

不同GPS接收机观测值的随机模型评估

李博峰^①, 沈云中^{①②}, 徐培亮^③

① 同济大学测量与国土信息工程系, 上海 200092;

② 国家测绘局现代工程测量重点实验室, 上海 200092;

③ Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Uji, Kyoto 611-0011, Japan

E-mail: bofeng_li@163.com

2008-03-07 收稿, 2008-05-21 接受

国家自然科学基金(批准号: 40674003)、Japan Grant-in-Aid for Scientific Research 项目(编号: B19340129)和上海市科学技术委员会(批准号: 06DZ22101)资助

摘要 根据最小二乘准则或其他准则解算参数的最优估值时, 需要已知观测值的随机模型. 随机模型正确与否将影响参数估值, 因此, 快速高精度 GPS 定位需要已知正确的随机模型. 采用 GPS 短基线实测数据, 估计了两种 GPS 接收机观测值的随机模型, 分析了不同类型数据的精度及其与高度角的关系, 时间相关性以及不同类型数据之间的交叉相关性. 结果表明: 通常采用的独立等权随机模型不适用于 GPS 观测值; 根据高度角定权并不适应于所有接收机和所有类型的观测数据; 随机模型中应考虑时间相关性和交叉相关性; 随机模型与接收机和观测数据类型密切相关, 不同接收机应采用不同的随机模型.

关键词
全球定位系统
随机模型
高度角加权
时间相关
交叉相关

观测值的随机模型影响着线性(或线性化)观测方程的参数估值及其精度评定. 随机模型刻画了观测值的精度(方差)及其相关关系(协方差); 如果确定得不正确, 必然会影响到参数的估值和精度. 因此, 近年来随机模型再次成为数据处理研究的热点, 针对最小方差估计, 最小二乘估计, 极大似然估计, 最小范数二次无偏估计, 最优不变二次无偏估计等方法, 提出了许多行之有效的简化算法^[1~8]. Xu等人^[5]在总结前有方法的基础上, 提出了方差分量可估性概念, 并指出最多只有 $r(r+1)/2$ 个元素可估, 其中 r 为多余观测数.

高精度GPS定位必须采用正确的随机模型, 因此, 近年来许多学者对GPS随机模型进行了研究^[9~15]. Euler和Goad^[9]提出了根据卫星高度角确定权的模型, 并取得了良好的效果^[15], 然而观测数据间的相关信息依然被忽略; Wang等人^[10,11,14]在GPS基线解算中, 采用MINQUE方法同时估计协方差矩阵, 改善了基线结果, 但该方法在实际应用中极不方便且只适用于在整个观测序列中观测值之间的时间相关性和观测值的方差为常数的情况; Bona^[12]以及Tiberius和

Kenselaar^[16]采用零基线观测数据, 分析了观测值精度与高度角的关系、同类观测值之间的相关性以及不同类观测值之间的交叉相关性; 何海波和杨元喜^[17]提出了一种基于移动窗口实时估计双差观测值先验方差-协方差矩阵的方法, 在动态定位中取得较好效果. 本文采用短基线GPS实测数据, 分析不同接收机的不同类观测值精度及其与高度角的关系, 时间相关性以及不同类观测值之间的交叉相关性.

1 基于已知基线和模糊度约束的 GPS 单差观测模型

1.1 GPS 单差观测方程的参数重整

短基线的双差观测模型消除了接收机和卫星钟差, 并大大削弱了对流层和电离层等各项系统误差, 且模糊度具有整数特性, 因而广泛应用于GPS定位. 然而, 在方差分量估计中, 通常采用单差模型^[12,13,15,16], 原因有: (i) 由原始观测值组成单差观测值非常简单, 不需要参考卫星; (ii) 单基线单差观测值没有引入数学相关性, 其协方差阵仍是对角阵, 方差数值是原始观测值方差的 2 倍; (iii) 从单差观测方程的残差

出发,更容易计算与卫星有关的随机模型项(如卫星间的相关性).

