第 55 卷 第 2 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 55 No. 2
2016 年 3 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Mar. 2016
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.2016.02.015

联图的 Normalized Laplace 特征多项式

廖丽雯,陈海燕*
(集美大学理学院,福建 厦门 361021)

摘要:利用代数方法得到了两个正则图联图的 Normalized Laplace 特征多项式的一个表达式,在此基础上得到了正则图联图的 Normalized Laplace 特征值与其因子图对应特征值之间的关系式.计算了一些特殊图的度基尔霍夫指标.

关键词:联图;Normalized Laplace 多项式;度基尔霍夫指标

中图分类号:O 157.1 **文献标志码**:A **文章编号**:0438-0479(2016)02-0233-04

设 G 是一个 n 个顶点的简单图,它的顶点集为 $\{1,2,\cdots,n\}$,则 G 的邻接矩阵是一个(0,1)矩阵,记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 相邻};\\0,\text{否则}.\end{cases}$$

$\mathcal{L}=(\ell_{ij})_{n\times n}=\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$ 称为图 G 的 Normalized Laplace 矩阵,这里 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 表示图 G 的度对角矩阵.即

$$\ell_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果 } i=j;\\ \dfrac{-1}{\sqrt{d_id_j}},\text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 相邻};\\0,\text{否则}.\end{cases}$$

图 G 的 Normalized Laplace 矩阵和图 G 上的随机游动有紧密的联系,它的许多性质已被人们所熟知,如

1) $\mathcal{L}$ 是半正定矩阵;

2) 0 是 $\mathcal{L}$ 的特征值,且它的所有特征值位于闭区间[0,2].

其他更多性质可参见文献[1].

设图 G 邻接矩阵特征值与 Normalized Laplace 特征值分别为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$, $0\leqslant\lambda'_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda'_n$. 如果 G 为 r-正则图,则由定义直接可得:

$$\lambda'_i=\frac{r-\lambda_i}{r},\ i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

但如果 G 不是正则图,λ_i 和 λ'_i 之间就没有必然的联系.本文我们主要考虑两个图联图的 Normalized Laplace 特征值与其因子图 Normalized Laplace 特征值的关系. 首先我们给出联图的定义.

定义 1[2] 设 H 与 G 是两个简单连通图,则它们的联图记为 $H\nabla G$,是指顶点集为 $V(H)\cup V(G)$,边集为 $E(H)\cup E(G)\cup\{uv\mid u\in V(H),v\in V(G)\}$ 的图.

下面我们用 $\chi(G;x)$ 表示图 G 的 Normalized Laplace 特征多项式,则

$$\chi(G;x)=|(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})|=|(x-1)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}|=|\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}[(x-1)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}]\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}|=|\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\|(x-1)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}|=|(x-1)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}|.$$

在第二部分,首先用代数方法得到了两个正则图联图的 Normalized Laplace 多项式的一个表达式,然后在此基础上得到了两个正则图联图的 Normalized Laplace 特征值和其两个因子图 Normalized Laplace 特征值之间的关系式. 第三部分作为应用,得到了一些特殊图的度基尔霍夫指标的表达式.

1 正则图联图的 Normalized Laplace 多项式

为了讨论正则图联图的 Normalized Laplace 特征多项式,需要下面的已知结论:

引理 1[3] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶对称矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

收稿日期:2015-05-13 **录用日期**:2015-08-26
* **通信作者**:chey5@jmu.edu.cn
引文格式:廖丽雯,陈海燕.联图的 Normalized Laplace 特征多项式[J].厦门大学学报(自然科学版),2016,55(2):233-236.
Citation:LIAO L W,CHEN H Y.Normalized Laplace polynomials of join graphs[J].Journal of Xiamen University(Natural Science),2016,55(2):233-236.(in Chinese)

$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) P^{-1},$$

$$B = P\,\mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) P^{-1},$$

这里 λ_i,β_i 分别表示 A,B 的特征值,即

$$A + B = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1 + \beta_1, \lambda_2 + \beta_2, \cdots, \lambda_n + \beta_n) P^{-1}.$$

