

KPZ 方程与 KPZ 普适性简介

献给王梓坤教授 90 华诞

董昭^{1,2}, 李利平^{1*}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: dzhao@amt.ac.cn, liliping@amss.ac.cn

收稿日期: 2018-03-09; 接受日期: 2018-10-16; 网络出版日期: 2019-03-13; * 通信作者

中国科学院数学与系统科学研究院华罗庚数学科学中心、中国科学院随机复杂结构与数据科学重点实验室 (批准号: 2008DP173182) 和国家自然科学基金 (批准号: 11431014, 11688101 和 11801546) 资助项目

摘要 本文首先介绍 KPZ (Kardar-Parisi-Zhang) 普适类的物理背景, 其中, Eden 模型、黏性落体模型和 KPZ 方程这几类物理模型将被提及; 其次, 将考察一维 KPZ 方程的 Cole-Hopf 解以及几类收敛到一维 KPZ 方程的离散模型 (如角落生长模型和定向聚合物模型等).

关键词 KPZ 方程 KPZ 普适类 涨落 动态标度律

MSC (2010) 主题分类 82C22, 60H15

1 物理中的 KPZ: 统计物理背景

KPZ 方程是由 Kardar 等^[1]提出的, 用来模拟几类离散生长模型 (如气相沉淀 (vapor deposition) 和 Eden 模型^[2]等) 的连续近似. 它所刻画的生长过程是统计物理中一类很重要的非平衡过程. 为此, 我们先来回顾统计物理中平衡态和非平衡态的相关知识, 再介绍与之相关的分形现象和涨落理论, 以便读者对其背后的物理直观有一个大概的认识.

1.1 非平衡过程与非线性

平衡态是热力学的一个基本概念, 它意指除非有外来作用, 体系的宏观性质不随时间而变化, 即体积、压强和温度等热力学量均保持不变 (参见文献 [3]). 例如, 将一团花粉置入水中, 经过足够长的时间, 花粉将经过扩散运动而均匀分布在水中, 由水和花粉构成的体系最终达到平衡态, 宏观性质保持不变.

非平衡态, 顾名思义, 即体系处于并非平衡态的状态. 水中的花粉在未扩散均匀之前即处于非平衡态. 当体系处在“偏离平衡态不远”的非平衡态时, 它会自发地趋于平衡态, 这一过程称作弛豫过程

英文引用格式: Dong Z, Li L P. A brief introduction to KPZ equation and KPZ universality (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 339–376, doi: 10.1360/N012018-00053

(如上述花粉的扩散过程). 不严格地说, 弛豫过程的实现一般是由某种“线性定律”保证的. 以热传导过程为例, 它的宏观实验规律是著名的 Fourier 定律: $q = -\kappa \nabla T$, 其中, T 是体系中的温度分布, q 是体系中热量传输的速度, κ 是与体系有关的热传导系数. $-\nabla T$ 表示体系中温度高低不均的势差, 方向从高温区指向低温区. Fourier 定律表明, q 与 $-\nabla T$ 成正比. 于是, 热量只会从高温区流向低温区 (而不会反过来), 最终体系达到热平衡.

然而, 当体系偏离“线性区” (即前述所谓的“离平衡态不远的状态”) 时, 体系的演化不再按照某种固定方向进行 (例如, 若 $q = -\kappa_1 \nabla T + \kappa_2 (\nabla T)^2$, q 便不再总是从高温区指向低温区), 最终很可能不会达到平衡态. 湍流是一个典型的例子: 假如地表的空气与上层的空气存在势差 (未必是因为温度的高低, 可能还因压强等其他因素), 当势差达到一定程度, 地表的空气开始上升; 然而, 气流上升必然造成底部空气不足, 迫使上层空气下降以填补不足, 从而形成所谓的“对流”. 对流是偏离线性区的行为. 否则, 将只有地表空气的上升而不见上层空气的下沉, 这显然不符合实际. 事实上, 驱动流体运动的 Navier-Stokes 方程便含有一个关键的非线性项 $v \cdot \nabla v$ (v 表示流体的速度), 一般称它为“对流项”. 正是由于非线性的对流项的存在, 湍流是一个混沌系统, 其速度场的演化表现出极不规则的随机性.