采用长度约5 m的短基线单差观测值,忽略残留对流层、电离层和多路径等误差的影响,其观测方程为

$$\begin{aligned}\nabla P_{L1}^s &= \nabla \rho^s + \nabla \delta t_{L1} + \nabla \delta t_{0,L1} - \lambda_1 \nabla N_{L1}^s + \nabla \varepsilon_{L1}^s, \\ \nabla P_{P1}^s &= \nabla \rho^s + \nabla \delta t_{P1} + \nabla \delta t_{0,P1} + \nabla \varepsilon_{P1}^s,\end{aligned}\quad (1)$$

其中, ∇ 为单差算子; ∇P_{L1}^s 和 ∇P_{P1}^s 分别为单差 $L1$ 载波观测值和 $P1$ 码观测值; $\nabla \rho^s$ 为单差卫地距; $\nabla \delta t_{L1}$, $\nabla \delta t_{P1}$, $\nabla \delta t_{0,L1}$, $\nabla \delta t_{0,P1}$, $\nabla \varepsilon_{L1}^s$ 和 $\nabla \varepsilon_{P1}^s$ 分别为单差 $L1$ 和 $P1$ 的接收机钟差、硬件延迟和观测噪声; ∇N_{L1}^s 是单差 $L1$ 载波模糊度, λ_1 为 $L1$ 的载波波长, 上标“s”表示卫星. 对于 $L2$ 载波相位、 $C1$ 码和 $P2$ 码伪距可类似地给出相应的观测方程.

为了利用双差模糊度的整数特性, 假设参考卫星为 r , 将(1)式中的相位观测方程重整为

$$\begin{aligned}\nabla P_{L1}^s &= \nabla \rho^s + \nabla \delta t_{L1} + \nabla \delta t_{0,L1} - \lambda_1 (\nabla N_{L1}^s - \nabla N_{L1}^r) \\ &\quad + \nabla N_{L1}^r + \nabla \varepsilon_{L1}^s = \nabla \rho^s + \nabla \delta t_{L1} - \lambda_1 \Delta N_{L1}^{rs} + \nabla \varepsilon_{L1}^s,\end{aligned}\quad (2a)$$

其中, 相位等效钟差 $\nabla \delta t_{L1} = \nabla \delta t_{L1} + \nabla \delta t_{0,L1} - \lambda_1 \nabla N_{L1}^r$; ΔN_{L1}^{rs} 是双差整周模糊度. 合并伪距观测方程中的接收机钟差和硬件延迟, (1) 式中的伪距观测方程重整为

$$\nabla P_{P1}^s = \nabla \rho^s + \nabla \delta t_{P1} + \nabla \varepsilon_{P1}^s, \quad (2b)$$

其中, 伪距等效钟差 $\nabla \delta t_{P1} = \nabla \delta t_{P1} + \nabla \delta t_{0,P1}$.

1.2 已知基线与模糊度的 GPS 单差观测方程

将采用长时间双差观测值计算得到的基线和模糊度作为已知值, 代入重整后的单差观测方程(2), 得到基线与模糊度已知的单差观测方程:

$$\nabla \tilde{P}_{P1}^s = \nabla P_{P1}^s - \nabla \rho^s = \nabla \delta t_{P1} + \nabla \varepsilon_{P1}^s, \quad (3)$$

$$\nabla \tilde{P}_{L1}^s = \lambda_1 \nabla \varphi_{L1}^s - \nabla \rho^s + \lambda_1 \Delta N_{L1}^{rs} = \nabla \delta t_{L1} + \nabla \varepsilon_{L1}^s,$$

假设跟踪 m 颗卫星, 则一个历元的 $P1$ 码伪距单差观测方程为

$$\nabla \tilde{P}_{P1} = \mathbf{e}_m \nabla \delta t_{P1} + \nabla \varepsilon_{P1}, \quad (4)$$

其中, 观测向量 $\nabla \tilde{P}_{P1} = (\nabla \tilde{P}_{P1}^{s_1} \quad \nabla \tilde{P}_{P1}^{s_2} \quad \cdots \quad \nabla \tilde{P}_{P1}^{s_m})^T$; 设计矩阵 $\mathbf{e}_m = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)_{m \times 1}^T$; 噪声向量 $\nabla \varepsilon_{P1} = (\nabla \varepsilon_{P1}^{s_1} \quad \nabla \varepsilon_{P1}^{s_2} \quad \cdots \quad \nabla \varepsilon_{P1}^{s_m})^T$; 上标“ s_i ”表示跟踪的第 i 颗卫星. 可类似给出其他类型观测值的观测方程.

2 GPS 观测数据的随机模型评估

这里只以伪距观测值为例, 给出计算公式. 由于

固定了模糊度参数, 相位观测值的计算公式完全类似.

