4 (跳跃问题 R_{-1}) 寻求分区全纯函数 Φ, 以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线, 满足

$$\begin{cases}\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=g(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[\Phi,\infty]=0,\end{cases} \tag{5.7}$$

其中 $g\in H^*(0)\cap H_c(0,+\infty)\cap\widehat{H}_0(+\infty)$.

引理 5.3 R_{-1} 问题 (5.7) 有唯一解

$$(C[g])(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty).\tag{5.8}$$

证明 因为 $g\in H^*(0)\cap H_c(0,+\infty)\cap\widehat{H}_0(+\infty)$, 利用 Plemelj 公式 (3.67) 以及定理 3.2 和 3.1, 可知 $C[g]$ 是 R_{-1} 问题 (5.7) 的解. 另一方面, 如果 Φ 是 (5.7) 的解, 令 $\Delta=\Phi-C[g]$, 则 Δ 是如下 Liouville 问题的解:

$$\begin{cases}\Delta^+(x)=\Delta^-(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[\Delta,\infty]=0.\end{cases}\tag{5.9}$$

因此, 由引理 5.2 可知 $\Delta=0$. □

定理 5.1 当 $m\geqslant 0$ 时, R_m 问题 (5.5) 的解是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+p_m(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{5.10}$$

其中 p_m 是次数不超过 m 的任意多项式. 当 $m=-1$ 时, R_m 问题 (5.5) 有唯一解 $C[g]$, 由 (5.8) 给出, 或者由 (5.10) 给出且 $p_m=0$. 当 $m<-1$, 当且仅当如下可解条件:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}g(\tau)\tau^k=0,\quad k=0,1,\dots,-m-2\tag{5.11}$$

成立, R_m 问题 (5.5) 有由 (5.8) 给出的唯一解 $C[g]$, 或者由 (5.10) 给出且 $p_m=0$.

证明 显然, 当 $m\geqslant 0$ 时, 由引理 5.3 知, $C[g]$ 是跳跃问题 (5.5) 的解. 因此, Φ 是跳跃问题 (5.5) 的解, 当且仅当 $\Delta=\Phi-C[g]$ 是如下 Liouville 问题的解:

$$\begin{cases}\Delta^+(x)=\Delta^-(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}\Delta,\infty]=0.\end{cases}\tag{5.12}$$

从而, 利用引理 5.2, R_m 问题 (5.5) 的解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+p_m(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{5.13}$$

其中 p_m 是次数不超过 m 的任意多项式.

当 $m<0$ 时, 显然 (5.5) 的解正好是 R_{-1} 跳跃问题 (5.7) 的解. 因此, 通过引理 5.3, 当且仅当满足无穷远点增长性条件

$$\mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}C[g],\infty]=0\tag{5.14}$$

时, (5.5) 有唯一解 $C[g]$.

为验证此条件, 由 g 的假设 (5.6) 可知,

$$g\in O^{\alpha}(0)\cap\widehat{H}_{m_0,0}(+\infty),\quad 其中\ \alpha<1.\tag{5.15}$$

进一步地, 由推论 3.3, 可得 (5.14) 等价于 (5.11). □

注 5.3 当 $m<0$ 时, 由 (3.53) 可知, (5.5) 的解可写为

$$\Phi(z)=\frac{z^{m+1}}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{\tau^{-(m+1)}g(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty). \tag{5.16}$$

从而, 利用定理 4.4 可得 $\Phi^{\pm}\in\widehat{H}_{-(m+1),0}(+\infty)$.

注 5.4 当 $m<0$ 时, 由 (5.5) 中无穷远处增长性条件, 可得

$$\Phi(z)=\frac{\Phi^*(z)}{z^{-(m+1)}},\quad 其中\ \Phi^*(\infty)=0. \tag{5.17}$$

如果要求 (5.5) 的解满足 $[\Phi^*]^{\pm}\in\widehat{H}_0(+\infty)$, 则根据 (5.5) 中边界条件, 可知 $g\in\widehat{H}_{-(m+1),0}(+\infty)$ 是可解的必要条件.

问题 5.5 (跳跃问题 O_m) 寻求分区全纯函数 Φ, 以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线, 满足

$$\begin{cases}\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=g(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-m}\Phi,\infty]=1,\end{cases} \tag{5.18}$$

其中 $g\in H^*(0)\cap H_c(0,+\infty)$. 当 $m\geqslant 0$ 时, $g\in\widehat{H}_0(+\infty)$; 当 $m<0$ 时, $g\in\widehat{H}_{-m,0}(+\infty)$.