需要指出的是, 非平衡过程通常意味着体系与外界存在着物质或者能量的交换. 它虽然最终可能达不到平衡态, 但演化过程却往往表现出稳定的规律性和组织性 (参见文献 [4]). 例如, 雪花的形成、海岸线的冲积、植物的生长等过程, 它们都需要向外界吸收或释放能量, 偶或伴有物质交换. 同时, 这些过程都表现出清晰的自相似性, 具有某种分形结构. 甚至, 湍流也可以被认为是由各种大小尺度的漩涡构成的分形, 这就是著名的 K41 模型 (参见文献 [5, 6]).

1.2 分形现象

分形 (fractal) 是一种无特征尺度现象 (参见文献 [7, 8]). 所谓具有特征尺度, 是指可以用特定单位的“尺子”来测量某种物理量. 如成年人的身高, 通常介于一到两米之间, 因此, 用“1 米”为基本单位就能给出其在合理误差范围内的值. 当然也可以用“厘米”做单位, 但这两种不同的尺度在本质上并无区别. 就像我们说姚明的身高是 2.26 米或者 226 厘米, 只是同一个特征尺度下的不同使用习惯而已. 分形则不同. 图 1 是著名的 Koch 雪花 (snowflake). 它从一个边长为 $1/3$ (即周长为 1) 的三角形出发, 不断的生长分裂, 每一次分裂都使得周长增长为原来的 $4/3$ 倍, 因而极限图像的总周长等于 ∞ . 但这种严格数学意义下的长度对现实问题没有参考价值. 再如测量海岸线的长度, 同 Koch 雪花一样, 不断缩小“尺子”的精度, 最终在严格数学意义下得到的数值必然是无穷大. 这个结果显然也没有现实意义. 因而, 我们通常所说的海岸线长度, 是用某种固定大小的尺子按照 Euler 折线的方式, 计算出“粗糙”的结果. 针对不同的需求, 我们可以选取不同的尺子, 得到不同的精度. 回到 Koch 雪花的情形, 用 $1/3$ 为特征尺度的“尺子”来测量, 周长是 1; 以 $(1/3)^2$ 为特征尺度的尺子来测量, 周长是 $4/3$; 以 $(1/3)^n$ 为特征尺度的尺子来测量, 周长是 $(4/3)^{n-1}$. 因而, 它没有固定的“特征尺度”, 而可以根据不同的实际需求选取不同的特征尺度.

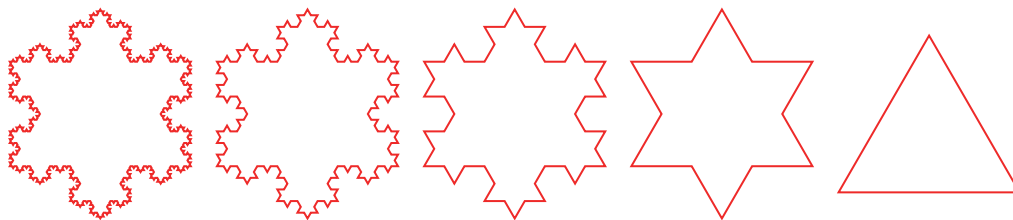


图 1 Koch 雪花

分形无特征尺度, 并不意味着它是杂乱无章的. 相反, 如图 1 所示, Koch 雪花表现出明显的对称性和自相似性: 将细小的尖端部位放大之后, 我们会发现, 细节处的分裂生长状态与放大之前的状况一模一样. 这种自相似性可以用某种幂律 (power law) 来描述. 用 $r (= (1/3)^n)$ 来表示选取的尺度, $L(r) (= (4/3)^{n-1})$ 表示尺度 r 下的周长. 显然, $L(r) = \frac{3}{4}r^\mu$, 其中, $\mu = 1 - \log 4 / \log 3$ 与尺度的选取无关. 于是, 尽管特征尺度会变, 我们还是能够得到一个不变量 μ . 将上述幂律稍作变形即可发现 μ 的物理意义:

$$N(r) := \frac{L(r)}{r} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^d, \quad d = 1 - \mu = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26. \quad (1.1)$$

