中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 1 期: 155 ∼ 166

SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

完全图上的尾达渗流方差的上界估计

献给严士健教授 90 华诞

王峰*, 吴宪远

首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: wangf@cnu.edu.cn, wuxy@cnu.edu.cn

收稿日期: 2018-06-27; 接受日期: 2018-09-25; 网络出版日期: 2019-04-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471222 和 11671275)、首都师范大学青年科研创新团队和科技创新服务能力建设 - 基本科研业务费 (科研类) (批准号: 025185305000/204) 资助项目

摘要 本文考虑完全图 $G_n=([n],E_n)$ 上的尾达渗流, 边通过时间 $\{X_e,e\in E_n\}$ 独立同分布. W_n 表示经自回避路从顶点 1 到顶点 n 的最长时间, 本文给出 W_n 的方差的次线性上界估计, 即 $\mathrm{Var}(W_n)\leqslant Cn/\log n$, 其中 C 与 n 无关. 另外, 本文给出集中不等式 $\mathrm{P}(|W_n-\mathrm{E}(W_n)|\geqslant t\sqrt{n/\log n})\leqslant C_1\mathrm{e}^{-C_2t}$.

关键词 完全图 尾达渗流 时间常数 鞅分解 集中不等式

MSC (2010) 主题分类 60K35

1 引言

近二十多年来, 尾达渗流引起数学家和物理学家的极大兴趣, 被广泛研究 (参见文献 [1–4]), 并给出物理解释 (参见文献 [5,6]). 相对于尾达渗流, 1965 年 Hammersley 和 Welsh [7] 提出了首达渗流, 参见综述 [8]. 为了研究首达时间的波动, 本文对首达渗流的方差进行研究. 对格点图 $\mathbb{Z}^d$ 上的首达渗流, 物理学家通过模拟、仿真和标度理论, 预测首达时间的方差与距离的 k ($k<1$) 次方同阶, k 与维数 d 有关. 而在数学上, Kesten [9] 利用 Efron-Stein 不等式和鞅分解, 在一定条件下, 得到了首达渗流的方差上界的线性估计; Benjamini 等 [10] 对边上的通过时间为两点分布的情形, 利用 Talagrand 不等式 [11] 和平均化技巧, 改进了 Kesten 的结果, 得到了首达渗流的方差次线性估计; Benaïm 和 Rossignol [12] 利用 Falik-Samorodnitsky 不等式和 log-Sobolev 不等式把 Benjamini 等的结果推广到边上的通过时间为类 Gamma 分布的情形; Damron 等 [13] 利用 Bernoulli 编码把 Benaim 和 Rossignol 的结果推广到一般分布. Eckhoff 等 [14–16] 对完全图上的首达渗流进行了研究. Wu 和 Zhu [17] 研究了完全图上的尾达渗流, 证明了模型相应的时间常数存在. 同样, 我们有理由猜测完全图上的尾达渗流的方差与它规模的 α ($\alpha<1$) 次方同阶. 本文考虑尾达渗流方差的上界估计. 我们借鉴首达渗流的方差估计的方法, 给出完全图上的尾达渗流方差的次线性上界估计. 另外, 我们给出尾达渗流的集中不等式.

英文引用格式: Wang F, Wu X Y. Upper bound estimate of variance in last passage percolation on complete graph (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 155–166, doi: 10.1360/N012018-00171

模型的描述: 完全图 $G_n=([n],E_n)$, 顶点集 $[n]=\{1,2,\dots,n\}$, 边集 $E_n=\{\langle i,j\rangle:1\leqslant i<j\leqslant n\}$. 对每条边 $e\in E_n$, 赋予非负随机通过时间 X_e, $\{X_e,e\in E_n\}$ 独立同分布. 设 γ 为从顶点 1 到顶点 n 的自回避路, 定义

$$T(\gamma)=\sum_{e\in\gamma}X_e,$$

$T(\gamma)$ 表示通过自回避路 γ 所用的时间, γ 的长度 $|\gamma|\leqslant n-1$. 记 $\Pi_{1,n}$ 为所有从顶点 1 到顶点 n 的自回避路构成的集合. 令

$$W_n=\sup_{\gamma\in\Pi_{1,n}}T(\gamma),\tag{1.1}$$

W_n 表示经自回避路从顶点 1 到顶点 n 的最长时间. 记 $\Omega=[0,\infty)^{E_n}$, ω_e 表示边 e 的通过时间, 所有边的通过时间构成的组态 $\omega=(\omega_e)_{e\in E_n}\in\Omega$, $\forall\,\omega\in\Omega$, (1.1) 可写为

$$W_n(\omega)=\sup_{\gamma\in\Pi_{1,n}}\sum_{e\in\gamma}\omega_e.\tag{1.2}$$

Wu 和 Zhu [17] 证明了上述模型的时间常数存在, 即下面的定理:

定理 1.1 边通过时间 X_e 的分布函数为 $F(x)$, 记 $\mu:=\sup\{x:F(x)<1\}$, 则

$$\frac{W_n}{n}\to\mu\quad\text{a.s.},\tag{1.3}$$

其中 μ 称为时间常数.

考虑 W_n 的波动, 给出其方差的上界. 本文的主要结果如下:

定理 1.2 在定理 1.1 的记号下, 若 μ 有限, 则存在常数 C, 使得

$$\mathrm{Var}(W_n)\leqslant\frac{Cn}{\log n},\tag{1.4}$$

其中常数 C 与 n 无关.