注 5.5 根据注 3.6, 在 (5.18) 中, 此时分区全纯函数 Φ 在无穷远处的阶是固定的 m 阶, 该问题通常被称为定阶跳跃问题. $g\equiv 0$ 时该问题通常被称为定阶的 Liouville 问题.

引理 5.4 当 $m\geqslant 0$ 时, 定阶跳跃问题 (5.18) 的解是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+p_m(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty), \tag{5.19}$$

其中 p_m 为任意 m 次的首一多项式.

当 $m<0$ 时, 跳跃问题 (5.18) 的解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty), \tag{5.20}$$

当且仅当可解条件

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_0^{+\infty}g(\tau)\tau^k d\tau=0,\quad k=0,1,\ldots,-m-2\quad (m=-1\ \text{时此条件不出现}),\\ \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_0^{+\infty}g(\tau)\tau^{-m-1}d\tau=-1\end{cases} \tag{5.21}$$

成立.

证明 利用定理 5.1 和推论 3.3, 可直接得出此结论. □

注 5.6 此引理在正实轴上正交多项式的渐近分析方面起着非常重要的作用, 但在已有文献中, 不少作者默认此结论成立并未给出详细的推导.

问题 5.6 (齐次问题) 寻求分区全纯函数 Φ, 以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线, 满足

$$\begin{cases}\Phi^+(x)=G(x)\Phi^-(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-(m+1)}\Phi,\infty]=0,\end{cases} \tag{5.22}$$

其中 $G(x)$ 满足 Hölder 连续条件

$$G \in H[0,+\infty), \tag{5.23}$$

以及正则性条件

$$G(x) \neq 0, \quad x \in [0,+\infty). \tag{5.24}$$

另外, 无穷远处增长性条件

$$G(+\infty) = 1, \quad \log G \in \widehat{H}_0(+\infty) \tag{5.25}$$

成立, 其中 $\log G$ 为 $(0,+\infty)$ 上单值连续分支使得 $(\log G)(+\infty) = 0$.

注 5.7 由于在 $[0,+\infty)$ 上正则条件 $G(x) \neq 0$, 我们可选取 $\log G$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单值连续分支. 此外, 由 $G(+\infty) = 1$, 可在 $(0,+\infty)$ 上选取单值连续分支满足 $(\log G)(+\infty) = 0$.

例 5.1 若 $G \equiv 1$, 则可选取 $\log G \equiv 0 \in \widehat{H}_{m,0}(+\infty)$, m 为任意整数. 若

$$G(\tau) = \begin{cases} \mathrm{e}, & 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}}, & \tau > 1, \end{cases} \tag{5.26}$$

取

$$\log G(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\tau}, & \tau > 1, \end{cases} \tag{5.27}$$

则 $\log G \in \widehat{H}_0(+\infty)$.

记

$$\frac{\log G(0)}{2\pi \mathrm{i}} = \alpha + \mathrm{i}\beta, \tag{5.28}$$

称整数

$$\kappa = -[\alpha] \tag{5.29}$$

为齐次问题 (5.22) 的指标, 其中 $[\alpha]$ 表示 α 的整数部分.

问题 5.7 (典则问题) 寻求分区全纯函数 Φ, 以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线, 满足

$$\begin{cases} \Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x), & x \in (0,+\infty), \\ \mathrm{G.P}[z^\kappa \Phi, \infty] = 1. \end{cases} \tag{5.30}$$

记

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{+\infty} \frac{\log G(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0,+\infty). \tag{5.31}$$

由正则条件 (5.24)、Hölder 连续性条件 (5.23) 和无穷远处增长性条件 (5.25), 可得

$$\log G \in H[0,+\infty) \cap \widehat{H}_0(+\infty), \tag{5.32}$$

从而, 由定理 3.1 和引理 3.3 可知,

$$\Gamma(\infty) = 0, \quad \Gamma(z) = -(\alpha + \mathrm{i}\beta)\log(-z) + \Delta(z), \tag{5.33}$$

其中 Δ 在 $z = 0$ 附近沿正实轴剖开的邻域中全纯且当 $z \to 0$ 时极限存在, $\ln w$ 由 (3.21) 所给定.

令
$$X(z)=z^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)},\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{5.34}$$
则由 (5.33), 可得
$$\mathrm{G.P}[z^{\kappa}X,\infty]=1,\quad \mathrm{G.P}[zX,0]=0,\tag{5.35}$$
利用 (5.32) 和引理 3.4, 可得
$$X^{+}(x)=G(x)X^{-}(x),\quad x\in(0,+\infty).\tag{5.36}$$
从而, 由 (5.35) 和 (5.36) 可知, X 是典则问题 (5.30) 的解.