注意, $N(r)$ 表示 r 尺度下测量需要的次数, $1/r$ 是测量单位长度的“一维”线段需要的次数 (正比系数 $3/4$ 不本质). 参数 d 与尺度选取无关的, 因而称作 Koch 雪花的分形维数, 它实际上就是通常所说的 Hausdorff 维数. 很容易证明, (1.1) 所反映的幂律与下面的标度变换的不变性等价 (正比系数可能不同, 但正如前述, 它并不本质):

$$N(\lambda^{-1}r) = \lambda^d N(r), \quad \forall \lambda > 0. \quad (1.2)$$

也就是说, 我们实际上有两种等价的方式 (1.1) 和 (1.2) 来描述某个分形的性质. 后一种 (即标度变换) 在数学推广上有天然的优势, 我们将在下文中主要采用这种方式. 例如, 尺度的选择依赖的变量可能不止一个 r , 而是 r_1, r_2 等多个, 自相似性的表述可由 (1.2) 推广为

$$N(\lambda^{-\nu}r_1, \lambda^{-1}r_2) = \lambda^d N(r_1, r_2), \quad \forall \lambda > 0. \quad (1.3)$$

此时, 尺度变量 r_1 与 r_2 之间可能不是完全独立的 (由参数 ν 联系), 而要确定相应的分形性质, 我们需要确定两个参数 ν 和 d . 另一方面, 如果考察的模型是随机模型, (1.2) 和 (1.3) 中的等号还可以解释为分布意义下的等价关系.

值得强调的是, 一般标度变换 (1.2) 中的尺度 r 不必是具体的外延量 (长度和面积等), 也可以是其他的物理量. 它的取值未必是离散的, 也可以是连续的. 例如, 在描述顺磁体向铁磁体相变的 Ising 模型中, 尺度可取作温度高于 Curie 点的部分 $r = T - T_c$ (T 是体系的温度, T_c 是 Curie 点, 即临界温度), 这是一个连续变量. 标度变换中相应的函数 N 可取为两个关联自旋的距离, 称为关联长度 (在统计物理中一般记作 ξ , 参见文献 [3]), 也可取作磁化强度和磁化率等. 另一方面, 一般标度变换中的参数 ν 和 d 等可能具有其他物理意义, 而未必像 Koch 雪花那样, 反映的是曲线的维数. 在临界现象中, 这些参数一般称作临界指数.

1.3 涨落与白噪声

在统计物理中, 原则上, 涨落 (fluctuation) 现象可分为两种 (参见文献 [3]): 围绕平均值的涨落和 Brown 粒子运动 (这里为了与通常理解的概率中的 Brown 运动加以区分, 故用此称谓). 前者比较好解释. 平衡态的统计系综 (ensemble) 理论认为, 平衡态对应于系综的密度分布 (通常称作 Gibbs 分布), 而宏观量是对应的微观量的统计平均值. 很显然, 在每一个瞬间, 体系的宏观量不见得都等于对应微观量的平均值, 每次测量都可能存在一定的偏差, 这种现象就称作围绕平均值的涨落. 具体来讲, 用 $\langle \cdot \rangle$ 表示统计平均, 对于微观量 u 来说, 它的宏观量即统计平均值 $\langle u \rangle$, 涨落的绝对大小就是它的方差 $\langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2$, 而相对涨落是指:

$$\mathcal{F}_u := \frac{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2}{\langle u \rangle^2}.$$

在物理上, 我们可以证明 (参见文献 [3, 第 6.4 小节]): 当相对涨落 “较小” 时, 观测量的偏差 (如 $u - \langle u \rangle$) 满足 Gauss 分布.