注 1.1 当 $\mu=+\infty$ 时, 利用文献 [17] 可证 $\mathrm{E}(W_n)/n\to+\infty$, 因此, 我们仅仅考虑 μ 有限的情形.

考虑 W_n 的偏差, 给出下列集中不等式:

定理 1.3 在定理 1.2 的条件下, 存在常数 C_1 和 C_2, 使得

$$\mathrm{P}\left(|W_n-\mathrm{E}(W_n)|\geqslant t\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)\leqslant C_1\mathrm{e}^{-C_2t},\tag{1.5}$$

其中常数 C_1 和 C_2 与 n 无关.

本文结构如下: 第 2 节利用鞅分解和 Falik-Samorodnitsky 不等式, 给出定理 1.2 的证明; 第 3 节通过刻画 $\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}$ 的方差有界与集中性的关系, 给出定理 1.3 的证明; 第 4 节首先对给定边 e, 给出其为关键边的概率上界, 然后用两点分布的线性组合逼近 X_e, 给出引理的证明.

2 定理 1.2 的证明

本节先利用鞅分解, 给出 $\mathrm{Var}(W_n)$ 的恒等式, 然后借鉴文献 [18] 中的方法, 通过比较 $\mathrm{Var}(W_n)$ 与 $\sum_{k=1}^N\mathrm{Ent}(V_k^2)$, 得到 $\mathrm{Var}(W_n)$ 的上界估计.

完全图 G_n 的边按照某种顺序排列 $e_1, e_2, \dots, e_N$, $N = n(n-1)/2$, 令 $\mathscr{F}_k = \sigma(X_{e_1}, X_{e_2}, \dots, X_{e_k})$, $\mathscr{F}_0$ 为平凡的 σ- 域, 即 $\mathscr{F}_0 = \{\Phi, \Omega\}$, 则 $\{\mathscr{F}_k, 0 \leqslant k \leqslant N\}$ 为非降的子 σ- 域族. 定义鞅差

$$V_k = \mathrm{E}(W_n \mid \mathscr{F}_k) - \mathrm{E}(W_n \mid \mathscr{F}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

则有 $\mathrm{E}(V_k) = 0$. 由鞅分解 $W_n - \mathrm{E}(W_n) = \sum_{k=1}^{N} V_k$, 利用 L^2- 鞅的正交性可得

$$\mathrm{Var}(W_n) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{Var}(V_k). \tag{2.1}$$

为了得到 $\mathrm{Var}(W_n)$ 的上界, 我们引用文献 [18, 定理 2.2], 可以得到下面的引理:

引理 2.1 由 Falik-Samorodnitsky 不等式可得

$$\mathrm{Var}(W_n) \log \left[\frac{\mathrm{Var}(W_n)}{\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{E}|V_k|)^2} \right] \leqslant \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ent}(V_k^2). \tag{2.2}$$

我们给出 $\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{E}|V_k|)^2$ 和 $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ent}(V_k^2)$ 的上界, 通过下面的引理描述:

引理 2.2 在上述模型中, 若 μ 有限, 则有

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{E}|V_k|)^2 \leqslant 8\mu^2, \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ent}(V_k^2) \leqslant \mu^2 n. \tag{2.4}$$

定理 1.2 的证明 给定常数 δ $(0.5 < \delta < 1)$, 使得 $\delta \log n > 2 \log 8\mu^2$. 我们分两种情形证明.

(1) 当 $\mathrm{Var}(W_n) \leqslant n^\delta$ 时, 显然有 $\mathrm{Var}(W_n) \leqslant n / \log n$;

(2) 当 $\mathrm{Var}(W_n) > n^\delta$ 时, 由引理 2.1 和 2.2, 有

$$\mathrm{Var}(W_n) \log \frac{n^\delta}{8\mu^2} \leqslant \mathrm{Var}(W_n) \log \left[\frac{\mathrm{Var}(W_n)}{\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{E}|V_k|)^2} \right] \leqslant \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ent}(V_k^2) \leqslant \mu^2 n.$$

因此,

$$\mathrm{Var}(W_n) \leqslant \frac{\mu^2 n}{\log \frac{n^\delta}{8\mu^2}}.$$

取 $C = \max\{1, 2\mu^2/\delta\}$, 我们得到

$$\mathrm{Var}(W_n) \leqslant \frac{Cn}{\log n}.$$

证毕. □

3 定理 1.3 的证明

我们先介绍 $\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}$ 的方差的有界性与集中性的关系, 参见文献 [19, 推论 3.2] 或 [12, 引理 4.1]; 然后利用定理 1.2 的证明方法, 给出定理 1.3 的证明. 首先叙述文献 [12, 引理 4.1]:

引理 3.1 设随机变量为 X, 存在常数 $K>0$, 若对任意 $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{K}}$, 有

$$\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda X/2}) \leqslant K\lambda^2 \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}) < +\infty,$$

则

$$\mathrm{P}(|X-\mathrm{E}(X)| \geqslant t\sqrt{K}) \leqslant 8\mathrm{e}^{-t}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

定理 3.1 在上述模型中, μ 有限, $K = 4\mu^2 \mathrm{e}^{\mu} n/\log n$, 对任意 $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{K}}$, 有

$$\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) \leqslant K\lambda^2 \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n}). \tag{3.2}$$

由引理 3.1 和定理 3.1 可得

$$\mathrm{P}\left(|W_n - \mathrm{E}(W_n)| \geqslant t\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right) \leqslant 8\mathrm{e}^{-C_2 t},$$

其中 $C_2 = \frac{1}{2\mu \mathrm{e}^{\mu/2}}$. 从而证明了定理 1.3.