2.1 同类观测值的精度估计

假设同类观测值等精度且不相干, 不同类型观测值的方差不同, (4)式对应的协方差矩阵为

$$D(\nabla \tilde{P}_{P1}) = \mathbf{Q}_{\nabla P1} = \sigma_{\nabla P1}^2 \mathbf{I}_m, \quad (5)$$

其中, $\sigma_{\nabla P1}^2$ 为单差 $P1$ 码方差; $\mathbf{I}_m$ 为 m 阶单位阵. 由于采用相同的接收机与天线, 且超短基线两端的观测环境相同, 两测站的非差观测值等精度, 则

$$\mathbf{Q}_{\nabla P1} = 2\mathbf{Q}_{P1}, \quad (6)$$

其中, $\mathbf{Q}_{P1}$ 为非差观测值的协方差阵. 所以, 单历元非差 $P1$ 码伪距精度

$$\sigma_{P1} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{2(m-1)}}, \quad (7)$$

其中, 单历元 $P1$ 单差观测值的残差向量 $\mathbf{v} = \nabla \tilde{P}_{P1} - \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T \nabla \tilde{P}_{P1} / m$.

2.2 观测值精度与卫星高度角的关系

由于高度角在短时间内(几秒钟)变化很小, 可认为同一颗卫星观测值精度保持不变. 设在短时间内连续观测 n 个历元, 相应的单差观测值的协方差矩阵为

$$\mathbf{Q}_{\nabla P1}^n = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{Q}_{\nabla P1}, \quad (8)$$

其中, $\mathbf{Q}_{\nabla P1} = \text{diag}((\sigma_{\nabla P1}^{s_1})^2 (\sigma_{\nabla P1}^{s_2})^2 (\sigma_{\nabla P1}^{s_m})^2)$ 为单历元单差观测值的协方差矩阵, $\text{diag}(\cdot)$ 为由向量生成对角矩阵的函数, “ $\otimes$ ”是 Kronecker 积算子. $\sigma_{\nabla P1}^{s_i}$ 为第 i 颗卫星观测值的标准差. 采用 n 个历元的观测数据, 可导出第 i 颗卫星的非差观测值精度为

$$\sigma_{P1}^{s_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_j^i)^2 / 2nr_j^i}, \quad (9)$$

其中, 历元 j 卫星 i 的观测值残差 $v_j^i = \nabla \tilde{P}_{P1,j}^{s_i} - \sum_{k=1}^m \nabla \tilde{P}_{P1,j}^{s_k} / m$; r_j^i 为历元 j 对应于卫星 i 观测值的多余观测分量, 根据(4)式, 可推导出它在各历元的数值都是 $(m-1)/m$. 根据(9)式估计观测值的精度并记录对应的高度角, 统计得出观测值精度与高度角的关系.

2.3 时间相关性估计

为了探讨同一颗卫星观测数据序列的时间相关性, 忽略卫星之间的相关性. 采用 n 个历元观测数据序列, 则单差协方差阵为

$$D \begin{pmatrix} \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1,1} \\ \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1,2} \\ \vdots \\ \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\nabla P1,1}^2 \mathbf{I}_m & \rho_{12} \sigma_{\nabla P1,1} \sigma_{\nabla P1,2} \mathbf{I}_m & \cdots & \rho_{1n} \sigma_{\nabla P1,1} \sigma_{\nabla P1,n} \mathbf{I}_m \\ \rho_{21} \sigma_{\nabla P1,2} \sigma_{\nabla P1,1} \mathbf{I}_m & \sigma_{\nabla P1,2}^2 \mathbf{I}_m & \cdots & \rho_{2n} \sigma_{\nabla P1,2} \sigma_{\nabla P1,n} \mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} \sigma_{\nabla P1,n} \sigma_{\nabla P1,1} \mathbf{I}_m & \rho_{n2} \sigma_{\nabla P1,n} \sigma_{\nabla P1,2} \mathbf{I}_m & \cdots & \sigma_{\nabla P1,n}^2 \mathbf{I}_m \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中, 历元 i 的方差 $\sigma_{\nabla P1,i}^2 = 2\sigma_{P1,i}^2$ 采用(7)式计算; $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ 是相关系数. 自相关函数是描述时间相关性的重要数学工具, 其定义为

$$\rho_\tau = \rho_{ij} = \rho_{ji}, \quad \tau = |i - j|, \quad (i, j = 1, \cdots, n), \quad (11)$$

推导可得自相关函数中自相关系数计算公式

$$\rho_\tau = \frac{1}{2(n-\tau)} \sum_{i=1}^{n-\tau} \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_{i+\tau}}{\sqrt{r_i r_{i+\tau}} \sigma_{P1,i} \sigma_{P1,i+\tau}}, \quad 1 \leq \tau \leq n-1, \quad (12)$$

其中, $\mathbf{v}_i = \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1,i} - \mathbf{e}_m \sum_{j=1}^m \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1,i}^{S_j} / m$ 为第 i 个历元单差观测值的残差向量; $\sigma_{P1,i}$ 和 $\sigma_{P1,i+\tau}$ 分别为历元 i 和 $i+\tau$ 的非差观测值标准差; r_i 和 $r_{i+\tau}$ 分别为历元 i 和 $i+\tau$ 的观测值向量的多余观测数且 $r_i = r_{i+\tau} = m-1$.