下面简要说明第二种涨落: Brown 粒子运动. 这是理解很多随机偏微分方程 (包括 KPZ 方程) 物理背景的一把钥匙. 由于众所周知的原因, 在水中运动直径大小约为 10^{-4} cm 的花粉粒子一般也称作 Brown 粒子, 它在不停地做无规则运动. Brown 粒子运动是由于 Brown 粒子受到周围水分子的不规则碰撞造成的 (一般情形下, 碰撞频率可高达 10^{21} 次/s, 参见文献 [3, 第 6.8 小节]). 于是, Brown 粒子在位置 $X(t)$ (t 表示时刻) 除了受到容易确定的重力、浮力和黏性阻力等作用, 还受到不容易确定的由水分子的不规则碰撞造成的 “涨落力”. 对于后者, 我们来考察 $t \rightarrow t + \Delta t$ 时间内涨落力的时间平均. 注意到, 在这一段宏观短的时间内, 水分子已经碰撞了 Brown 粒子相当多的次数. 按照统计系综的观点, 这段微观 “长” (相对于碰撞次数) 的时间内涨落力的时间平均, 可以认为等效于 t 时刻涨落力的系综平均. 不同于上一种涨落 (系综分布来源于平衡态的统计描述), 此时的系综分布源于 $t \rightarrow t + \Delta t$ 之间水分子碰撞的分布规律. 显然, 相对于 Brown 粒子 “巨大” 的体积, 水分子由碰撞造成的涨落力是很小的, 故而合理的假设是: 涨落力在系综分布下的均值为 0 (碰撞差不多是各向同性的), 并且服从 Gauss 分布 (主要集中在小碰撞). 另一方面, 不难理解, 在 t 时刻和 t' 时刻 ($t \neq t'$), 水分子对 Brown 粒子的碰撞应该是不相关的. 因此, 如果用 $\eta(t)$ 表示 t 时刻由水分子的碰撞造成的涨落力, 那么它是系综分布下的 Gauss 型随机变量 (不严格地说, 定义 “随机” 的样本空间是 t 时刻大量的水分子碰撞), 并且

$$E[\eta(t)] = 0, \quad E[\eta(t)\eta(t')] = D\delta(t - t'), \quad (1.4)$$

其中, $E[\cdot]$ 表示关于系综分布的积分, $D > 0$ 是涨落力大小的度量, $\delta(\cdot)$ 是著名的 δ 函数, 它表示 $t \neq t'$ 时刻的涨落力不存在关联.

注 1.1 满足 (1.4) 的 $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ 称作 (时间) 白噪声 (white noise). 从数学意义上来讲, 我们希望通过 (1.4) 建立一族 “独立同分布” 的 Gauss 型随机变量 $\{\eta(t) : t \geq 0\}$. 然而, 由于时间集不可数, 因而它在严格意义下是不存在的. 我们将在后文中说明 (见第 3.1 小节), (1.4) 需要在广义函数的意义下进行解释, 在数学上才是严格的, 好在这种解释与物理学家的初衷并不违背.

在涨落力用 $\eta(t)$ 表示之后, Brown 粒子在水平某方向 (如此, 可忽略重力和浮力的作用; 同时, 为简便起见, 仍用 $\eta(t)$ 表示此方向的涨落力, $X(t)$ 表示 Brown 粒子在此方向的位置分量) 的受力满足如下的 Langevin 方程:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -\alpha \frac{dX}{dt} + \eta(t), \quad (1.5)$$

其中, 方程左边表示由 Newton 第二定律决定的 Brown 粒子受到的合力 (m 是 Brown 粒子的质量); 方程右边的第一项是黏性力, 与速度大小成正比, 方向相反, 比例系数为 α . 假设初始速度 $\frac{dX}{dt} \Big|_{t=0} = 0$ 及初始位置 $X(0) = 0$. 不难验证, 任意时刻的平均位移都等于 0, 即 $E[X(t)] = 0$. 进一步, 可以证明: 对 Brown 粒子运动起关键作用的是 $X(t)$ 的涨落, 它大约等于 $E[X(t)^2] \approx \frac{Dm^2}{\alpha^2} \cdot t$.