为了证明定理 3.1, 定义鞅差

$$U_k = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2} \mid \mathscr{F}_k) - \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2} \mid \mathscr{F}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

那么 $\mathrm{E}(U_k) = 0$. 由鞅分解 $\mathrm{e}^{\lambda W_n/2} - \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) = \sum_{k=1}^N U_k$, 利用 L^2- 鞅的正交性可得

$$\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) = \sum_{k=0}^N \mathrm{Var}(U_k). \tag{3.3}$$

由 Falik-Samorodnitsky 不等式可得

$$\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) \log\left[\frac{\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2})}{\sum_{k=1}^N (\mathrm{E}|U_k|)^2}\right] \leqslant \sum_{k=1}^N \mathrm{Ent}(U_k^2).$$

我们给出 $\sum_{k=1}^N (\mathrm{E}|U_k|)^2$ 和 $\sum_{k=1}^N \mathrm{Ent}(U_k^2)$ 的上界, 即下面的引理:

引理 3.2 在上述模型中, 若 μ 有限, 则

$$\sum_{k=1}^N (\mathrm{E}|U_k|)^2 \leqslant 2\mu^2\lambda^2 n^{1/2} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n}), \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=1}^N \mathrm{Ent}(U_k^2) \leqslant n\mu^2\lambda^2 \mathrm{e}^{\mu} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n}). \tag{3.5}$$

定理 3.1 的证明 类似定理 1.2 的证明, 我们分两种情形证明:

(1) 当 $\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) \leqslant 2\mu^2\lambda^2 n^{0.8} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n})$ 时, 显然有 $\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) \leqslant K\lambda^2 \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n})$;

(2) 当 $\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) > 2\mu^2\lambda^2 n^{0.8} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n})$ 时, 由 Falik-Samorodnitsky 不等式和引理 3.2, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) \log n^{0.3} &\leqslant \mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) \log\left[\frac{\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2})}{\sum_{k=1}^N (\mathrm{E}|U_k|)^2}\right] \\ &\leqslant \sum_{k=1}^N \mathrm{Ent}(U_k^2)\end{aligned}$$

$$\leqslant n\mu^2\lambda^2 \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n}).$$

因此,

$$\mathrm{Var}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}) \leqslant K\lambda^2\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n}).$$

证毕. □

4 引理的证明

为了证明引理 2.2 和 3.2, 首先引入一些记号, 记 $\mathring{\Gamma}(\omega)=\{\gamma\in\Pi_{1,n}: W_n(\omega)=T(\gamma)(\omega)\}$, 令

$$\mathrm{Geo}(1,n)(\omega) := \{e \mid \forall\,\gamma\in\mathring{\Gamma}(\omega), \text{有 } e\in\gamma\}.$$

$\mathrm{Geo}(1,n)$ 为随机集合, $\mathrm{Geo}(1,n)$ 所包含元素的个数 $|\mathrm{Geo}(1,n)|\leqslant n-1$. 若 $e\in\mathrm{Geo}(1,n)(\omega)$, 称 e 为 ω 的关键边, 下面估计 e 为关键边的可能性.

引理 4.1 完全图 $G_n=([n],E_n)$, $n\geqslant 2$, $\{X_e, e\in E_n\}$ 独立同分布, $\forall\, e\in E_n$, 则有

$$\mathrm{P}(e\in\mathrm{Geo}(1,n))\leqslant\frac{2}{n-1}. \tag{4.1}$$

证明 记边 $e_{ij}:=\langle i,j\rangle$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, 根据边的端点的不同, 分三种情形讨论:

(1) 边的端点是 1 和 n. 若边 e_{1n} 为关键边, 事件 $\{e_{1n}\in\mathrm{Geo}(1,n)\}$ 被事件 $\{\max\{X_e, e\neq e_{1n}\}<X_{e_{1n}}\}$ 包含, 则 $\mathrm{P}(e_{1n}\in\mathrm{Geo}(1,n))\leqslant\mathrm{P}(\max\{X_e,e\neq e_{1n}\}<X_{e_{1n}})$, 由对称性 $\mathrm{P}(X_e<X_{e_{1n}})\leqslant 1/2$, 利用独立性, 可得

$$\mathrm{P}(\max\{X_e,e\neq e_{1n}\}<X_{e_{1n}})=\mathrm{P}(X_e<X_{e_{1n}})^{n(n-1)/2-1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n(n-1)/2-1}\leqslant\frac{1}{n-1}.$$

因此,

$$\mathrm{P}(e_{1n}\in\mathrm{Geo}(1,n))\leqslant\frac{1}{n-1}.$$

(2) 边的一个端点是 1, 另一个端点不是 n. 由关键边的定义和对称性, 事件族 $\{\{e_{1m}\in\mathrm{Geo}(1,n)\}, 1<m<n\}$ 两两互斥, 且可能性相等, 那么,

$$(n-2)\mathrm{P}(e_{1m}\in\mathrm{Geo}(1,n))=\sum_{i=2}^{n-1}\mathrm{P}(e_{1i}\in\mathrm{Geo}(1,n))=\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=2}^{n-1}\{e_{1i}\in\mathrm{Geo}(1,n)\}\right)\leqslant 1.$$

因此,

$$\mathrm{P}(e_{1m}\in\mathrm{Geo}(1,n))\leqslant\frac{1}{n-1}.$$

当边的一个端点是 n, 另一个端点不是 1, 同理可证 $\mathrm{P}(e_{mn}\in\mathrm{Geo}(1,n))\leqslant 1/(n-1)$, $1<m<n$.

