中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 1 期: 121～128
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

分式线性函数的亚纯迭代根

石勇国 ①②, 陈丽 ①*

① 四川大学数学科学学院, 成都 610064
② 四川省高等学校数值仿真重点实验室, 内江师范学院数学与信息科学学院, 内江 641112
* E-mail: scuchenli@126.com

收稿日期: 2007-04-23; 接受日期: 2008-09-25
四川省教育厅青年基金 (批准号: 07ZB042) 资助项目

摘要 迭代根问题是嵌入流的一个弱问题. 关于单调函数的迭代根已有较多结论. 但是对非单调函数迭代根的研究却很困难. 分式线性函数是一类实数域上的非单调函数. 对复平面上分式线性函数的迭代根进行了研究. 将分式线性函数的迭代函数方程与一个商空间上的矩阵方程对应, 运用一个求解矩阵根的方法, 得到其所有亚纯迭代根的一般公式. 并且确定了不同情形下分式线性函数迭代根的准确数目. 作为应用, 分别给出函数 z 和函数 $1/z$ 全部亚纯迭代根.

关键词 迭代函数方程 分式线性函数 亚纯解 矩阵方程

MSC(2000) 主题分类 30D05, 15A24

1 引言

对于非负整数 n, 在非空集 E 上的自映射 $f: E \to E$ 的 n 次迭代由下式递归定义:

$$f^n(z) = f(f^{n-1}(z)), \quad f^0(z) = z, \quad \forall\, z \in E.$$

如果 $f^n = g$, 则称 f 为自映射 g 的一个 n 次迭代根. 早在 1815 年, Babbage[1,2] 就关注恒等映射的迭代根. 文献 [3–6] 已经得到单调函数迭代根的许多结果. 关于计算实数域上单调函数的迭代根有逐段定义 [7,8] 和神经网络 [9,10] 的方法. 关于计算复数域上特殊函数的迭代根已有相关一些结论. 如恒等函数有无穷多个亚纯迭代根 [3]; 函数 $1/z$ 刚好存在 2 个二次亚纯迭代根 [11]; 指数函数不存在整函数的迭代根 [12]; 二次多项式函数没有从 $\mathbb{C}$ 到自身的二次迭代根 [13], 该结论可以推广为二次多项式函数不存在从 $\mathbb{C}$ 到自身的 $n\,(\geqslant 2)$ 次迭代根 (参见文献 [14]); 对于一般的多项式, 虽然 Choczewski 和 Kuczma 做了一些探讨 [14], 但对于一个大于二次的多项式是否存在复数域上的迭代根仍然是一个未解决问题. 求迭代根的问题事实上是嵌入流问题的一个弱问题. 即使是简单的函数, 求其迭代根仍是非常困难的. 对于单调函数, 如果同时要求光滑性和全局性, 它也会遇到困难 [15].

虽然对于非单调的情形已有一些进展 [16−18], 但是寻找一般非单调函数的迭代根依然是困难的. 于是, 属于特殊类函数的迭代根更加引起人们的兴趣. 分式线性函数是一类实数

域上的非单调函数, 另外它在实数域和复数域上迭代和动力学性质被广泛的研究 [19−22]. 如 Jacobsen 等 [23] 研究了分式线性变换序列的极限结构, Higdon[24] 探讨了作用在 Dirichlet 空间上分式线性映射复合算子的谱. 已有一些文章进行过分式线性函数迭代根的研究. 如 Avital 等 [25] 涉及到了分式线性函数的迭代根, 其他人 [26, 27] 利用矩阵的特征多项式和逐段定义等方法已经找到它的部分迭代根.

本文找到了分式线性函数所有亚纯迭代根. 根据分式线性函数的性质, 给出了分式线性函数的迭代函数方程与一个商空间上矩阵方程的等价关系. 然后利用 Ng 和张 [28] 提出的一种求解线性算子的代数方程的方法, 得到了分式线性函数所有亚纯迭代根的一般公式, 并且确定了不同情形下迭代根的准确数目. 作为应用, 我们分别给出了函数 z 和 $1/z$ 的全部亚纯迭代根. 关于函数 z 的迭代根的表达式比文献 [3] 中给出的形式更加简单; 关于函数 $1/z$ 的迭代根的表达式推广了文献 [11] 中的一个结论.