涨落理论中一类重要的问题是观测量的空间/时间关联. 换句话说, 观测量在空间 (或时间) 中某一处发生的涨落是否会影响到另一处的涨落, 如何衡量这种影响? 这种涨落之间的相关性一般用关联函数来描述. 对于平衡态系综分布下的涨落, 假如观测量 $u(x)$ 与空间位置 x 有关, 那么 x 与 x' 处的空间关联函数即为 $C_u(x, x') := \langle u(x)u(x') \rangle - \langle u(x) \rangle \langle u(x') \rangle$. 一般地, 如果体系是均匀的, 那么 $C_u(x, x')$ 只与 $r := |x - x'|$ 相关, 我们可以不严格地写作 $C_u(x, x') = C_u(|x - x'|) = C_u(r)$. 除去极端情形 (如临界现象), 足够远处的关联性应该较弱. 故而关联函数 C_u 在 $r \rightarrow \infty$ 时可能满足类似于 (1.1) 或 (1.2) 的幂律 (当然也可能是其他渐近性). 时间关联函数可以类似定义. 如 (1.4) 所示, Brown 粒子受到的涨

落力 $\eta(t)$ 在不同时间是没有关联的, 但这并不意味着它的其他相关量的涨落没有时间关联. 例如, 令 $v(t) := dX/dt$ 表示满足 (1.5) 的 (一维) Brown 粒子的速度. 仍然假设 $v(0) = 0$, 不难验证 $E[v(t)] = 0$. 进一步还可以证明, v 的时间关联函数是

$$C_v(t, t') := E[v(t)v(t')] = \frac{Dm}{2\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m} \cdot |t-t'|}.$$

它随着 $|t - t'| \rightarrow \infty$ 以指数速度衰减, 而不是以多项式速度 (幂律) 衰减.

当然, 时间和空间变量在涨落理论和涨落关联的探讨中未必彼此独立, 也许是纠缠在一起的. 这时, 时空变量可能会以合适的方式配合 (如同 (1.2) 中的 r_1 和 r_2) 来参与对涨落和关联函数的影响. 作为涨落力 (1.4) 的直接推广, 时空白噪声 (space-time white noise) 是一个简单但重要的反映时空变量纠缠配合的例子, 它是以 (t, x) 为参量的满足下式的 Gauss 型随机变量族 $\{\eta(t, x)\}$:

$$E[\eta(t, x)] = 0, \quad E[\eta(t, x)\eta(t', x')] = D\delta(t - t')\delta(x - x'). \quad (1.6)$$

直观上, 我们可以把它理解为 (t, x) “时刻” 的涨落力 (不同 “时刻” 无关联, 与 (1.4) 对应), 或者如文献 [9] 在随机波动方程中诠释的 “风沙中的琴弦” 受到沙砾的无规则碰撞. 类似于涨落力 (白噪声) 在 (1.5) 中为 Brown 粒子的位置和速度等引入了涨落, 时空白噪声在一些与时空变量均相关的演化系统中也能够为相关物理量引入涨落, 使得相关的涨落大小和关联函数的计算成为可能, 进而能够与实验事实加以比较, 验证模型的科学性和可靠性.

2 物理中的 KPZ: 界面生长模型

界面生长 (growing surface/interface) 问题源于如下的物理认识: 在同一种物质形态内部, 物理量是均匀变化的, 奇异性只发生在不同物质形态的交界处. 因而, 如何描述界面的生长变化, 如何衡量界面层厚度, 对相变等涉及物质不同形态的问题有着重要的意义. 本节将首先介绍两类重要的界面生长模型 (Eden 模型和落体模型), 再介绍它们的连续近似, 即由 Kardar 等提出的 KPZ 方程.

2.1 Eden 模型

Eden^[2] 提出了平面格点上的一个离散生长模型. 最简单的形式如下: 取定一个格点作为最初的 “种子” 集合, 每一次从与 “种子” 集合距离为 1 的格点中等可能地选取一个, 加入 “种子” 集合. 如此不断地进行下去, “种子” 集合的不断扩张即描述了一种生长过程. 文献 [10, 图 4.1.3] 是 Herrmann 模拟的经过 1,500 次扩张的 Eden 簇 (即上述的 “种子” 集合), 它表明, 在经过较长的时间后, Eden 簇是近乎充满的, 并且是差不多各向均匀的向四周扩张, 但它的边缘非常粗糙, 这也正是我们关注的地方.