2.4 交叉相关性估计

为了探讨不同类观测值之间的相关性, 称之为交叉相关性, 以 $P1$ 和 $P2$ 两类观测值为例, 给出其单历元单差观测值的随机模型

$$D \begin{pmatrix} \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1} \\ \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\nabla P1}^2 \mathbf{I}_m & \rho_{P1,P2} \sigma_{\nabla P1} \sigma_{\nabla P2} \mathbf{I}_m \\ \rho_{P2,P1} \sigma_{\nabla P2} \sigma_{\nabla P1} \mathbf{I}_m & \sigma_{\nabla P2}^2 \mathbf{I}_m \end{pmatrix}. \quad (13)$$

同样, 单差观测值精度 $\sigma_{\nabla P1}$ 和 $\sigma_{\nabla P2}$ 根据(7)式计算, 交叉相关系数 $\rho_{P1,P2} = \rho_{P2,P1}$ 根据(14)式计算,

$$\rho_{P1,P2} = \frac{\mathbf{v}_{P1}^T \mathbf{v}_{P2}}{2\sqrt{r_{P1} r_{P2}} \sigma_{P1} \sigma_{P2}}, \quad (14)$$

其中, $\mathbf{v}_{P1} = \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1}^{S_i} - \mathbf{e}_m \sum_{l=1}^m \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P1}^{S_l} / m$ 和 $\mathbf{v}_{P2} = \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P2}^{S_i} - \mathbf{e}_m \sum_{l=1}^m \nabla \tilde{\mathbf{P}}_{P2}^{S_l} / m$ 分别为 $P1$ 和 $P2$ 单差观测值的残差向量; r_{P1} 和 r_{P2} 分别为单历元 $P1$ 和 $P2$ 单差观测值向量的多余观测数且 $r_{P1} = r_{P2} = m-1$. 其他类型观测值间的交叉相关性计算公式类似.

3 结果与分析

根据上述计算公式, 对多种接收机进行了计算

分析, 由于不影响结论的正确性, 本文只给出 Ashtech Z12 和 DSNP 两种接收机短基线观测数据的计算结果. 表 1 为实验数据的相关信息. 事先采用所有的双差相位观测值得基线向量和整数模糊度, 将该估值作为已知值组成单差观测方程, 估算 GPS 单差观测值的随机模型. 由于试验分别采用 18500 和 5500 个历元, 解得的基线可视为真值, 确保不影响随机模型的估值精度.

根据(7)式, 分别计算了这两种接收机五类非差观测值的单历元精度估值序列, 在每类观测值的精度估值序列中, 剔除异常估值, 然后取平均得到每类非差观测值的精度均值, 如表 2 和 3 的对角元素所示. 结果表明, Ashtech 接收机的三种伪距精度相当, 且都在 0.25 m 以内; 值得注意的是 Ashtech 接收机的 C1 码精度略优于 P 码精度. 其原因可能是我们通常采用 Z 跟踪技术对 $P(Y)$ 码解码, 获得了比理论精度低的实际 P 码观测值, 加之不同接收机对不同类型的伪距观测值滤波程度不同, 从而导致不同接收机的不同伪距观测精度不同, 即某些接收机的 C1 码精度有可能高于 P 码精度^[18]. DSNP 接收机的 P 码伪距精度明显优于 C1 码伪距精度, 但都比 Ashtech 伪距精度差; Ashtech 接收机 $L1$ 和 $L2$ 载波相位精度都优于 4 mm 且没有明显差别, 而 DSNP 接收机的 $L1$ 载波相位精度为 2.8 mm, 但 $L2$ 的精度较差, 达到 7.2 mm.