(3) 当边的两个端点都不是 1 和 n, 对边 e_{ij} 和 e_{kl}, $\langle i,j\rangle\neq\langle k,l\rangle$, $1<i,j,k,l<n$, 由对称性, 可得 $\mathrm{P}(e_{ij}\in\mathrm{Geo}(1,n))=\mathrm{P}(e_{kl}\in\mathrm{Geo}(1,n))$, 则有

$$\sum_{1<i<j<n}\mathrm{P}(e_{ij}\in\mathrm{Geo}(1,n))=\mathrm{E}\left(\sum_{1<i<j<n}\mathrm{I}_{\{e_{ij}\in\mathrm{Geo}(1,n)\}}\right)\leqslant\mathrm{E}|\mathrm{Geo}(1,n)|-2\leqslant n-3.$$

于是,

$$\mathrm{P}(e_{ij} \in \mathrm{Geo}(1,n)) \leqslant \frac{2}{n-2}.$$

因此,

$$\mathrm{P}(e \in \mathrm{Geo}(1,n)) \leqslant \frac{2}{n-1}.$$

证毕. □

考虑仅改变一条边的赋值时, 对 W_n 的影响. 若把边 e 的通过时间改为 r, 其他边通过时间不变, 记为 (ω_e^c, r), 即对于边 $g, e \in E_n$, 定义 $(\omega_e^c, r)_g = w_g$, $g \neq e$, $(\omega_e^c, r)_e = r$, 那么, $(\omega_e^c, r) \in \Omega$, (ω_e^c, r) 与 ω 仅仅在边 e 上通过时间不同. $\forall\, e \in E_n$, 定义随机变量

$$D_e(\omega) := \inf\{r \mid \text{存在 } \gamma \in \mathring{\Gamma}(\omega_e^c, r),\ r \leqslant \mu, \text{使得 } e \in \gamma\}.$$

性质 4.1 $\forall\, e \in E_n$, D_e 有下列性质:

(1) $D_e \leqslant \mu$;

(2) $\forall\, s \leqslant t \leqslant \mu, W_n((\omega_e^c, t) - W_n(\omega_e^c, s) = \min\{t-s, (t-D_e)^+\}$;

(3) 若 $s > D_e$, 则 $e \in \mathrm{Geo}(1,n)(\omega_e^c, s)$.

证明 利用随机变量 D_e 的定义, 可得性质 4.1. □

引理 2.2 (2.3) 的证明 记组态 ω 为 $(\omega_{<k}, \omega_{e_k}, \omega_{>k})$, 其中 $\omega_{<k} = (\omega_{e_j} : j < k)$, $\omega_{>k} = (\omega_{e_j} : j > k)$, $F(x) = \nu(-\infty, x]$, 由 $\mathrm{E}|V_k|$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|V_k| &= \mathrm{E}|\mathrm{E}(W_n \mid \mathscr{F}_k) - \mathrm{E}(W_n \mid \mathscr{F}_{k-1})| \\
&\leqslant \mathrm{E}[\mathrm{E}_\nu \mid \mathrm{E}(W_n \mid \mathscr{F}_k) - \mathrm{E}(W_n \mid \mathscr{F}_{k-1})|] \\
&= \iint \left| \int W_n(\omega_{<k}, t, \omega_{>k}) \mathrm{P}(d\omega_{>k}) - \int W_n(\omega_{<k}, s, \omega_{>k}) \nu(ds) \mathrm{P}(d\omega_{>k}) \right| \nu(dt) \mathrm{P}(d\omega_{<k}) \\
&\leqslant 2\mathrm{E} \iint_{t \geqslant s} |W_n(\omega_{<k}, t, \omega_{>k}) - W_n(\omega_{<k}, s, \omega_{>k})| \nu(ds) \nu(dt).
\end{aligned}$$

由性质 4.1(2) 和 $t \leqslant \mu$, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|V_k| &\leqslant 2\mathrm{E} \iint_{t \geqslant s} \min\{t-s, (t-D_{e_k})^+\} \nu(ds) \nu(dt) \\
&\leqslant 2\mu \mathrm{E} \int_{t > D_{e_k}} \nu(dt) \\
&\leqslant 2\mu \mathrm{P}(e_k \in \mathrm{Geo}(1,n)).
\end{aligned}$$

由引理 4.1, 得到 $\mathrm{E}|V_k| \leqslant 4\mu/(n-1)$. 另外,

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{E}|V_k|) \leqslant 2\mu \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(e_k \in \mathrm{Geo}(1,n)) \leqslant 2\mu(n-1).$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{E}|V_k|)^2 \leqslant 8\mu^2.$$

证毕. □

参见文献 [13] 中的方法, 我们得到两点分布的线性组合逼近 X_e 的分布; 然后利用两点 log-Sobolev 不等式、引理 4.1 和性质 4.1, 给出引理 2.2 (2.4) 的证明.