要研究 Eden 簇的界面曲线, 上述 Eden 簇的不便之处在于, 它不能在平面坐标系中将曲线写成单值函数的形式 (如同 $y = f(x)$, 其中, (x, y) 是界面曲线上的某点). 因而, 通常采取如下的改良方式: 只考虑横坐标为 $1 \sim x$ 之间的部分格点 (即采用周期边界条件), 并选定底边 (高度 $h = 0$) 的一排格点为初始的种子集合, 按照 Eden 的方式不断地往种子集合加入格点, 但此时多一条限制: 与底边相邻的点, 只有处在上方的才能加入种子集合. 同一般的 Eden 模型类似, 在大时间尺度下, 固定底边的 Eden 簇也是近乎充满地、均匀地往上生长, 但顶部的界面区域非常粗糙.

一般来说, Eden 簇在横坐标 $i (\in \{1, \dots, x\})$ 处的高度 h_i 表示种子集合中横坐标为 i 的格点的最大高度. 调整往 Eden 簇中加入格点的速率, 可将时间定义为 $t := N/x$, N 是已经加入 Eden 簇的格点

数. 由于 Eden 簇几乎充满地往上生长, 不难看出, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $t \approx \bar{h} = \bar{h}(t) := (\sum_i h_i)/x$. 将 t 时刻 Eden 簇在 i 处的高度记作 $h(t, i)$, 它可以看成是围绕在平均高度 $\bar{h}(t)$ 附近的波动. 进而, 围绕平均高度的涨落

$$w(t, x) := \left(\frac{1}{x} \sum_{i=1}^x [h(t, i) - \bar{h}(t)]^2 \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

用来表示 Eden 簇界面层的“宽度”. 一些实验模拟结果 (如文献 [11, 12] 等) 显示, 在 t 和 x 很大时, $w(t, x)$ 满足如下的渐近性: 存在两个常数 χ 和 z ,

- (1) 当 $t \ll x^z$ (“ \ll ”表示“远小于”) 时, $w(t, x) \propto t^{\chi/z}$;
- (2) 当 $t \gg x^z$ (“ \gg ”表示“远大于”) 时, $w(t, x) \propto x^\chi$.

换一种写法, 当 t 和 x 足够大时,

$$w(t, x) \approx x^\chi f\left(\frac{t}{x^z}\right), \quad (2.2)$$

其中, $f(a) \propto a^{\chi/z}$ ($a \rightarrow 0$), 以及当 $a \rightarrow \infty$ 时, $f(a)$ 收敛到某常数. 形如 (2.2) 的标度律 (除了空间参数 x , 时间参数也卷入其中) 称作动态标度律 (dynamical scaling law). 它由两个参数 χ 和 z 决定. 另一方面, 我们还可以模仿 (1.3) 将 (2.2) 改写成如下形式: 对于比较小的 $\epsilon > 0$, 有

$$w(\epsilon^{-z}t, \epsilon^{-1}x) \approx \epsilon^{-\chi}w(t, x). \quad (2.3)$$

换句话说, 当时间变量和空间变量分别扩大 ϵ^{-z} 和 ϵ^{-1} 倍时, 相应的涨落扩大 $\epsilon^{-\chi}$ 倍. 因此, 为简便起见, 我们也用时间、空间变量和涨落的扩大幂律指数比, 即 $z : 1 : \chi$, 来表示 (2.2) 对应的动态标度律 (参见文献 [13]). 不严格地说, 这一比例反映了当前当地发生的涨落会以怎样的速度 (时间变量)、怎样的扩散效率 (空间变量) 影响未来以及其他地方涨落的发生.

模拟实验^[11]显示 $\chi = 0.50 \pm 0.02$, $z = 1.7 \pm 0.30$. 而文献 [12] 通过一些假设确定 $\chi = 1/2$ 之后, 模拟出 z 的值为 1.55 ± 0.15 . 特别地, 如果承认 $\chi = 1/2$, 那么第二条渐近性告诉我们 $w(\infty, x) \propto x^{1/2}$ (某种意义上, $t = \infty$ 处的 w 可看作遍历分布下高度函数的涨落), 这与 Brown 粒子运动的位移涨落一致 (空间变量 x 对应 Brown 粒子运动中的时间变量). 另外, $\chi/z \approx 1/3$, 当空间尺度 $x = \infty$ 时, $w(t, \infty) \propto t^{\chi/z}$, 这说明在大空间尺度下, Eden 簇界面曲线的涨落比 Brown 粒子的位移涨落 (大约是 $t^{1/2}$) 增长得慢一些.