整篇文章, I 表示 2×2 单位矩阵.

2 化简为矩阵方程

由于分式线性函数的迭代恰好对应着一个矩阵的乘法, 因此我们先构造一个商空间上的诱导映射, 再证明迭代函数方程

$$f^n(z)=\ell(z),\quad \ell(z):=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0, \tag{1}$$

与矩阵方程

$$X^n=A,\quad A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}, \tag{2}$$

之间的等价关系.

设 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C})$ 表示在复数域上所有分式线性函数的集合. 因函数 $\ell(z)$ 在点 $z=\infty$ 和 $z=-d/c$ 处没有定义. 将这类函数延拓到扩充复平面 $\mathbb{C}_*:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, 则每个 $\ell\in\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}_*$ 上的自映射. 由文献 [4] 的定理 11.1.1 可知, g 的一个迭代根是满射 (或单射或双射) 当且仅当 g 是满射 (或单射或双射). 于是, 若 $f(z)$ 是 $\ell(z)$ 的一个亚纯迭代根, 则 $f\in\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C})$.

根据投影矩阵表示的思想, 一个分式线性函数可以表示为一个矩阵. 记 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 为复数域上所有非奇异矩阵组成的群. 定义 $h:\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C})$,

$$h\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=\frac{az+b}{cz+d}. \tag{3}$$

映射 h 是满射, 但不是单射, 因为对于所有非零的 $\mu\in\mathbb{C}$, 都有 $h(\mu A)=h(A)$. 定义 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 中的等价关系: $A\sim B$ 当且仅当 $A=\mu B$. 并且考虑对应的商空间 $\tilde{\mathrm{GL}}_2(\mathbb{C}){:=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\sim$, 则映射 h 的诱导映射为

$$\tilde h:\tilde{\mathrm{GL}}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}). \tag{4}$$

因此 $\tilde h$ 为双射.

对非零常数 $\mu\in\mathbb{C}$, 可直接验证矩阵 A 的 n 次根与矩阵 μA 的 n 次根之间的关系, 这有助于化简方程 (2).

引理 2.1 对于任意非零的常数 $\mu \in \mathbb{C}$, X 是 A 的一个 n 次根当且仅当 $\mu^{1/n}X$ 是 μA 的一个 n 次根.

下面的引理给出函数方程 (1) 与矩阵方程 (2) 的解之间的关系.

引理 2.2 设 $\tilde{h}$ 是由 (4) 式定义的诱导映射, A 为给定分式线性函数 ℓ 对应的矩阵, 则函数方程 (1) 的一般解为

$$f(z) = \tilde{h}(X),$$

其中 X 为矩阵方程 (2) 的一般解.

证明 注意到 $\tilde{h}$ 将单位矩阵 I 映到恒等函数 z, 即 $\tilde{h}(I) = z$. 假设 X 是 f 对应的矩阵, 则有共轭关系

$$f(z) = \tilde{h}(X(\tilde{h}^{-1}(z))), \quad \ell(z) = \tilde{h}(A(\tilde{h}^{-1}(z))).$$

再联系方程 (1), 得到

$$\tilde{h}(X^n(\tilde{h}^{-1}(z))) = f^n(z) = \ell(z) = \tilde{h}(A(\tilde{h}^{-1}(z))).$$

由于 $\tilde{h}$ 是双射, 矩阵方程 $X^n = A$ 在商空间 $\tilde{\mathrm{GL}}_2(\mathbb{C})$ 上等价于函数方程 (1), 故函数方程 (1) 的一般解为

$$f(z) = \tilde{h}(X(\tilde{h}^{-1}(z))) = \tilde{h}(X \cdot I) = \tilde{h}(X).$$

证毕.

3 分式线性函数的迭代根

本节首先利用 Ng 和张伟年 [28] 提出的方法求解矩阵方程 (2).

引理 3.1 对于矩阵方程 $X^n = A$,

(a) 若方程的两个解 X_1 与 X_2 相似, 即 $X_1 = P^{-1}X_2P$, 其中 P 为可逆矩阵, 则 P 与 A 可交换, 即 $PA = AP$.

(b) 若 X 是该方程的一个解, 对每个与 A 可交换的非奇异矩阵 P, 则矩阵 $P^{-1}XP$ 也是该方程的解.