注 5.8 仿照文献 [2,3], 我们对节点 $z=0$ 进行详细地分类. 从 (5.34)、(5.33) 和 (5.29) 可知, 当 (5.28) 中 α 是整数时, X^{-1} 在 $z=0$ 附近有界. 此时, 零点被称为特殊节点. 当 (5.28) 中 α 不是整数时, 零点称为普通节点. 此时, $X^{-1}(0)=0$, 这是由于 $X^{-1}(z)$ 中含有因子 $(-z)^{\alpha-[\alpha]}$, 故无论 z 以何种方式趋向于零, $X^{-1}(z)$ 的极限都为零.

另一方面, 若 Φ 是典则问题 (5.30) 的解, 令
$$Q(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)},\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{5.37}$$
则由注 5.8 可知, (5.37) 中所给定 Q 也是以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线的分区全纯函数, 又从 (5.30) 和 (5.35) 可知, 它满足
$$\begin{cases}Q^{+}(x)=Q^{-}(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[Q,\infty]=1,\end{cases}\tag{5.38}$$
因此, 由引理 5.4 知,
$$Q=1,\quad \text{即 } \Phi=X.\tag{5.39}$$

总结以上讨论可得下面引理.

引理 5.5 在条件 (5.23)–(5.25) 下, 典则问题 (5.30) 有唯一解 X, 它由 (5.34) 给出.

因此, 我们称 (5.34) 中 X 为齐次问题 (5.22) 的典则解. 利用该典则解, 容易得到齐次问题 (5.22) 的解.

显然, 若 Φ 是 (5.22) 的解, 则 (5.37) 中 Q 是如下 Liouville 问题的解:
$$\begin{cases}Q^{+}(x)=Q^{-}(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-(m+1+\kappa)}Q,\infty]=0.\end{cases}\tag{5.40}$$
利用引理 5.2, 可以直接得到
$$\Phi(z)=X(z)p_{\kappa+m}(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{5.41}$$
其中 κ 是 (5.29) 中所给的指标, $p_{\kappa+m}$ 是任意次数不超过 $\kappa+m$ 的多项式, 当 $\kappa+m<0$ 时, 约定 $p_{\kappa+m}=0$. 此外也可直接验证, (5.41) 中 Φ 确实是齐次问题 (5.22) 的解.

引理 5.6 当 $\kappa\geqslant -m$ 时, 齐次问题 (5.22) 的解是 (5.41). 当 $\kappa<-m$ 时, 齐次问题 (5.22) 有唯一解 $\Phi=0$.

现在求解 R_m 问题 (5.1). 为此, 利用 (5.30), 令

$$F(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)},\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{5.42}$$

那么, 由注 5.8 可知, F 是以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线的分区全纯函数. 非齐次问题 (5.1) 可转化为下面跳跃问题:

$$\begin{cases}F^+(x)=F^-(x)+\dfrac{g(x)}{X^+(x)},\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-(m+1+\kappa)}F,\infty]=0.\end{cases}\tag{5.43}$$

在 (5.23)–(5.25) 和 (5.6) 下, 可证下式成立:

$$\frac{g}{X^+}\in H_\rho^*(0)\cap H_c(0,+\infty)\cap\widehat{H}_{m_\kappa,0}(+\infty),\tag{5.44}$$

其中

$$m_\kappa=\max\{0,-(m+1+\kappa)\},\quad \rho<1.\tag{5.45}$$

事实上, 由定理 4.2 可知,

$$\frac{1}{X^+(t)}=\frac{X^*(t)}{t^{[\alpha]-\alpha-\mathrm{i}\beta}},\quad 其中\ X^*\in H(0).\tag{5.46}$$

为方便起见, 记

$$g(t)=\frac{g^*(t)}{t^\gamma},\quad 其中\ g^*\in H(0),\quad \alpha-[\alpha]<\gamma<1,\tag{5.47}$$

则有

$$\frac{g(t)}{X^+(t)}=\frac{f^*(t)}{t^\lambda},\quad 其中\ f^*\in H(0),\quad \lambda=\gamma+[\alpha]-\alpha-\mathrm{i}\beta,\tag{5.48}$$

从而有 (参见文献 [2, 第 222 页])

$$\frac{g}{X^+}\in H_\rho^*(0),\quad 其中\ \gamma+[\alpha]-\alpha<\rho<1.\tag{5.49}$$

利用引理 4.1、定理 4.4 和 (5.32) 可得

$$\Gamma^+\in H_c(0,+\infty)\cap\widehat{H}_0(+\infty),\tag{5.50}$$

从而,

$$X^+\in H_c(0,+\infty),\quad \mathrm{e}^{\Gamma^+(t)}\in\widehat{H}(+\infty).\tag{5.51}$$

因此, (5.6)、(5.49) 和 (5.51) 表明 (5.44) 是成立的.