定理 1 设 G_1,G_2 是两个正则图,顶点数分别为 n_1,n_2,正则度分别为 r_1,r_2. 则联图 $G_1 \nabla G_2$ 的 Normalized Laplace 特征多项式为:

$$\chi(G_1 \nabla G_2; x) = \frac{x((r_1+n_2)(r_2+n_1)(x-1)+r_1r_2-n_1n_2)}{(r_1+n_2)(r_2+n_1)} \prod_{i=2}^{n_1}\left(x-1+\frac{\lambda_i}{r_1+n_2}\right)\prod_{j=2}^{n_2}\left(x-1+\frac{\mu_j}{r_2+n_1}\right).$$

这里 $r_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n_1}$,$r_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n_2}$ 分别是 G_1 和 G_2 邻接矩阵的特征值.

证明 用 A_1,A_2 分别表示 G_1,G_2 的邻接矩阵,则由联图的定义可得 $G_1 \nabla G_2$ 的邻接矩阵和度对角矩阵可分别表示为:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & J_{n_1 \times n_2} \\ J_{n_2 \times n_1} & A_2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} (r_1+n_2) I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & (r_2+n_1) I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

所以

$$D^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1+n_2} I_{n_1} & 0_{n_1\times n_2} \\ 0_{n_2\times n_1} & \frac{1}{r_2+n_1} I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & J_{n_1\times n_2} \\ J_{n_2\times n_1} & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1+n_2} A_1 & \frac{1}{r_1+n_2} J_{n_1\times n_2} \\ \frac{1}{r_2+n_1} J_{n_2\times n_1} & \frac{1}{r_2+n_1} A_2 \end{pmatrix},$$

从而可得

$$\chi(G_1 \nabla G_2; x) = |(x-1) I_{n_1+n_2} + D^{-1}A| = \begin{vmatrix} (x-1) I_{n_1} + \frac{1}{r_1+n_2} A_1 & \frac{1}{r_1+n_2} J_{n_1\times n_2} \\ \frac{1}{r_2+n_1} J_{n_2\times n_1} & (x-1) I_{n_2} + \frac{1}{r_2+n_1} A_2 \end{vmatrix}.$$

由于 G_1 是 r_1 正则图,所以 $J_{n_2\times n_1} A_1 = r_1 J_{n_2\times n_1}$. 把上面的行列式第一行左乘矩阵

$$-\frac{r_1+n_2}{(r_2+n_1)((r_1+n_2)(x-1)+r_1)} J_{n_2\times n_1},$$

加到第二行可得

$$\begin{vmatrix} (x-1) I_{n_1} + \frac{1}{r_1+n_2} A_1 & \frac{1}{r_1+n_2} J_{n_1\times n_2} \\ 0_{n_2\times n_1} & C \end{vmatrix} = \left|(x-1) I_{n_1} + \frac{1}{r_1+n_2} A_1\right| |C|,$$

这里

$$C = (x-1) I_{n_2} + \frac{1}{r_2+n_1} A_2 - \frac{n_1 J_{n_2\times n_2}}{(r_2+n_1)((r_1+n_2)(x-1)+r_1)}.$$

设 A_1 的特征值为 $r_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n_1}$,则显然有

$$\left|(x-1) I_{n_1} + \frac{1}{r_1+n_2} A_1\right| = \left(x-1+\frac{r_1}{r_1+n_2}\right) \prod_{i=2}^{n_1}\left(x-1+\frac{\lambda_i}{r_1+n_2}\right).$$