为了探讨观测值精度与高度角之间的关系, 依次采用 10 个历元, 按(9)式计算每颗卫星观测值的精度并记录高度角信息. 在长时间高采样率观测值中, 剔除异常估值后, 同一高度角总是对应多个精度估值, 取其平均值作为该高度角所对应的观测值精度. 如图 1, 2 所示, 依次绘制了 Ashtech 与 DSNP 接收机的 C1, $P1$, $P2$, $L1$ 和 $L2$ 观测值精度与高度角的关系. 对于 Ashtech 接收机, 所有类型观测值的精度与高度角明显相关, 高度角低于 10° 与高于 80° 的观测精度之比大于 3, 尤其对于相位观测值, 该比值达到 7; 然而,

表 1 两种接收机观测数据信息

接收机	观测类型	基线长/m	采样率	截止高度角/(°)	观测历元
Ashtech Z12	C1/P1/P2/L1/L2	4.705	1s	10	18500
DSNP	C1/P1/P2/L1/L2	6.446	1s	10	5500

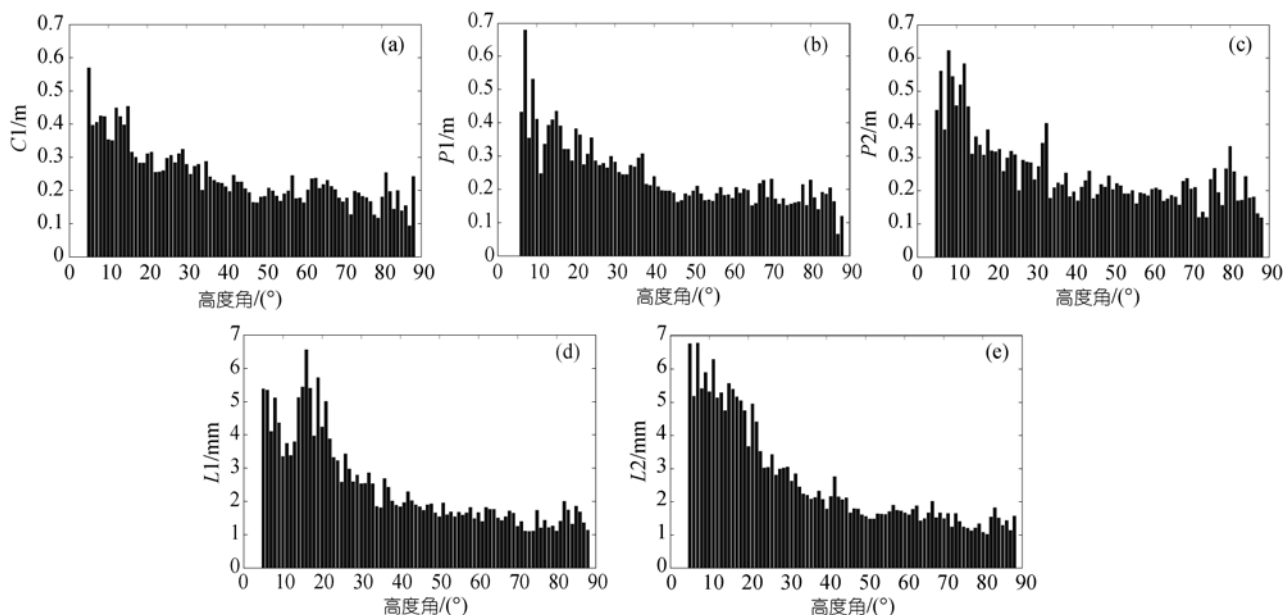


图 1 Ashtech 接收机观测值精度与高度角的关系