引入一些符号. 对边 $e \in E_n, \forall j \in \mathbb{N}, \pi_{e,j}$ 为 $\{0,1\}$ 上的均匀两点分布. 构造概率空间 $(\Omega_e, \mathscr{F}_e, \pi_e)$, 其中 $\Omega_e = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{F}_e$ 为 Ω_e 上的乘积 σ- 域, $\pi_e = \prod_{j=1}^{\infty} \pi_{e,j}$ 为 $(\Omega_e, \mathscr{F}_e)$ 的乘积测度, 其对应分布为均匀分布. 令 $I := \inf\{x \mid F(x) > 0\}$, 记

$$a_{0,j} = I, \quad a_{i,j} = \min\left\{x \,\middle|\, F(x) \geqslant \frac{i}{2^j}\right\}, \quad j \geqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^j - 1.$$

给定 $\omega_e = (\omega_{e,1}, \omega_{e,2}, \ldots, \omega_{e,m}, \ldots) \in \Omega_e$, 令 $i(\omega_e, j) = \sum_{l=1}^{j} 2^{j-l}\omega_{e,l}$, 定义 $T_j(\omega_e) := a_{i(\omega_e,j),j}$, 则 $\{T_j(\omega_e)\}$ 关于 j 为非降的. 由 μ 有限, 可证 $\lim_{j\to\infty} T_j$ 存在且有限, 记 $\lim_{j\to\infty} T_j = T_e$. 易证 T_e 的分布函数为 $F(x)$, 则 T_e 与 X_e 同分布.

构造乘积概率空间 $(\Omega_B, \mathscr{F}, \pi)$, 其中 $\Omega_B = \prod_{e\in E_n} \Omega_e$, $\mathscr{F}$ 为 Ω_B 上的乘积 σ- 域, $\pi = \prod_{e\in E_n} \pi_e$. 令

$$T(\omega_B) := (T_{e_1}(\omega_{e_1}), T_{e_2}(\omega_{e_2}), \ldots, T_{e_N}(\omega_{e_N})),$$

即 $T = \prod_{e\in E_n} T_e$. 函数 $f : \Omega_B \to \mathbb{R}$ 在位置 $\omega_{e,j}$ 上的差分为

$$\Delta_{e,j} f(\omega_B) = f(\omega_B^{e,j,+}) - f(\omega_B^{e,j,-}),$$

其中 $\omega_B = (\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \ldots, \omega_{e_N}) \in \Omega_B$; $\omega_B^{e,j,+}$ 表示在 $\omega_{e,j}$ 位置取值为 1, 其他位置的取值与 ω_B 相同; $\omega_B^{e,j,-}$ 表示在 $\omega_{e,j}$ 位置取值为 0, 其他位置的取值与 ω_B 相同. 令 $Y_n = W_n \circ T$, 则 $Y_n : \Omega_B \to \mathbb{R}^+$. $\mathscr{G}_k = \sigma(\{\omega_{e_r,j} : r \leqslant k, j \in \mathbb{N}\})$, $\mathscr{G}_0$ 为平凡的 σ- 域, 则 $\{\mathscr{G}_k, 0 \leqslant k \leqslant N\}$ 为非降的子 σ- 域族. 由定义知,

$$\mathrm{E}[W_n \mid \mathscr{F}_k](T(\omega_B)) = \mathrm{E}_\pi[Y_n \mid \mathscr{G}_k](\omega_B) \quad \pi\text{-a.s.}$$

定义鞅差 $Z_k = \mathrm{E}_\pi[Y_n \mid \mathscr{G}_k] - \mathrm{E}_\pi[Y_n \mid \mathscr{G}_{k-1}]$, 于是,

$$V_k^2(T(\omega_B)) = Z_k^2(\omega_B) \quad \pi\text{-a.s.},$$

那么 $\mathrm{Ent}(V_k^2) = \mathrm{Ent}_\pi(Z_k^2)$.

为了估计 $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ent}(V_k^2)$ 的大小, 我们给出下面的引理:

引理 4.2　我们有下面不等式:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ent}(V_k^2) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{e\in E_n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}_\pi(\Delta_{e,j} Y_n)^2. \tag{4.2}$$

证明　由 $\pi = \prod_{e\in E_n} \pi_e$, $\pi_e = \prod_{j=1}^{\infty} \pi_{e,j}$, 利用相对熵的次可加性可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_\pi(Z_k^2) &\leqslant \sum_{e\in E_n} \mathrm{E}_\pi \mathrm{Ent}_{\pi_e}(Z_k^2) \\ &\leqslant \sum_{e\in E_n} \mathrm{E}_\pi \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Ent}_{\pi_{e,j}}(Z_k^2).\end{aligned}$$

由文献 [20] 的两点 log-Sobolev 不等式, 可得

$$\mathrm{Ent}_{\pi_{e,j}}(Z_k^2) \leqslant \frac{1}{2} \mathrm{Ent}_{\pi_{e,j}}(\Delta_{e,j} Z_k)^2.$$