利用定理 5.1, 可得到跳跃问题 (5.43) 的解为

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau-z)}d\tau+p_{m+\kappa}(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{5.52}$$

其中 $p_{\kappa+m}$ 是任意次数不超过 $\kappa+m$ 的多项式. 当 $m+\kappa<0$ 时, $R_{m+\kappa}$ 问题 (5.43) 有唯一解 $C[g/X^+]$, 它由 (5.8) 所给定, 或 (5.52) 中 $p_{m+\kappa}=0$, 且当且仅当可解条件

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^k d\tau=0,\quad k=0,1,\dots,-m-\kappa-2\tag{5.53}$$

成立. 这里, 当 $m+\kappa=-1$ 时, 可解条件 (5.53) 不出现.

若 Φ 是问题 (5.1) 的解, 则

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau-z)}d\tau+X(z)p_{m+\kappa}(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty). \tag{5.54}$$

反过来, 进一步可验证上式确实为 R_m 问题 (5.1) 的解. 显然, 要验证 Φ 满足 (5.1), 我们只需验证条件 $\mathrm{G.P}[z\Phi,0]=0$ 即可. 令

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau-z)}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty), \tag{5.55}$$

由引理 3.3 和 (5.48) 可得

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\lambda\pi}\frac{f^*(0)}{(-z)^\lambda}+\Psi(z),\quad \text{其中在 } z=0 \text{ 附近 } \Psi=O(|z|^{-\gamma-[\alpha]+\alpha}). \tag{5.56}$$

同时, 从 (5.33) 可知,

$$\text{在 } z=0 \text{ 附近},\quad \frac{X(z)}{(-z)^{[\alpha]-\alpha-\mathrm{i}\beta}}=O(1). \tag{5.57}$$

利用 (5.56)、(5.57) 以及 (5.47) 中 γ, 可得到

$$\text{在 } z=0 \text{ 附近},\quad \Phi=O(|z|^{-\gamma}),\quad \text{从而},\quad \mathrm{G.P}[z\Phi,0]=0. \tag{5.58}$$

总结以上讨论, 我们得到如下定理.

定理 5.2 在条件 (5.6) 和 (5.23)–(5.25) 下, R_m 问题 (5.1) 的解是 (5.54), 其中 $p_{m+\kappa}$ 是任意次数不超过 $m+\kappa$ 的多项式. 当 $\kappa+m=-1$ 时, 问题 (5.1) 有唯一解 (5.54) 且 $p_{m+\kappa}=0$. 当 $\kappa+m<-1$, 当且仅当满足可解条件 (5.53) 时, 问题有唯一解 (5.54), 其中 $p_{m+\kappa}(z)=0$.

6 矩阵值 Riemann 边值问题

本节将考虑正实轴上的下三角矩阵值 Riemann 边值问题, 该问题在正实轴上正交多项式的渐近分析中起着非常重要的作用. 对于一般的矩阵值 Riemann 边值问题, 可参见文献 [43].

设

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=\begin{pmatrix}\Phi_{1,1}(z) & \Phi_{1,2}(z)\\ \Phi_{2,1}(z) & \Phi_{2,2}(z)\end{pmatrix} \tag{6.1}$$

是定义在复平面 $\mathbb{C}$ 的子集 Ω 上的 2×2 矩阵值函数, 每一个元素 $\Phi_{j,k}$ 都是定义在 Ω 上的函数. 其中, 任何属于 $\boldsymbol{\Phi}$ 的性质 (如连续性和解析性等) 事实上是指所有元素 $\Phi_{j,k}$ 都具有相应的性质. 因此, $\boldsymbol{\Phi}\in\mathbf{A}(\mathbb{C}\setminus[0,+\infty))$, $\mathrm{G.P}[\boldsymbol{\Phi},\infty](z)$, $\mathrm{Ord}[\boldsymbol{\Phi},\infty](z)$, $\boldsymbol{\Phi}\in H(L)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathbf{A}(\Omega)$ 等含义是显然的. 特别地,