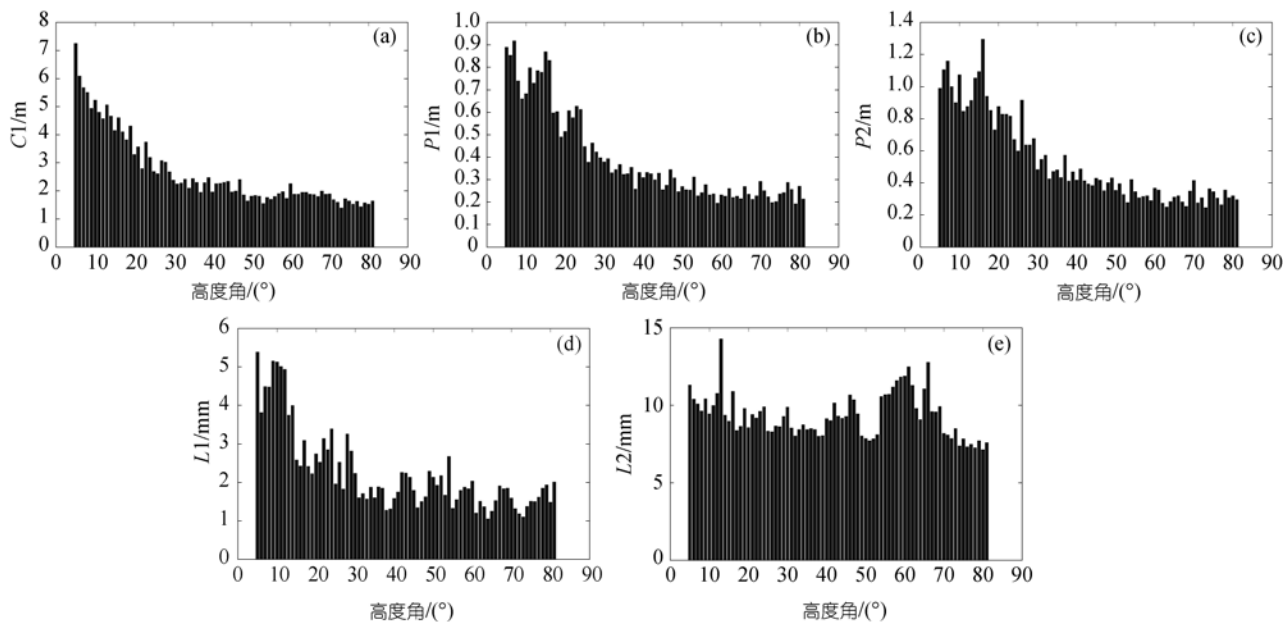


图 2 DNSP 接收机观测值精度与高度角的关系

DNSP 接收机的 $L2$ 观测值精度与高度角的关系不明显. 由此可见: 观测值精度与高度角相关与否及其相关程度都与接收机和观测数据类型密切相关, 不能简单地用相同的高度角加权函数进行处理, 应该根据接收机和观测值类型采用合理的高度角加权函数.

如果接收机采用了滤波技术提高观测值精度, 必将导致观测值序列存在时间相关性. 按照(12)式计算了各类观测值的自相关系数, 图 3 和 4 分别为 Ashtech

和 DNSP 接收机的自相关系数序列. 显然, Ashtech 接收机每类观测值的时间相关性窗口较大, 在 50 s 内的相关系数都大于 0.5; 而 DNSP 接收机不同类型观测数据的时间相关性有明显差异, $C1$ 码时间相关性窗口非常小, 6 s 后时间相关性消失; $P1$ 码和 $P2$ 码的时间相关性 30 s 后减小至 0.2, 随着时间窗口的增大, 相关性很快减弱; 而 $L1$ 相位的时间相关性随着相关时间的延续, 减小的速度较慢, 50 s 之前相关系数仍