从而,

$$\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Ent}(Z_k^2)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{e\in E_n}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}_\pi(\Delta_{e,j}Z_k)^2.$$

对固定的边 e_i、正整数 j 和 k, 有

$$\Delta_{e_i,j}Z_k=\begin{cases}0, & k<i,\\ \mathrm{E}_\pi[\Delta_{e_i,j}Y_n\mid\mathscr{G}_k], & k=i,\\ \mathrm{E}_\pi[\Delta_{e_i,j}Y_n\mid\mathscr{G}_k]-\mathrm{E}_\pi[\Delta_{e_i,j}Y_n\mid\mathscr{G}_{k-1}], & k>i,\end{cases}\tag{4.3}$$

可得 $\mathrm{E}_\pi(\Delta_{e_i,j}Z_k)=0$. 利用鞅差的正交性, 得到

$$\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}_\pi(\Delta_{e_i,j}Z_k)^2=\mathrm{E}_\pi(\Delta_{e_i,j}Y_n)^2.$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Ent}(V_k^2)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{e\in E_n}\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}_\pi(\Delta_{e,j}Y_n)^2.$$

证毕. □

引理 2.2 (2.4) 的证明 令 $\pi_{e^c}:=\prod_{g\neq e}\pi_g$, $\omega_{e,>j}=(\omega_{e,j+1},\omega_{e,j+2},\ldots)$, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{j-1})\in\{0,1\}^{j-1}$, $\pi_{e,\geqslant j}=\prod_{m=j}^{\infty}\pi_{e,m}$,

$$(\omega_{e^c},\sigma,\omega_{e,j},\omega_{e,>j})_{g,k}=\begin{cases}\omega_{g,k}, & g\neq e,\\ \omega_{e,k}, & g=e, \quad k>j,\\ \omega_{e,j}, & g=e, \quad k=j,\\ \sigma_k, & g=e, \quad k<j.\end{cases}$$

从而,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\pi[(\Delta_{e,j}Y_n)^2]&=\mathrm{E}_{\pi_{e^c}}\mathrm{E}_{\pi_{e,1}}\cdots\mathrm{E}_{\pi_{e,j-1}}\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(\Delta_{e,j}Y_n)^2\\&=\mathrm{E}_\pi\left[\frac{1}{2^{j-1}}\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{j-1}}\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(\Delta_{e,j}Y_n(\omega_{e^c},\sigma,\omega_{e,j},\omega_{e,>j}))^2\right]\\&=\mathrm{E}_\pi\left[\frac{1}{2^{j-1}}\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{j-1}}\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(Y_n(\omega_{e^c},\sigma,1,\omega_{e,>j})-Y_n(\omega_{e^c},\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\right].\end{aligned}$$

由性质 4.1, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(Y_n(\omega_{e^c},\sigma,1,\omega_{e,>j})-Y_n(\omega_{e^c},\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\\&\quad=\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}[\min\{(T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})-T_e(\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2,(T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})-D_e)^{+2}\}]\\&\quad\leqslant\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}[(T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})-T_e(\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\mathbf{1}_{\{T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})>D_e\}}].\end{aligned}$$

由 T_e 定义知, 事件 $\{T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})>D_e\}\subseteq\{T_e(\vec{1}_j,1,\omega_{e,>j})>D_e\}$, 其中 $\vec{1}_j$ 表示每个分量都是 1 的 j 维向量. 另外, 若存在序数 $0=a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_m$, 则不等式 $\sum_{i=1}^m(a_i-a_{i-1})^2\leqslant a_m^2$ 成立, 以及 $T_e\leqslant\mu$ a.s., 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{j-1}}\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(Y_n(\omega_{e^c},\sigma,1,\omega_{e,>j})-Y_n(\omega_{e^c},\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\\
&\quad\leqslant\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}\Bigg[\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{j-1}}(T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})-T_e(\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\mathbf{1}_{\{T_e(\vec{1}_j,1,\omega_{e,>j})>D_e\}}\Bigg]\\
&\quad\leqslant\mu^2\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}[\mathbf{1}_{\{T_e(\vec{1}_j,1,\omega_{e,>j})>D_e\}}]\\
&\quad\leqslant\mu^2\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(\mathbf{1}_{\{e\in\mathrm{Geo}(1,n)\}}).
\end{aligned}$$

我们得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}_\pi(\Delta_{e,j}Y_n)^2\leqslant\frac{\mu^2}{2}\mathrm{E}_\pi\Bigg[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}}\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(\mathbf{1}_{\{e\in\mathrm{Geo}(1,n)\}})\Bigg]\leqslant\mu^2\mathrm{E}(\mathbf{1}_{\{e\in\mathrm{Geo}(1,n)\}}).$$

从而,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Ent}(V_k^2)&\leqslant\sum_{e\in E_n}\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}_\pi(\Delta_{e,j}Y_n)^2\\
&\leqslant\mu^2\sum_{e\in E_n}\mathrm{E}(\mathbf{1}_{\{e\in\mathrm{Geo}(1,n)\}})\\
&=\mu^2\mathrm{E}\Bigg(\sum_{e\in E_n}\mathbf{1}_{\{e\in\mathrm{Geo}(1,n)\}}\Bigg)\\
&\leqslant\mu^2(n-1).
\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Ent}(V_k^2)\leqslant\mu^2 n.$$