$$\lim_{z\to z_0}\boldsymbol{\Phi}(z)=\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是复值 2×2 矩阵,

$$a_{j,k}=\lim_{z\to z_0}\Phi_{j,k},\quad j,k=1,2. \tag{6.3}$$

问题 6.1 (矩阵值函数边值问题) 寻求以 $[0,+\infty)$ 为跳跃曲线的矩阵值分区全纯函数 $\mathbf{\Phi}$, 满足

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}^+(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w(x) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{\Phi}^-(x), \quad x \in (0,+\infty), \\ \mathrm{G.P}[\mathbf{\Xi\Phi}, \infty](z) = \boldsymbol{I}, \end{cases} \tag{6.4}$$

其中

$$\mathbf{\Xi}(z) = \begin{pmatrix} z^{-n} & 0 \\ 0 & z^n \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

$\boldsymbol{I}$ 是 2×2 单位矩阵,

$$w \in H_\alpha^*(0) \cap H_c(0,+\infty) \cap \widehat{H}_{2n,0}(+\infty), \quad \text{这里 } \alpha < 1, \tag{6.6}$$

并称它为 $(0,+\infty)$ 上的一个 (n) 级权函数.

例 6.1 取 $w(x) = w_{r,n}(x)$, $w_{r,n}(x)$ 由例 2.1 给出, 即

$$w_{r,n}(x) = x^r \mathrm{e}^{-2n/x}, \quad \text{其中 } r < -(2n+1), \tag{6.7}$$

那么,

$$w_{r,n} \in H[0,+\infty) \cap \widehat{H}_{2n,0}(+\infty) \tag{6.8}$$

是 $(0,+\infty)$ 上的 (n) 级权函数. 特别地, 取

$$r = \alpha_n - 2 = An + a - 2, \quad A \leqslant -2, \quad a < 1, \tag{6.9}$$

则

$$w_n = w_{\alpha_n - 2, n} \in H[0,+\infty) \cap \widehat{H}_{2n,0}(+\infty) \tag{6.10}$$

就是 $(0,+\infty)$ 上带变动大负参数的 Bessel 权函数[44].

例 6.2 取 $w(x) = v_{m,s}(x)$, $v_{m,s}(x)$ 由例 2.2 给出, 即

$$v_{m,s}(x) = x^m \mathrm{e}^{-x^s}, \quad \text{其中 } m > -1, \tag{6.11}$$

则

$$v_{m,s} \in H^*(0) \cap H_c(0,+\infty) \cap \widehat{H}_0(+\infty), \quad m > -1 \tag{6.12}$$

是 $(0,+\infty)$ 上的一个 (n) 级权函数 (n 为任意). 特别地, 取

$$v_{\alpha,1}(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-x}, \quad \alpha > -1, \tag{6.13}$$

那么, 对任意的 n,

$$v_{\alpha,1} \in H^*(0) \cap H_c(0,+\infty) \cap \widehat{H}_{2n,0}(+\infty) \tag{6.14}$$

就是 $(0,+\infty)$ 上经典的 Laguerre 权函数.

例 6.3 取 $w(x)=R_{n,s}(x)$, $R_{n,s}(x)$ 由例 2.3 给出, 即

$$R_{n,s}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}-x^s}. \tag{6.15}$$

从而,

$$R_{n,s}\in H[0,+\infty)\cap\widehat{H}_{2m,0}(+\infty) \tag{6.16}$$

是 $(0,+\infty)$ 上的一个 (m) 级权函数 (m 为任意). 特别地, 取

$$R_{1,1}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}-x}, \tag{6.17}$$

则对任意的 m,

$$R_{1,1}\in H[0,+\infty)\cap\widehat{H}_{2m,0}(+\infty) \tag{6.18}$$

正是文献 [45] 中给出的 $(0,+\infty)$ 上的权函数.

(6.4) 可以转化成为下面四个分区全纯函数的 Riemann 边值问题:

$$\begin{cases}\Phi_{1,1}^+(x)=\Phi_{1,1}^-(x), \quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-n}\Phi_{1,1}(z),\infty](z)=1,\end{cases} \tag{6.19}$$

$$\begin{cases}\Phi_{1,2}^+(x)=\Phi_{1,2}^-(x), \quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{-n}\Phi_{1,2}(z),\infty](z)=0,\end{cases} \tag{6.20}$$

$$\begin{cases}\Phi_{2,1}^+(x)=\Phi_{2,1}^-(x)+w(x)\Phi_{1,1}^-(x), \quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{n}\Phi_{2,1}(z),\infty](z)=0,\end{cases} \tag{6.21}$$

$$\begin{cases}\Phi_{2,2}^+(x)=\Phi_{2,2}^-(x)+w(x)\Phi_{1,2}^-(x), \quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{n}\Phi_{2,2}(z),\infty](z)=1.\end{cases} \tag{6.22}$$