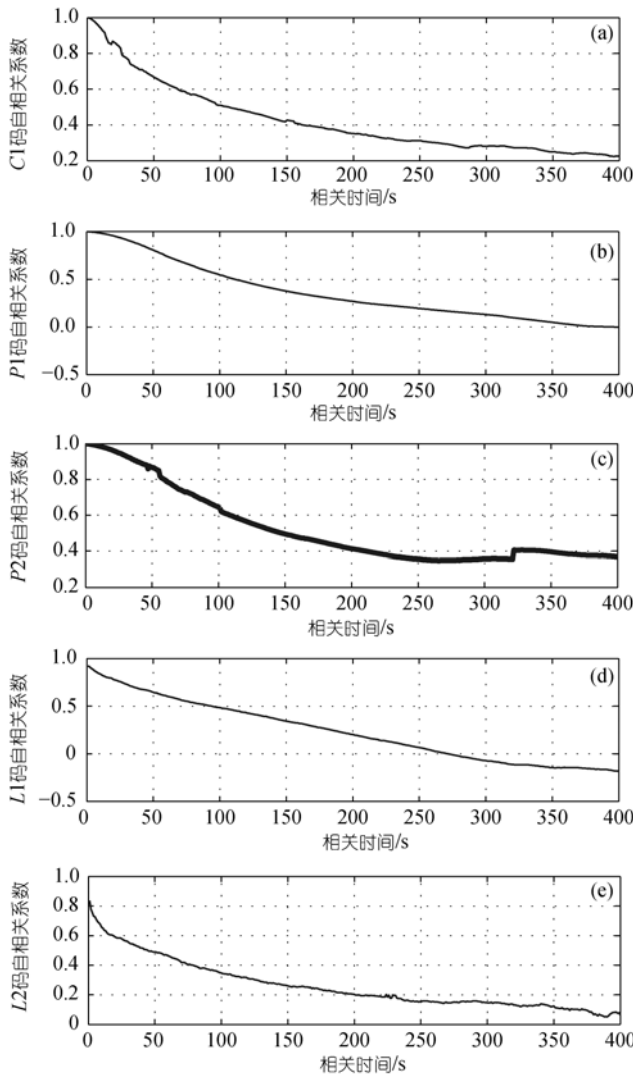


图3 Ashtech接收机时间相关性

然大于 0.5, 但是随着时间窗口的增大, 相关系数趋于稳定值 0.2; L2 相关性在 1 s 时已减弱为 0.35, 随着相关窗口增大, 相关性继续减弱. 通过分析得出: 精度高的观测类型相关时间延迟一般较长, 换句话说, 观测值精度高的主要原因是由于长时间尺度的滤波^[12], 例如 Ashtech 接收机 C1 码比 DNSP 接收机的 C1 码精度高主要是由于 Ashtech 接收机 C1 码的滤波时间较长. 对于有些接收机的某些类型观测值, 时间相关性非常显著, 应该在数据处理时予以考虑.

接收机采用不同的解码技术可能引起不同类型观测值之间的交叉相关性. 例如采用码相关技术对观测值解码时, 不能获得独立的 C1 码和 P1 码观测值, 而只能得到 C1 码和 $\Delta P = P1 - C1$ 码的独立观测值, 因

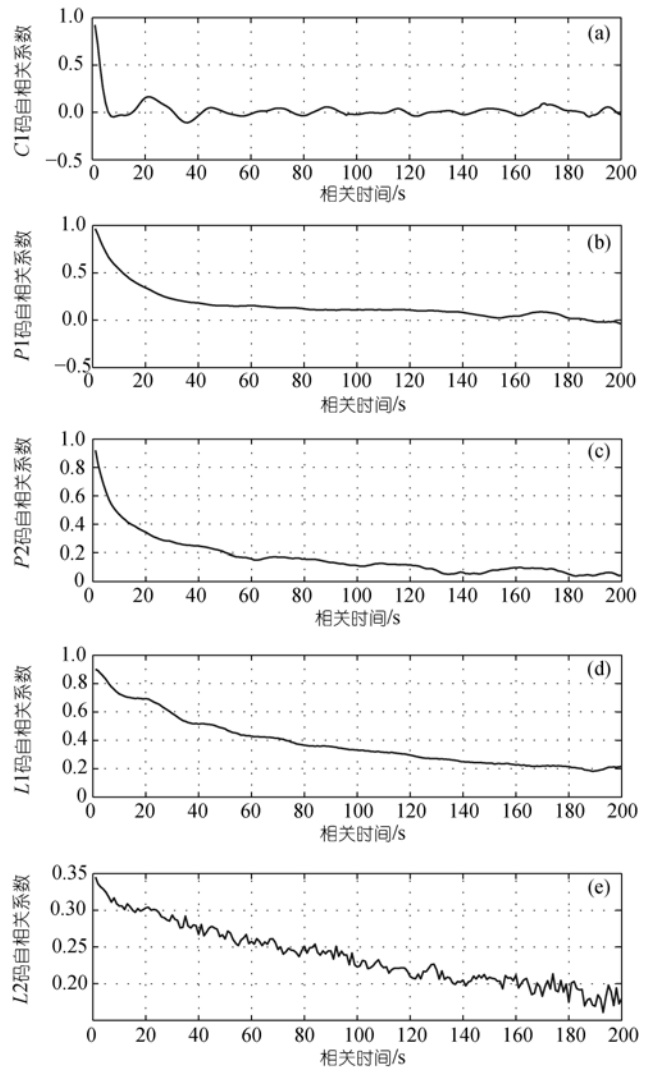


图4 DNSP接收机时间相关性

此, 得到的 C1 码和 $P1 = \Delta P + C1$ 码观测值相关. 表 2 和 3 给出了 Ashtech 和 DNSP 接收机观测值之间的交叉相关系数. 很明显, Ashtech 接收机的 C1 码和 P1 码存在强相关, 相关系数为 0.536, L1 和 L2 存在弱相关, 相关系数 0.233, 其他交叉相关性可认为不存在.