2.2 随机落体模型与黏性落体模型

Eden 模型是从一个或多个种子出发, 往邻近的区域不断生长的过程. 本小节将介绍另两类生长模型, 类似于俄罗斯方块游戏, 它们是由方块的沉淀积累而不断生长的过程.

第一类生长模型称作随机落体模型 (random deposition model). 文献 [13, 图 1] 给出了它的直观图像: 在每一列 (用 $x \in \mathbb{Z}$ 代表列数) 都有方块不断地落下, 沉到该列未被占有的最底部位置. 方块下落的间隔时间是相互独立的、以 1 为参数的指数分布 (下落过程不耗时). 并且, 不同列之间的行为是完全独立的. 用 $h^r(t, x)$ 表示 t 时刻 x 列的高度. 显然, $\{h^r(t, x) : x \in \mathbb{Z}\}$ 是一列独立的 Poisson 过程. 于是,

$$\mathbb{E}h^r(t, x) = t, \quad \mathbb{E}[(h^r(t, x) - t)^2] = t. \quad (2.4)$$

也就是说, h^r 的涨落与空间变量 x 无关, 并且与 Brown 粒子的位移涨落相当. 记

$$w^r(t, x)^2 := \mathbb{E}[(h^r(t, x) - t)^2] = t^{1/2}.$$

模仿 (1.3) 和 (2.3), w^r 满足

$$w^r(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-0}x) = \epsilon^{-1}w^r(t, x), \quad \forall \epsilon > 0. \quad (2.5)$$

我们可以认为 h^r 的涨落满足 2 : 0 : 1 的动态标度律. 其中, 空间比例项是 0, 意味着 x 处发生的涨落不会影响空间中其他地方的涨落.

另一类生长模型是 Vold^[14] 1959 年提出的, 称作黏性落体模型 (sticky block model, 也称作 ballistic deposition model). 它与随机落体模型的操作几乎相同, 唯一不同之处在于落下的方块停留的位置: 它不再沉入最底部的空位, 而是“黏”在下落过程中接触到的第一个方块旁. 数值模拟结果表明, 相应高度函数 $h^b(t, x)$ 的平均值 $Eh^b(t, x) \propto t$, h^b 的涨落 $w^b(t, x)$ (实际上是涨落的开方) 差不多满足 3 : 2 : 1 的动态标度律, 均与 Eden 模型相仿.

2.3 KPZ 方程

虽然 Eden 模型和落体模型都是很有效的生长模型, 在实际问题中应用广泛, 但在很大程度上我们需要依赖实验才能确定相应的标度参数. 因此, 它们并没有从理论上很好地揭示生长过程的本质. 在 Kardar 等之前, 不少物理学家都尝试建立上述生长模型背后的理论基础. 例如, 文献 [15] 提出了一个连续化的线性方程, 它与后来的 KPZ 方程只相差非线性项, 实际上描述了一类近平衡的界面生长过程. 而 Kardar 等则指出了非线性作用对高度增长的本质影响, 并提出了所谓的 KPZ 方程. 在文献 [1] 发表后不久, Kardar 等的理论迅速成为相关领域的基本理论, 并被不断证实, 可以用来解释各种各样的自然现象 (如文献 [16, 第 1.1.2 小节] 所归纳的).