(6.19) 是一个定阶的 Liouville 问题. 由引理 5.4 可知, 它的解为

$$\Phi_{1,1}(z)=p_n(z) \quad (p_n \text{ 是 } n \text{ 次首一多项式}). \tag{6.23}$$

将 (6.23) 代入 (6.21) 可得

$$\begin{cases}\Phi_{2,1}^+(x)=\Phi_{2,1}^-(x)+w(x)p_n(x), \quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^{n}\Phi_{2,1}(z),\infty](z)=0,\end{cases} \tag{6.24}$$

这是一个 R_{-1-n} 跳跃问题. 由 (6.6) 可得

$$wp_n\in H_\alpha^*(0)\cap H_c(0,+\infty)\cap\widehat{H}_{n,0}(+\infty), \quad \text{其中 } \alpha<1. \tag{6.25}$$

因此, 利用定理 5.1 可知, 当且仅当

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}w(\tau)p_n(\tau)\tau^k d\tau=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1 \tag{6.26}$$

时, 有

$$\begin{aligned}\Phi_{2,1}(z)&=C[wp_n](z)\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{w(\tau)p_n(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty).\end{aligned}\tag{6.27}$$

(6.26) 表明 p_n 是 $(0,+\infty)$ 上关于权函数 w 的首一正交多项式. 令

$$f^*(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{w(\tau)f(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\tag{6.28}$$

我们称其为 f 关于权函数 w 的相伴函数, 此函数在正交多项式 Riemann-Hilbert 渐近分析中起着非常重要的作用.

(6.20) 也是一个 Liouville 问题. 通过引理 5.2, 可得到其解为

$$\Phi_{1,2}(z)=q_{n-1}(z)\quad(\text{次数不超过 }n-1\text{ 的多项式}).\tag{6.29}$$

将其代入 (6.22) 中, 则有

$$\begin{cases}\Phi_{2,2}^+(x)=\Phi_{2,2}^-(x)+w(x)q_{n-1}(x),\quad x\in(0,+\infty),\\ \mathrm{G.P}[z^n\Phi_{2,2}(z),\infty](z)=1.\end{cases}\tag{6.30}$$

这是一个定阶跳跃问题. 由引理 5.4 可得

$$\begin{aligned}\Phi_{2,2}(z)&=C[wq_{n-1}](z)\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{w(\tau)q_{n-1}(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\end{aligned}\tag{6.31}$$

当且仅当满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_0^{+\infty}w(\tau)q_{n-1}(\tau)\tau^kd\tau=0,\quad k=0,1,\ldots,n-2,\\ \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_0^{+\infty}w(\tau)q_{n-1}(\tau)\tau^{n-1}d\tau=-1.\end{cases}\tag{6.32}$$

(6.32) 表明 q_{n-1} 是 $(0,+\infty)$ 上关于权函数 w 正交的 $n-1$ 次多项式, 即

$$q_{n-1}=-2\pi\mathrm{i}\|p_{n-1}\|^{-2}p_{n-1},\tag{6.33}$$

其中

$$\|p_{n-1}\|=\left[\int_0^{+\infty}w(\tau)p_{n-1}^2(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}.$$

定理 6.1　若权函数 w 由 (6.6) 给出, 则矩阵值边值问题 (6.4) 的解是

$$\mathbf{\Phi}(z)=\begin{pmatrix}p_n(z)&-2\pi\mathrm{i}\|p_{n-1}\|^{-2}p_{n-1}(z)\\ p_n^*(z)&-2\pi\mathrm{i}\|p_{n-1}\|^{-2}p_{n-1}^*(z)\end{pmatrix},\tag{6.34}$$

其中 p_n 是 $(0,+\infty)$ 上关于权函数 w 正交的首一多项式, p_n^* 是 p_n 关于权函数 w 的相伴函数, 它由 (6.28) 给出.

矩阵值边值问题 (6.4) 为 $(0,+\infty)$ 上关于权函数 w 正交的首一多项式 p_n 所刻画. 因此, 我们称该问题为 $(0,+\infty)$ 上关于权函数 w 正交的首一多项式的 Riemann-Hilbert 特征刻画, 或者称 p_n 为矩阵值边值问题 (6.4) 的特征正交多项式.