表2 Ashtech接收机精度及交叉相关性^{a)}

	C1	P1	P2	L1	L2
C1	0.229	0.536	0.014	-0.028	-0.028
P1		0.244	0.077	0.004	-0.004
P2			0.233	-0.012	-0.063
L1				3.3	0.233
L2					2.3

a) 精度单位: 伪距 m; 相位 mm

表 3 DSNP 接收机精度及交叉相关性^{a)}

	C1	P1	P2	L1	L2
C1	3.161	0.124	0.017	0.029	0.002
P1		0.468	0.119	0.021	-0.017
P2			0.645	-0.045	0.053
L1				2.8	-0.001
L2					7.2

a) 精度单位: 伪距 m; 相位 mm

而对于 DSNP 接收机而言, 观测类型间的交叉相关性不明显。

4 结论

本文采用基于已知基线和模糊度的单差观测方程, 给出了评估 GPS 观测值各项随机模型的计算公式, 并对不同接收机的短基线观测数据进行了计算

分析, 得出以下几点结论:

(i) 根据高度角确定权的方式不具有通用性, 不同接收机的不同类型观测值应采用不同的高度角加权函数。

(ii) 接收机采用滤波技术提高了观测值精度, 然而, 导致观测值存在较强的时间相关性^[12], 可根据不同接收机的不同类型观测值在随机模型中具体考虑时间相关性, 尤其是相关时间窗口的长度。

(iii) 解码技术导致不同类型观测值之间交叉相关, 用交叉相关性较大的两类观测值平差时, 交叉相关也应予以考虑。

总而言之, 由于 GPS 观测精度与卫星高度角有关, 且同类观测值存在时间相关性, 不同类观测值之间存在交叉相关性, 因此, 在高精度 GPS 数据处理中, 应根据接收机和观测值类型合理地确定随机模型。

参考文献

- 1 Yu Z C. A universal formulae of maximum likelihood estimation for variance-covariance estimation. *J Geod*, 1996, 70: 233—240
- 2 Crocetto N, Gatti M, Russo P. Simplified formulae for the BIQUÉ estimation of variance components in disjunctive observation group. *J Geod*, 2000, 74: 447—457[doi]
- 3 Grodecki J. Generalized maximum-likelihood estimation of variance-covariance components with non-informative prior. *J Geod*, 2001, 75: 157—163[doi]
- 4 Teunissen P, Amiri-Simkooei A. Least-squares variance component estimation. *J Geod*, 2007, 82: 65—82[doi]
- 5 Xu P L, Liu Y M, Shen Y Z, et al. Estimability analysis of variance and covariance components. *J Geod*, 2007, 81: 593—602[doi]
- 6 Ananga N, Coleman R, Rizos C. Variance-covariance estimation of GPS networks. *Bull Geod*, 1994, 68: 77—87[doi]
- 7 Koch K, Kusche J. Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *J Geod*, 2002, 76: 259—268[doi]
- 8 Xu P L, Shen Y Z, Fukuda Y, et al. Variance component estimation in linear inverse ill-posed models. *J Geod*, 2006, 80: 69—81[doi]
- 9 Euler H, Goad C. On optimal filtering of GPS dual frequency observations without using orbit information. *Bull Geod*, 1991, 65: 130—143[doi]
- 10 Wang J, Stewart M, Sakiri M. Stochastic modeling for static GPS baseline data processing. *J Surv Eng*, 1998, 124(4): 171—181[doi]
- 11 Satirapod C, Wang J, Rizos C. A new stochastic modelling procedure for precise static GPS positioning. *ZfV*, 2001, 126(6): 365—373
- 12 Bona P. Precision, cross correlation, and time correlation of GPS phase and code observations. *GPS Solut*, 2000, 4(2): 3—13[doi]
- 13 Tiberius C, Kenselaar F. Estimation of the stochastic model for GPS code and phase observation. *Surv Rev*, 2000, 35(277): 441—454
- 14 Wang J, Satirapod C, Rizos C. Stochastic assessment of GPS carrier phase measurements for precise static relative positioning. *J Geod*, 2002, 76: 95—104[doi]
- 15 Liu X L. A comparison of stochastic models for GPS single differential kinematic positioning. In: *Proceedings of ION GPS*, 2002, 24-27 Sept, Portland, 1830—1841
- 16 Tiberius C, Kenselaar F. Variance component estimation and precise GPS positioning: Case study. *J Surv Eng*, 2003, 129(1): 11—18[doi]
- 17 何海波, 杨元喜. GPS 观测值先验方差-协方差矩阵实时估计. *测绘学报*, 2001, 30(1): 42—47
- 18 Bona P. Noise characteristics of Trimble 4700 GPS receiver. *GPS Nieuwsbrief*, 2000, 15(2): 8—11