(c) 若 S 是方程 $S^n = B$ 的一个解, 且 B 与 A 相似, 则存在方程 $X^n = A$ 的一个解与 S 相似.

证明 (a) 由 $X_1 = P^{-1}X_2P$ 可得 $X_1^n = P^{-1}X_2^nP$. 而 $X_1^n = X_2^n = A$, 知 $A = P^{-1}AP$.

(b) 直接验证 $(P^{-1}XP)^n = P^{-1}X^nP = P^{-1}AP = A$.

(c) 已知 S^n 与 A 相似, 存在非奇异矩阵 Q (不一定与 A 可交换), 使得 $Q^{-1}S^nQ = A$, 此即 $(Q^{-1}SQ)^n = A$, 于是解 $X := Q^{-1}SQ$ 就与 S 相似. 证毕.

引理 3.1 和文献 [28] 中的定理 5 提出了求解方程 (2) 的 4 个步骤.

引理 3.2 方程 (2) 可按如下 4 步求解:

第 1 步: 求 Q, 使得 $Q^{-1}AQ = J$, 其中 J 为 Jordan 标准型;

第 2 步: 求出所有 S, 使得 $S^n = J$, 取定一个 S, 利用引理 3.1 中 (c) 得到一个相似解 $T = QSQ^{-1}$;

第 3 步: 求出所有与 A 可交换的矩阵 P;

第 4 步: 对于在第 2 步中的每一个 T, 找到方程所有的解 $X = P^{-1}TP = P^{-1}QSQ^{-1}P$.

记 A 表示分式线性函数 $\ell(z)$ 对应的矩阵, 则存在非零常数 μ, 使得 $\det(\mu A)=1$ 以及 μA 有如下 3 类 Jordan 标准型之一:

$$J_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad J_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad J_3=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{bmatrix},\quad \lambda\neq 0,\pm 1.$$

根据引理 2.1 和 2.2, 只需要讨论 A 有如上 3 类 Jordan 标准型之一的情形. 对每个 $j=1,2,3$, 令集合 $\mathcal{A}_j$ 表示相似于 J_j 的所有矩阵 A 的集合. 为方便, 对于给定的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 令 $\omega_k(\lambda)$ 为 λ 的第 k 个 n 次方根, 即

$$\omega_k(\lambda)=\sqrt[n]{|\lambda|}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arg(\lambda)+2k\pi}{n}\right),\ k=1,2,\ldots,n.$$

$\omega_k(1)$ 简记为 ω_k.

根据引理 3.2, 可以得到方程 (2) 的所有解.

引理 3.3 设 Q 是使得 $Q^{-1}AQ$ 为 Jordan 标准型的可逆矩阵, 则方程 (2) 有如下 3 种情形: (i) 当 $A\in\mathcal{A}_1$ 时, 有 n 个解

$$X=\omega_k Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{n} & 1\end{bmatrix}Q^{-1},\quad k=1,2,\ldots,n; \tag{5}$$

(ii) 当 $A\in\mathcal{A}_2$ 时, 有无穷多个解

$$X=C^{-1}Q\begin{bmatrix}\omega_j & 0\\ 0 & \omega_k\end{bmatrix}Q^{-1}C,\quad j,k=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

其中 C 是任意的可逆矩阵;

(iii) 当 $A\in\mathcal{A}_3$ 时, 有 n^2 个解

$$X=Q\begin{bmatrix}\omega_j(\lambda) & 0\\ 0 & 1/\omega_k(\lambda)\end{bmatrix}Q^{-1},\quad j,k=1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

其中 λ 是矩阵 A 的 Jordan 标准型第 1 个 Jordan 块的特征值.