推论 6.1 当 $w=w_n$ 由例 6.1 中 (6.10) 给定时, 矩阵值边值问题 (6.4) 的特征正交多项式 p_n 就是带变动大负参数的 Bessel 多项式[44].

推论 6.2 当 $w=v_{\alpha,1}$ 由例 6.2 中 (6.13) 给出时, 矩阵值边值问题 (6.4) 的特征正交多项式 p_n 正好是经典的 Laguerre 多项式.

推论 6.3 当 $w=R_{1,1}$ 由例 6.3 中 (6.17) 给出时, 矩阵值边值问题 (6.4) 的特征正交多项式 p_n 就是文献 [45] 中给出的正交多项式.

致谢 作者非常感谢审稿人细致的工作和有益的建议.

参考文献

1 Gakhov F D. Boundary Value Problems. Moscow: Nauka, 1977
2 Lu J K. Boundary Value Problems for Analytic Functions. Singapore: World Scientific, 1993
3 Muskhelishvili N I. Singular Integral Equations, 2nd ed. Groningen: P. Noordhoff N. V., 1953
4 Babaev A A, Salaev V V. Boundary-value problems and singular equations on a rectifiable contour. Math Notes, 1982, 31: 290–295
5 Kats B A. On the exceptional case of the Riemann problem with an oscillating coefficient. Izv Vyssh Uchebn Zaved Mat, 1981, 12: 41–50
6 Kats B A, Pogodina A Y. The jump problem and the Faber-Schauder series. Russian Math, 2007, 51: 13–18
7 Kats B A. On solvability of the jump problem. J Math Anal Appl, 2009, 356: 577–581
8 Pena D, Reyes J. Riemann boundary value problem on a regular open curve. J Nat Geom, 2002, 22: 1–18
9 Plaksa S A, Kud'yavina Y V. Riemann boundary-value problem on an open rectifiable Jordan curve, I; II. Ukrainian Math J, 2011, 62: 1752–1765; 1925–1940
10 Seifullaev R K. The Riemann boundary value problem on a nonsmooth open curve. Math USSR Sb, 1981, 40: 135–148
11 Bernstein S. On the left linear Riemann problem in Clifford analysis. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 1996, 3: 557–576
12 Blaya R A, Reyes J B. Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces. Adv Appl Clifford Algebr, 1999, 9: 1–22
13 Bu Y D, Du J Y. The RH boundary value problem of the k-monogenic functions. J Math Anal Appl, 2008, 347: 633–644
14 Gong Y F, Du J Y. A kind of Riemann and Hilbert boundary value problem for left monogenic function in $\mathbb{R}^n$ $(m \geqslant 2)$. Complex Var Theory Appl, 2004, 49: 303–318
15 Gürlebeck K, Zhang Z X. Some Riemann boundary value problems in Clifford analysis. Math Methods Appl Sci, 2010, 33: 287–302
16 Si Z W, Du J Y, Duan P. The left Hilbert BVP for h-regular functions in Clifford analysis. Adv Appl Clifford Algebr, 2013, 23: 519–533
17 Xu Z Y. Riemann boundary value problems for regular functions in Clifford algebra. Chinese Sci Bull, 1987, 32: 476–477
18 Zhang Z X, Du J Y. On certain Riemann boundary value problems and singular integral equations in Clifford analysis. Chinese J Contemp Math, 2001, 22: 237–244
19 Begehr H, Du J Y, Wang Y F. A Dirichlet problem for polyharmonic functions. Ann Mat Pura Appl (4), 2008, 187: 435–457
20 Du J Y, Wang Y F. Riemann boundary value problems of polyanalytic functions and metaanalytic functions on the closed curves. Complex Var Theory Appl, 2005, 50: 521–533
21 Mashimba A S. The generalized Riemann-Hilbert boundary value problem for nonhomogeneous polyanalytic differential equation of order n in the Sobolev space $W_{n,p}(D)$. Z Anal Anwend, 1999, 18: 611–624
22 Wang Y F, Du J Y. On Riemann boundary value problem for polyanalytic functions on the real axis. Acta Math Sci,