证毕. □

引理 3.2 的证明 我们先证 (3.4). 由 $\mathrm{E}|U_k|$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|U_k|&=\mathrm{E}|\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\mid\mathscr{F}_k)-\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\mid\mathscr{F}_{k-1})|\\
&\leqslant\mathrm{E}[\mathrm{E}_\nu|\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\mid\mathscr{F}_k)-\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\mid\mathscr{F}_{k-1})|]\\
&=\int\int\bigg|\int\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}(\omega_{<k},t,\omega_{>k})\mathrm{P}(d\omega_{>k})\\
&\quad-\int\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}(\omega_{<k},s,\omega_{>k})\nu(ds)\mathrm{P}(d\omega_{>k})\bigg|\nu(dt)\mathrm{P}(d\omega_{<k})\\
&\leqslant2\mathrm{E}\iint_{t\geqslant s}|\mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_{<k},t,\omega_{>k})/2}-\mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_{<k},s,\omega_{>k})/2}|\nu(ds)\nu(dt).
\end{aligned}$$

由性质 4.1(2)、Cauchy-Schwarz 不等式、引理 4.1 以及 μ 有限, 得到

$$\mathrm{E}|U_k|\leqslant\mathrm{E}\iint_{t\geqslant s}\lambda\mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_{<k},t,\omega_{>k})/2}[W_n(\omega_{<k},t,\omega_{>k})-W_n(\omega_{<k},s,\omega_{>k})]\nu(ds)\nu(dt)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mathrm{E}\iint_{t\geqslant s} \lambda \mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_{<k},t,\omega_{>k})/2}\min\{t-s,(t-D_{e_k})^+\}\nu(ds)\nu(dt)\\
&\leqslant \mu\lambda \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\mathbf{1}_{\{e_k\in \mathrm{Geo}(1,n)\}})\\
&\leqslant \mu\lambda\sqrt{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n})\mathrm{P}(\mathbf{1}_{\{e_k\in \mathrm{Geo}(1,n)\}})}\\
&\leqslant \mu\lambda\sqrt{\frac{3\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n})}{n}}.
\end{aligned}
$$

另外,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N(\mathrm{E}|U_k|) &\leqslant \mu\lambda\sum_{k=1}^N \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\mathbf{1}_{\{e_k\in \mathrm{Geo}(1,n)\}})\\
&=\mu\lambda \mathrm{E}\bigg(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\sum_{k=1}^N\mathbf{1}_{\{e_k\in \mathrm{Geo}(1,n)\}}\bigg)\\
&\leqslant \mu\lambda n\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n/2})\\
&\leqslant \mu\lambda n\sqrt{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n})}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\sum_{k=1}^N(\mathrm{E}|U_k|)^2\leqslant 2\mu^2\lambda^2 n^{1/2}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n}).
$$

下面证明 (3.5). 我们引入前面出现的符号. 令 $M_n=\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\circ T$, 则有

$$
\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\lambda W_n/2}\mid \mathscr{F}_k](T(\omega_B))=\mathrm{E}_\pi[M_n\mid \mathscr{G}_k](\omega_B)\quad \pi\text{-a.s.}
$$

定义鞅差

$$
Z_k=\mathrm{E}_\pi[M_n\mid\mathscr{G}_k]-\mathrm{E}_\pi[M_n\mid\mathscr{G}_{k-1}],
$$

那么,

$$
U_k^2(T(\omega_B))=Z_k^2(\omega_B)\quad \pi\text{-a.s.}
$$

因此,

$$
\mathrm{Ent}(U_k^2)=\mathrm{Ent}_\pi(Z_k^2).
$$

类似引理 4.2, 可得

$$
\sum_{k=1}^N \mathrm{Ent}_\pi(Z_k^2)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{e\in E_n}\sum_{j=1}^\infty \mathrm{E}_\pi(\Delta_{e,j}M_n)^2, \tag{4.4}
$$

$$
\mathrm{E}_\pi[(\Delta_{e,j}M_n)^2]=\mathrm{E}_\pi\Bigg[\frac{1}{2^{j-1}}\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{j-1}}\mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}(M_n(\omega_{e^c},\sigma,1,\omega_{e,>j})-M_n(\omega_{e^c},\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\Bigg],
$$

$$
\begin{aligned}
&(Y_n(\omega_{e^c},\sigma,1,\omega_{e,>j})-Y_n(\omega_{e^c},\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\\
&\quad\leqslant\lambda^2[\mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_{e^c},\sigma,1,\omega_{e,>j})}\min\{(T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})-T_e(\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2,(T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})-D_e)^{+2}\}]\\
&\quad\leqslant\lambda^2\mathrm{e}^{\mu}[\mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_B)}(T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})-T_e(\sigma,0,\omega_{e,>j}))^2\mathbf{1}_{\{T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j})>D_e\}}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}_\pi[(\Delta_{e,j} M_n)^2] \\
&\quad \leqslant \lambda^2 \mathrm{e}^\mu \mathrm{E}_\pi\left[\mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_B)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{j-1}} (T_e(\sigma, 1, \omega_{e,>j}) - T_e(\sigma, 0, \omega_{e,>j}))^2 \mathbf{1}_{\{T_e(\sigma,1,\omega_{e,>j}) > D_e\}}\right] \\
&\quad \leqslant \mu^2 \lambda^2 \mathrm{e}^\mu \mathrm{E}_\pi\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} \mathrm{E}_{\pi_{e,\geqslant j}}[\mathrm{e}^{\lambda W_n(\omega_B)} \mathbf{1}_{\{T_e(\vec{1}_j, \omega_{e,>j}) > D_e\}}]\right\} \\
&\quad = 2\mu^2 \lambda^2 \mathrm{e}^\mu \mathrm{E}_\pi\{\mathrm{E}_{\pi_e}[\mathrm{e}^{\lambda W_n} \mathbf{1}_{\{T_e(\vec{1}_j, \omega_{e,>j}) > D_e\}}]\} \\
&\quad \leqslant 2\mu^2 \lambda^2 \mathrm{e}^\mu \mathrm{E}_\pi[\mathrm{e}^{\lambda W_n} \mathbf{1}_{\{T_e(\omega_e) > D_e\}}] \\
&\quad = 2\mu^2 \lambda^2 \mathrm{e}^\mu \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n} \mathbf{1}_{\{e \in \mathrm{Geo}(1,n)\}}).
\end{aligned}
$$