证明 情形 (i): $Q^{-1}AQ=J_1$. 对于矩阵 J_1, 它有一个零化多项式 $p_1(x)=(x-1)^2$, 那么 $q_1(x)=(x^n-1)^2$ 是 X 的一个零化多项式. 从方程 (2) 可知, X 一定有一个形如 $(x-\omega_j)^2$ 的极小多项式. 由 J_1 的形式以及下三角矩阵的性质, 令

$$S_1:=\begin{bmatrix}\omega_k & 0\\ s & \omega_k\end{bmatrix}.$$

从 $S_1^n=J_1$, 解得 $s=\omega_k/n$. 所有与 J_1 可交换的矩阵有如下形式:

$$C_1=\begin{bmatrix}c_1 & 0\\ c_2 & c_1\end{bmatrix},$$

这里 c_1 和 c_2 均为使得 C_1 为可逆矩阵的任意常数, 因此所有与 $A=QJ_1Q^{-1}$ 交换的矩阵具有形式 $P_1=QC_1Q^{-1}$. 这样的 P_1 也与矩阵 $T_1=QS_1Q^{-1}$ 交换, 因为 $C_1S_1=S_1C_1$. 根据引理 3.2 的第 4 步, 有

$$X=P_1^{-1}(QS_1Q^{-1})P_1=P_1^{-1}P_1(QS_1Q^{-1})=QS_1Q^{-1}.$$

于是方程 (2) 有 n 个解.

情形 (ii): $Q^{-1}AQ=J_2$. J_2 的零化多项式为 $p_2(x)=x-1$, 则多项式 $q_2(x)=x^n-1$ 零化 X. $q_2(x)$ 的不可约分解是 $\prod_k(x-\omega_k)$, 因此, X 相似于

$$S_2=\begin{bmatrix}\rho & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}.$$

从 $S_2^n=J_2$, 解得 $\rho=\omega_j$ 和 $\sigma=\omega_k$. 因任意的二阶可逆方阵 C 都与 J_2 交换, 也与 $A=QJ_2Q^{-1}=J_2$ 交换. 令 $P=C$, 有

$$X=P^{-1}QS_2Q^{-1}P=C^{-1}QS_2Q^{-1}C.$$

于是方程 (2) 有无穷多个解.

情形 (iii): $Q^{-1}AQ=J_3$. J_3 的零化多项式为 $p_3(x)=(x-\lambda)(x-1/\lambda)$, 则多项式 $q_3(x)=(x^n-\lambda)(x^n-1/\lambda)$ 零化 X. $q_3(x)$ 的不可约分解是

$$\prod_j(x-\omega_j(\lambda))\prod_k(x-1/\omega_k(\lambda)),$$

则 X 相似于

$$S_3=\begin{bmatrix}\rho & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}.$$

从 $S_3^n=J_3$, 解得 $\rho=\omega_j(\lambda)$ 和 $\sigma=1/\omega_k(\lambda)$. 因 $|\lambda|\neq 1$, 有 $\rho\neq\sigma$. 所有与 J_3 交换的矩阵有如下形式:

$$C_3=\begin{bmatrix}c_1 & 0\\ 0 & c_2\end{bmatrix},$$

这里 c_1 和 c_2 均为使得 C_3 为可逆矩阵的任意常数. 于是所有与 $A=QJ_3Q^{-1}$ 可交换的矩阵形如 $P_3=QC_3Q^{-1}$. 这样的 P_3 也与 $T_3=QS_3Q^{-1}$ 可交换, 因为 $C_3S_3=S_3C_3$, 故

$$X=P_3^{-1}(QS_3Q^{-1})P_3=QS_3Q^{-1}.$$

于是方程 (2) 有 n^2 个解. 证毕.

定理 3.1 设 Q 是使得 $Q^{-1}AQ$ 为 Jordan 标准型的可逆矩阵, 则方程 (1) 有如下 3 种情形: (i) 当 $A\in\mathcal{A}_1$ 时, 有唯一亚纯迭代根

$$f(z)=\tilde{h}\left(Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{n} & 1\end{bmatrix}Q^{-1}\right); \tag{8}$$

(ii) 当 $A\in\mathcal{A}_2$ 时, 有无穷多个亚纯迭代根

$$f(z)=\tilde{h}\left(C^{-1}Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega_k\end{bmatrix}Q^{-1}C\right),\quad k=1,2,\dots,n, \tag{9}$$

其中 C 是任意可逆矩阵;

(iii) 当 $A\in\mathcal{A}_3$ 时, 有 n 个不同亚纯迭代根

$$f(z)=\tilde{h}\left(Q\begin{bmatrix}\omega_m(\lambda^2) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1}\right),\quad m=1,2,\dots,n, \tag{10}$$

其中 λ 是矩阵 A 的 Jordan 标准型第 1 个 Jordan 块的特征值.