2004, 24: 663–671
23 Wang Y F, Wang Y J. On Schwarz-type boundary value problems of polyanalytic equation on a triangle. Ann Univ Paedagog Crac Stud Math, 2010, 9: 69–78
24 Wang Y F. On modified Hilbert boundary value problems of polyanalytic functions. Math Methods Appl Sci, 2009, 32: 1415–1427
25 Wang Y F, Du J Y. Haseman boundary value problem for bianalytic functions with different shifts on the unit circumference. J Appl Funct Anal, 2007, 2: 147–158
26 Wang Y F. Schwarz-type boundary value problems for the polyanalytic equation in the half unit disc. Complex Var Elliptic Equ, 2012, 57: 983–993
27 Du J Y, Wang Y. Mixed boundary value problem for some pairs of metaanalytic function and analytic function. Math Methods Appl Sci, 2008, 31: 1761–1779
28 Fatulaev B F. The main Haseman type boundary value problem for metaanalytic function in the case of circular domains. Math Model Anal, 2001, 6: 68–76
29 Wang Y F, Du J Y. On Haseman boundary value problem for a class of metaanalytic functions. Acta Math Sci, 2011, 31: 39–48
30 Wang Y, Du J Y. Mixed boundary value problems with a shift for a pair of metaanalytic and analytic functions. J Math Anal Appl, 2010, 369: 510–524
31 Wang Y, Du J Y. On Haseman boundary value problem for a class of metaanalytic functions with different factors on the unit circumference. Math Methods Appl Sci, 2010, 33: 576–584
32 Wang Y, Li D H, Ku M. On compound boundary value problem for a class of metaanalytic functions. J Math (PRC), 2011, 31: 615–620
33 Du J Y, Chen L. A mixed boundary value problem for some pair of functions. Complex Var Elliptic Equ, 2007, 52: 865–876
34 Dai D, Wong R. Global asymptotics for Laguerre polynomials with large negative parameter—A Riemann-Hilbert approach. Ramanujan J, 2008, 16: 181–209
35 Deift P, Kriecherbauer T, McLaughlin K T, et al. A Riemann Hilbert approach to asymptotic questions for orthogonal polynomials. J Comput Appl Math, 2001, 133: 47–63
36 Deift P, Zhou X. A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problem, asymptotics for the MKdV equation. Ann of Math (2), 1993, 137: 295–368
37 Kuijlaars A B, McLaughlin K T. A Riemann Hilbert problem for biorthogonal polynomials. J Comput Appl Math, 2005, 178: 313–320
38 Kuijlaars A B, McLaughlin K T. Riemann-Hilbert analysis for Laguerre polynomials with large negative parameter. Comput Methods Funct Theory, 2001, 1: 205–233
39 Lubinsky D S. Asymptotic of orthogonal polynomials: Some old, some new, some identites. Acta Appl Math, 2000, 61: 207–256
40 Wang Z, Wong R. Uniform asymptotics of the Stieltjes-Wigert polynomials via the Riemann-Hilbert approach. J Math Pures Appl (9), 2006, 85: 698–718
41 Wong R, Zhang W J. Uniform asymptotics for Jocobi polynomials with varying large negative parameters—A Riemann-Hilbert approach. Trans Amer Math Soc, 2006, 385: 2663–2694
42 Ahlfors L V. Complex Analysis. New York: McGraw-Hill Companies, 1979
43 Litvinchuk G S, Spitkovskii I M. Factorization of Measurable Matrix Functions. Berlin: Akademie-Verlag, 1987
44 Duan P, Du J Y. Riemann-Hilbert characterization for main Bessel polynomials with varying large negative parameters. Acta Math Sci, 2014, 34: 557–567
45 Gautschi W. Computing polynomials orthogonal with respect to densely oscillating and exponentially decaying weight functions and related integrals. J Comput Appl Math, 2005, 184: 493–504

Riemann boundary value problems on the positive real axis

WANG Ying, DUAN Ping & DU JinYuan

Abstract In this paper, some Riemann boundary value problems on the positive real axis are presented. Firstly, we introduce the concepts of principle part and order at infinity and zero point for the holomorphic function on the complex plane cut along the positive real axis, which are more extensive than those in the classic sense. Then, the behaviors of Cauchy-type integral and Cauchy principal value integral on the positive real axis at infinity and zero point are discussed, respectively. Based on those, Riemann boundary value problems for sectionally holomorphic functions with the positive real axis as their jump curve are established explicitly, which are different from Riemann problems on the finite curves and more complicated than those on the whole real axis. Finally, some boundary value problems for matrix-valued functions are also constructed, which play a very important role in the asymptotic analysis for orthogonal polynomials on the positive real axis.

Keywords **principal part, order, Cauchy-type integral, Riemann problem, matrix-valued functions**

MSC(2010) **30E25, 45E05**

doi: 10.1360/N012016-00146