又 G_2 是 r_2 正则图,$A_2 J_{n_2\times n_2} = J_{n_2\times n_2} A_2 = r_2 J_{n_2\times n_2}$,若设 $r_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n_2}$ 为 A_2 的特征值,$J_{n_2\times n_2}$ 的特征值为 n_2,0,…,0,则由引理 1 可得:

$$\left|(x-1) I_{n_2} + \frac{1}{r_2+n_1} A_2 - \frac{n_1 J_{n_2\times n_2}}{(r_2+n_1)((r_1+n_2)(x-1)+r_1)}\right| = \left((x-1) + \frac{r_2}{r_2+n_1} - \frac{n_1 n_2}{(r_2+n_1)((r_1+n_2)(x-1)+r_1)}\right) \prod_{j=2}^{n_2}\left(x-1+\frac{\mu_j}{r_2+n_1}\right).$$

由上得 $G_1 \nabla G_2$ 的 Normalized Laplace 特征多项式为:

$$\chi(G_1 \nabla G_2; x) = \left(x-1+\frac{r_1}{r_1+n_2}\right)\left(x-1+\frac{r_2}{r_2+n_1} - \frac{n_1 n_2}{(r_2+n_1)((r_1+n_2)(x-1)+r_1)}\right) \prod_{i=2}^{n_1}\left(x-1+\frac{\lambda_i}{r_1+n_2}\right)\prod_{j=2}^{n_2}\left(x-1+\frac{\mu_j}{r_2+n_1}\right) = \frac{x((r_1+n_2)(r_2+n_1)(x-1)+r_1r_2-n_1n_2)}{(r_1+n_2)(r_2+n_1)} \prod_{i=2}^{n_1}\left(x-1+\frac{\lambda_i}{r_1+n_2}\right)\prod_{j=2}^{n_2}\left(x-1+\frac{\mu_j}{r_2+n_1}\right).$$

由上面的定理,我们很容易由 G_1,G_2 的邻接矩阵特征值得到 $G_1 \nabla G_2$ 的 Normalized Laplace 特征值:

$$0, \frac{r_1n_1+r_2n_2+2n_1n_2}{(r_1+n_2)(r_2+n_1)}, \frac{r_1+n_2-\lambda_i}{r_1+n_2}, \frac{r_2+n_1-\mu_j}{r_2+n_1}, \quad i=2,3,4,\cdots,n_1, j=2,3,4,\cdots,n_2. \tag{2}$$

再由正则图的邻接矩阵特征值和其 Normalized Laplace 特征值之间的关系(1),我们马上可以得到下面的定理.

定理 2　设 G_1,G_2 是两个正则图,顶点数分别为 n_1,n_2,正则度分别为 r_1,r_2. 若 G_1 的 Normalized Laplace 特征值为 $0\leqslant\lambda'_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda'_{n_1}$;$G_2$ 的 Normalized Laplace 特征值为 $0\leqslant\mu'_2\leqslant\cdots\leqslant\mu'_{n_2}$,则联图 $G_1\nabla G_2$ 的 Normalized Laplace 特征值为:

$$0,\frac{r_1n_1+r_2n_2+2n_1n_2}{(r_1+n_2)(r_2+n_1)},\frac{n_2+r_1\lambda'_i}{r_1+n_2},\frac{n_1+r_2\mu'_j}{r_2+n_1},$$
$$i=2,3,4,\cdots,n_1,j=2,3,4,\cdots,n_2.$$

这里 G_1,G_2 是正则图,并不能保证 $G_1\nabla G_2$ 是正则图,除非 $r_1+n_2=r_2+n_1$,所以定理 2 的结果并不能通过式(1)由 $G_1\nabla G_2$ 邻接特征值与 G_1 和 G_2 邻接特征值的关系得到.

由上面的定理可以看出,$\frac{n_2+r_1\lambda'_i}{r_1+n_2}=1$ 当且仅当 $\lambda'_i=1$,$\frac{n_1+r_2\mu'_j}{r_2+n_1}=1$ 当且仅当 $\mu'_j=1$,所以我们马上得到下面的推论.

推论 1　设 G_1,G_2 是两个正则图. 若 1 作为它们 Normalized Laplace 特征值的重数分别为 m_1,m_2,则 1 作为 $G_1\nabla G_2$ 的 Normalized Laplace 特征值的重数为 m_1+m_2.