证明 根据前面的假设, 设 A 是给定分式线性函数 $\ell(z)$ 对应的矩阵以及

$$A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3.$$

从引理 2.2 和 3.3, 可直接得到公式 (8) 和 (9).

只需证明: 若 $A \in \mathcal{A}_3$, 则方程 (1) 有 n 个不同亚纯迭代根. 根据引理 2.2 和 3.3, 得到

$$\begin{aligned} f(z) &= \tilde{h}^{-1}(QSQ^{-1}) = \tilde{h}^{-1}\left(Q\begin{bmatrix}\omega_j(\lambda) & 0\\ 0 & 1/\omega_k(\lambda)\end{bmatrix}Q^{-1}\right)\\ &= \tilde{h}^{-1}\left(\frac{1}{\omega_k(\lambda)}Q\begin{bmatrix}\omega_j(\lambda)\omega_k(\lambda) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1}\right) = h^{-1}\left(Q\begin{bmatrix}\omega_j(\lambda)\omega_k(\lambda) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1}\right), \end{aligned}$$

其中

$$\omega_j(\lambda)\omega_k(\lambda) = \sqrt[n]{|\lambda^2|}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\arg(\lambda)+2(j+k)\pi}{n}\right)$$

确定了 n 个不同的值, 因此方程 (1) 有 n 个不同的解. 令 $m = j+k$ 有 $\omega_j(\lambda)\omega_k(\lambda) = \omega_m(\lambda^2)$, 则得到公式 (10). 证毕.

4 例子

最后, 给出 3 个例子展示上面公式的应用.

例 4.1 考虑 $\ell(z) = z/(z+1)$. 这时 $A = J_1$, 于是令 $Q = I$. 由 (8) 式得方程 (1) 有唯一亚纯迭代根

$$f(z) = \tilde{h}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/n & 1\end{bmatrix}\right) = \frac{z}{\frac{z}{n}+1}.$$

例 4.2 考虑 $\ell(z) = z$. 这时方程 (1) 是著名的 Babbage 方程. 文献 [3, pp. 291–292] 证明其全部亚纯迭代根由下面函数给出:

$$\begin{aligned} &f(x) = L^{-1}\left(c - \frac{c^2}{4L(x)\cos^2(k\pi/n)}\right), \quad k = 1,\dots,n-1, k \neq \frac{n}{2},\\ &f(x) = L^{-1}\left(\omega_k L(x)\right), \quad k = 1,\dots,n, \end{aligned}$$

以及当 n 为偶数时,

$$f(x) = L^{-1}\left(\frac{c}{L(x)}\right),$$

这里 $L(x) = c_1x + c_0$ 是一个任意可逆线性函数, c 是一个任意的非零常数. 而利用定理 3.1 中的公式 (9), 得到其全部亚纯迭代根

$$f(z) = \tilde{h}\left(C^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega_k\end{bmatrix}C\right), \quad k = 1,2,\dots,n,$$

这里 C 是一个任意二阶可逆矩阵. 此处解的表达式比文献 [3, pp. 291–292] 中的简单.

例 4.3 考虑迭代 $\ell(z) = 1/z$. 根据定理 3.1, 得到其全部 n 次亚纯迭代根

$$f(z) = \frac{\mathrm{i}\cot\frac{(2k+1)\pi}{2n}z + 1}{z + \mathrm{i}\cot\frac{(2k+1)\pi}{2n}}, \quad k = 1,2,\dots,n. \tag{11}$$

事实上, 分式线性函数 $1/z$ 对应着矩阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

取 $\mu = \mathrm{i}$, 显然 $\det(\mu\tilde{A}) = 1$. 令

$$A := \mu\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

根据引理 2.2, 求解 $f^n(z) = 1/z$ 等价于解 $X^n = A$. 取

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

则

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

因此 $A \in \mathcal{A}_3$ 且 $\lambda = \mathrm{i}$. 将 Q 和 λ 代入公式 (10), 于是得到结果 (11). 注意到文献 [11, 定理 6.3] 讨论过函数方程 $f^{-1} = 1/f$, 它可简化为方程 (1) 在 $n = 2$ 的情形. 他们得到复平面上除奇点 $\{-\mathrm{i}, 0, \mathrm{i}\}$ 外的全部解析解

$$f(z) = \frac{\pm\mathrm{i}z + 1}{z \pm \mathrm{i}}.$$

显然, 结果 (11) 推广了文献 [11] 中的结论, 事实上给出了函数方程 $f^{n+1} = 1/f$ 在除去奇点的复平面上的解析解.