从而,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ent}(U_k^2) &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{e \in E_n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}_\pi(\Delta_{e,j} M_n)^2 \\
&\leqslant \mu^2 \lambda^2 \mathrm{e}^\mu \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda W_n} \sum_{e \in E_n} \mathbf{1}_{\{e \in \mathrm{Geo}(1,n)\}}\right) \\
&\leqslant n\mu^2 \lambda^2 \mathrm{e}^\mu \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\lambda W_n}).
\end{aligned}
$$

证毕. □

参考文献

1 Baik J, Suidan T M. A GUE central limit theorem and universality of directed first and last passage site percolation. Int Math Res Not IMRN, 2005, 2005: 325–337

2 Baik J, Deift P, McLaughlin K T R, et al. Optimal tail estimates for directed last passage site percolation with geometric random variables. Adv Theor Math Phys, 2001, 5: 1207–1250

3 Bodineau T, Martin J. A universality property for last-passage percolation paths close to the axis. Electron Commun Probab, 2005, 10: 105–112

4 Hambly B, Martin J B. Heavy tails in last-passage percolation. Probab Theory Related Fields, 2006, 137: 227–275

5 O'Connell N. Random matrices, non-colliding processes and queues. In: Séminaire de Probabilités XXXVI. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1801. New York: Springer, 2003, 165–182

6 Widom H. On convergence of moments for random Young tableaux and a random growth model. Int Math Res Not IMRN, 2002, 2002: 455–464

7 Hammersley J, Welsh D. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In: Bernoulli 1713, Bayes 1763, Laplace 1813. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1965, 61–110

8 Auffinger A, Damron M, Hanson J. 50 Years of First-Passage Percolation. Providence: Amer Math Soc, 2018

9 Kesten H. On the speed of convergence in first-passage percolation. Ann Appl Probab, 1993, 3: 296–338

10 Benjamini I, Kalai G, Schramm O. First passage percolation has sublinear distance variance. Ann Probab, 2003, 31: 1970–1978

11 Talagrand M. On Russo's approximate zero-one law. Ann Probab, 1994, 22: 1576–1587

12 Benaïm M, Rossignol R. Exponential concentration for first passage percolation through modified Poincaré inequalities. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2008, 44: 544–573

13 Damron M, Hanson J, Sosoe P. Sublinear variance in first passage percolation for general distributions. Probab Theory Related Fields, 2015, 163: 223–258

14 Eckhoff M, Goodman J, van der Hofstad R, et al. Short paths for first passage percolation on the complete graph. J Stat Phys, 2013, 151: 1056–1088

15 Eckhoff M, Goodman J, van der Hofstad R, et al. Long paths in first passage percolation on the complete graph I: Local PWIT dynamics. ArXiv:1512.06152, 2015
16 Eckhoff M, Goodman J, van der Hofstad R, et al. Long paths in first passage percolation on the complete graph II: Global branching dynamics. ArXiv:1512.06145, 2015
17 Wu X Y, Zhu R. On the time constant for last passage percolation on complete graph. ArXiv:1711.04059, 2017
18 Falik D, Samorodnitsky A. Edge-isoperimetric inequalities and influences. Combinator Probab Comp, 2007, 16: 693–712
19 Ledoux M. The Concentration of Measure Phenomenon. Providence: Amer Math Soc, 2001
20 Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities. Amer J Math, 1975, 97: 1061–1083

Upper bound estimate of variance in last passage percolation on complete graph

Feng Wang & Xianyuan Wu

Abstract This paper focuses on the variance in last passage percolation on the complete graph. Let $G_n = ([n], E_n)$ be the complete graph and the independent and identically distributed sequence $\{X_e,\ e \in E_n\}$ be the passage times of edges, and denote by W_n the largest passage time among all self-avoiding paths from 1 to n. We prove that the variance of W_n is sublinear, obeying the upper bound $Cn/\log n$, where C is independent of n. In addition, we prove the exponential concentration inequality $\mathrm{P}(|W_n - \mathrm{E}(W_n)| \geqslant t\sqrt{n/\log n}) \leqslant C_1 \mathrm{e}^{-C_2 t}$.

Keywords complete graph, last passage percolation, time constant, martingale decomposition, concentration inequality

MSC(2010) 60K35

doi: 10.1360/N012018-00171