在定理 1 中,若特别取其中一个图为空图 $\overline{K}_m$ 或完全图 K_m,由于 $\overline{K}_m$ 的正则度和所有特征值都为 0,而 K_m 是 $m-1$ 正则,特征值为 $m-1,-1,-1,\cdots,-1$,所以可以得到下面更具体的结果.

推论 2　设图 G 是 n 个顶点的 r 正则图,则

$$\chi(\overline{K}_m\nabla G;x)=x(x-1)^{m-1}\left(x-\frac{r+2m}{r+m}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(x-1+\frac{\lambda_i}{r+m}\right),$$

这里 $r\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 是 G 的邻接矩阵特征值. 所以 $\overline{K}_m\nabla G$ 的 Normalized Laplace 特征值为:

$$0,1,\cdots,1,\frac{r+2m}{r+m},\frac{r+m-\lambda_i}{r+m},i=2,3,4,\cdots,n.$$

推论 3　设图 G 是 n 个顶点的 r 正则图,则

$$\chi(K_m\nabla G;x)=\frac{x((r+m)(m+n-1)(x-1)+r(m-1)-mn)}{(r+m)(m+n-1)}\left(x-\frac{m+n}{m+n-1}\right)^{m-1}\prod_{i=2}^{n}\left(x-1+\frac{\lambda_i}{r+m}\right),$$

这里 $r\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 是 G 的邻接矩阵特征值. 所以 $K_m\nabla G$ 的 Normalized Laplace 特征值为:

$$0,\frac{m+n}{m+n-1},\cdots,\frac{m+n}{m+n-1},$$
$$\frac{m^2-m+2mn+rn}{(r+m)(m+n-1)},\frac{r+m-\lambda_i}{r+m},$$
$$i=2,3,4,\cdots,n.$$

2　应　用

设 G 是一个简单连通图,若 G 的每条边看作电阻值为 1 的电阻,则 G 就可以看作是一个电网络. Klein 和 Randic 在文献[4]中把图 G 上两点 i,j 之间的电阻距离定义为它们之间的等效电阻值,记为 r_{ij},而 G 中所有点对之间的电阻距离之和,即 $Kf(G)=\sum\limits_{i<j}r_{ij}$ 称为图 G 的基尔霍夫指标. 而最近,Chen 等在文献[5]中定义了度基尔霍夫指标:$Kf^*(G)=\sum\limits_{i<j}d_id_jr_{ij}$ 并发现 $Kf^*(G)$ 和图的 Normalized Laplace 特征值有如下的关系式.

引理 2[5]　设图 $G=(V(G),E(G))$,其中 $|V(G)|=v$,$|E(G)|=e$,则有

$$kf^*(G)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}d_id_jr_{ij}=2e\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sigma_i},$$

其中 $\sigma_2\geqslant\sigma_3\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n$ 是 G 的非零 Normalized Laplace 特征值.

由上面的引理和式(2),马上可得到两个正则图联图的度基尔霍夫指标的一个表达式.

定理 3　设 G_1,G_2 是两个正则图,顶点数分别为 n_1,n_2,正则度分别为 r_1,r_2. 则

$$Kf^*(G_1\nabla G_2)=(r_1+n_2)(r_2+n_1)+(n_1r_1+n_2r_2+2n_1n_2)\left(\sum_{i=2}^{n_1}\frac{r_1+n_2}{r_1+n_2-\lambda_i}+\sum_{j=2}^{n_2}\frac{r_2+n_1}{r_2+n_1-\mu_j}\right),$$

这里 $r_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n_1}$,$r_2\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n_2}$ 分别是 G_1 和 G_2 邻接矩阵的特征值.

特别地,若 G 是一个正则图,则它的锥图($K_1\nabla G$)和双锥图($\overline{K}_2\nabla G$)的度基尔霍夫指标有如下结果.