致谢 感谢加拿大滑铁卢大学 Che Tat Ng 教授在讨论中给予的启发. 感谢评审专家给予的非常有帮助的评论和建议.

参考文献

1 Babbage C. Essay towards the calculus of functions I. *Philosoph Transact*, **105**: 389–423 (1815)

2 Babbage C. Essay towards the calculus of functions II. *Philosoph Transact*, **106**: 179–256 (1816)

3 Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1968

4 Kuczma M, Choczewski B, Ger R. Iterative Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990

5 Targonski G. Topics in Iteration Theory. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1981

6 Baron K, Jarczyk W. Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems. *Aequationes Math*, **61**: 1–48 (2001)

7 Kuczma M. On the functional equation $\phi^n(x) = g(x)$. *Ann Polon Math*, **11**: 161–175 (1961)

8 Ng C T, Zhang W. When does an iterate equal a power? *Publ Math Debrecen*, **67**: 79–91 (2005)

9 Kindermann L. Computing iterative roots with neural networks. In: Proceedings of the Fifth-ICONIP'98, Kitakyushu: IOS Press, 1998, 713–715

10 Kindermann L, Lewandowski A, Protzel P. A comparison of different neural methods for solving iterative roots. In: Proceedings of the Seventh-ICONIP'2000, Taejon: IOS Press, 2000, 565–569

11 Chen R, Dasgupta A, Ebanks B R, et al. When does $f^{-1} = 1/f$? *Amer Math Monthly*, **105**: 704–717 (1998)

12 Baker I N. The iteration of entire transcendental functions and the solution of the functional equation $f(f(z)) = F(z)$. *Math Ann*, **120**: 174–180 (1955)
13 Rice R E, Schweizer B, Sklar A. When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$? *Amer Math Monthly*, **87**: 252–263 (1980)
14 Choczewski B, Kuczma M. On iterative roots of polynomials. In: European Conference on Iteration Theory (Lisbon, 1991). Singapore: World Sci Publishing, 1992, 59–67
15 Zhang W. A generic property of globally smooth iterative roots. *Sci China Ser A-Math*, **38**: 267–272 (1995)
16 张景中, 杨路. 论逐段单调连续函数的迭代根. 数学学报, **26**: 398–412 (1983)
17 Blokh A, Coven E, Misiurewicz M, et al. Roots of continuous piecewise monotone maps of an interval. *Acta Math Univ Comenianae*, **60**: 3–10 (1991)
18 Li L, Yang D, Zhang W. A note on iterative roots of PM functions. *J Math Anal Appl*, **341**: 1482–1486 (2008)
19 Carleson L. Gamelin T W. Complex Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1993
20 Siegel C L. Iteration of analytic functions. *Ann Math*, **43**: 607–612 (1942)
21 杨益民. 线性分式函数的自迭代周期与吸引子. 数学的实践与认识, **35**: 203–208 (2005)
22 许路, 许绍元. 关于线性分式函数的 n 次迭代及其应用. 数学的实践与认识, **36**: 225–228 (2006)
23 Jacobsen L, Thron W J. Limiting structures for sequences of linear fractional transformations. *Proc Amer Math Soc*, **99**(1): 141–146 (1987)
24 Higdon W. The spectra of composition operators from linear fractional maps acting upon the Dirichlet space. *J Func Anal*, **220**(1): 55–75 (2005)
25 Avital S, Libeskind S. An algebraic and geometric approach to two step iteration of bilinear functions. *Amer Math Monthly*, **91**(1): 53–56 (1984)
26 Szfkeres G. Fractional iteration of entire and rational functions. *J Aust Math Soc*, **4**: 129–142 (1964)
27 Chen L, Shi Y G. The real solutions of functional equation $f^{[m]} = 1/f$. *J Math Research Exposition*, **28**: 323–330 (2008)
28 Ng C T, Zhang W. An algebraic equation for linear operators. *Linear Algebra Appl*, **412**: 303–325 (2006)