定理 4　设 G 是 n 个顶点 r-正则的图,则

$$Kf^*(K_1\nabla G)=n(r+1)+\sum_{i=2}^{n}\frac{n(r+1)(r+2)}{r+1-\lambda_i},$$

$$Kf^*(\overline{K}_2\nabla G)=2n(r+3)+\sum_{i=2}^{n}\frac{n(r+4)(r+2)}{r+2-\lambda_i}.$$

这里 $r\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 是 G 的邻接矩阵特征值.

最后我们给出几类常见正则图联图的度基尔霍夫指标.

例 1 图 $\overline{K}_m\nabla K_n$ 的度基尔霍夫指标.

因为 $\overline{K}_m$ 的正则度和所有特征值都为 0，而 K_m 是 $m-1$ 正则，特征值为 $m-1,-1,-1,\cdots,-1$ 的图，所以由定理 3 马上可得：

$$Kf^*(\overline{K}_m\nabla K_n)=nm(n+2m-2)+\frac{n(n-1)(n+m-1)(n+2m-1)}{n+m}.$$

例 2 图 $\overline{K}_m\nabla C_n$ 的度基尔霍夫指标.

C_n 的邻接矩阵特征值为[6]：

$$2\cos\frac{2\pi i}{n},i=0,1,2,\cdots,n-1,$$

所以由定理 3 可得

$$Kf^*(\overline{K}_m\nabla C_n)=mn(1+2m)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2n(m+1)(m+2)}{m+2-2\cos(2\pi i/n)}.$$

特别对于轮图，有

$$Kf^*(\overline{K}_1\nabla C_n)=3n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{12n}{3-2\cos(2\pi i/n)}.$$

例 3 图 $K_m\nabla C_n$ 的度基尔霍夫指标

$$Kf^*(K_m\nabla C_n)=(2+m)(m+n-1)+(m^2-m+2mn+2n)\left(\frac{(m-1)(m+n-1)}{n+m}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(m+2)}{m+2-2\cos(2\pi i/n)}\right).$$

例 4 图 $K_m\nabla O_3$(O_3 是 Peterson 图)的度基尔霍夫指标.

Petersen 图的邻接矩阵特征值为[2]：

$3,1,1,1,1,1,-2,-2,-2,-2.$

所以

$$Kf^*(K_m\nabla O_3)=(m+3)(m+9)+(m^2+19m+30)\left(\frac{(m-1)(m+9)}{m+10}+\frac{5(m+3)}{m+2}+\frac{4(m+3)}{m+5}\right).$$

参考文献：

[1] CHUNG F R K.Spectral graph theory[M].Rhode Island：Amer Math Soc，1997：186-199.

[2] CVETKOVIĆ D，ROWLINSON P，SIMIĆ S.An introduction to the theory of graph spectra[M].New York：Cambridge University，2010：1-23.

[3] MARCUS M，MINC H.A survey of matrix and matrix inequalities[M].Boston：Allyn and Bacon Inc，1964：156-167.

[4] KLEIN D J，RANDIĆ M.Resistance distance[J].Math Chem，1993，12(1)：81-95.

[5] CHEN H Y，ZHANG F J.Resistance distance and the normalized laplacian spectrum[J].Discrete Applied Mathematics，2007，155：654-661.

[6] BIGGS N L.Algebraic graph theory[M].2nd ed.New York：Cambridge University，1993：14-22.

Normalized Laplace Polynomials of Join Graphs

LIAO Liwen，CHEN Haiyan

(School of Sciences，Jimei University，Xiamen 361021，China)

Abstract：Let G_1 and G_2 be two regular graphs.In this paper，by using algebraic method，we first obtain an expression of the Normalized Laplace polynomial for the join graph of G_1 and G_2. Then based on this expression，we obtain the relation between the normalized Laplace eigenvalues of the join graph and those of G_1 and G_2. Finally，as applications，we compute the degree Kirchhoff index of several kinds of graphs.

Key words：join graph；normalized laplace polynomial；degree Kirchhoff index