KPZ 方程考察以时间 t 、空间 $x \in \mathbb{R}^d$ 为变量的高度函数 $h(t, x)$. 特别地, x 不再取离散值, 而是连续的. 在某种意义上, KPZ 方程可以视作 Eden 模型和黏性落体模型的连续近似 (由于微积分以连续性为基础, 因而连续近似的便利是不证自明的). 显然, 要刻画生长过程 $t \mapsto h(t, x)$, 最直接的方式就是在合理的假设下求出它的生长速度 $\dot{h}(t, x) = \partial h(t, x) / \partial t$ (准确来说, 这里的高度函数 $h(t, x)$ 对应着 Eden 簇的高度与平均值的偏差 $h(t, x) - \bar{h}$). 然而, 在 Eden 模型中, \bar{h} 与 t 成正比. 这意味着, \bar{h} 对生长速度的贡献是一个常数, 没有本质的影响). 通过观察 Eden 模型和黏性落体模型, 并参考前人的相关工作, Kardar 等认为下述因素对生长速度的影响至关重要 (参见文献 [13]):

(1) 局部性 (locality): 高度函数在 x 处的生长只受到它在 x 附近的值的影响, 而与其余地方的函数值无关.

(2) 平滑性 (smoothing): 如果存在高度较低的“峡谷”, 它应该被迅速填平. 这反映了 Eden 模型的一个特性: 它总是近乎充满的, “均匀”地向上生长, 而不可能出现大的“峡谷”. 对于黏性落体模型, 这一点体现在方块的“黏性”. 注意到曲线的凹度可以用二阶导 $\Delta_x h$ 来描述. 而且, 平滑性所贡献的生长速度应该与凹度 $\Delta_x h$ 线性相关 (成正比), 因为总体来看, 凹度大的峡谷总是在渐渐消失.

(3) 局部的高度势差 (local slope): 正如温度势差对热流的速度存在影响, x 与其附近点的高度势差 $\nabla_x h(t, x)$ 对 x 处的生长速度也有影响. 并且, 这个影响应该是非线性的. 否则, 若影响是线性的, 那么高低势差会不断消退, 曲线趋于平滑. 但从 (2.2) 我们已经知道, $h(\infty, x)$ 的涨落与 Brown 粒子运动的位移涨落一致, Eden 簇的界面在 $t = \infty$ 时仍然非常粗糙, 也就是说, 高低势差并没有消退的趋势.

(4) 用时空白噪声来引入涨落: Eden 模型是通过 $1, \dots, x$ 处的高度函数偏离平均值的涨落来定义界面层的宽度, 这多少可以类比为 Brown 粒子在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 之间受到的涨落力 (严格来说, 需要除去上述 (1)–(3) 的局部关联之后, 这两种涨落才是可类比的. 此时, $1, \dots, x$ 对应水分子的碰撞次序, $h - \bar{h}$

对应每次涨落力的大小). 模仿 Langevin 方程, 我们可以将“涨落力”等效为 (t, x) 处某个抽象概率空间中的分布, 并且不同时空处的“涨落力”无关联. 另一方面, 对于黏性落体模型而言, 上述局部关联 (1)–(3) 完全体现在方块的“黏性”上, 去掉“黏性”的影响, 它就退化为随机落体模型. 此时, 高度函数没有空间关联. 并且, 高度函数的增速在 $t \rightarrow \infty$ 时是常数 (即大数定律 $\lim_{t \rightarrow \infty} h^r(t, x)/t = 1$), 也没有时间关联性. 因此, 用时空白噪声来引入涨落是合理的.

根据上述分析, KPZ 方程可写作如下形式 (为简便起见, 以下将省略关于空间变量 x 求导的下角标):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \Delta h + F(\nabla h) + \eta(t, x), \quad (2.6)$$

其中, ν 是平滑性中的正比系数, 在黏性落体模型中也反映方块的黏性, $F(\nabla h)$ 是与高度势差相关的非线性项, 而 $\eta(t, x)$ 是时空白噪声 (1.6). 图 2 重现了文献 [1] 确定非线性项 $F(\nabla h)$ 的过程: Kardar 等认为, 在考察势差的非线性作用时, 曲线在其法向方向的生长速度分量应该是一个常数, 记作 λ , 再注意 $\tan \theta$ 是曲线的斜率, 即 $\tan \theta = \nabla h$, 于是 $(\delta t$ 和 δh 表示变分法中的虚时间、虚 (高度) 位移),

$$(\delta h)^2 = (\lambda \delta t)^2 (1 + (\tan \theta)^2) = (\lambda \delta t)^2 (1 + (\nabla h)^2).$$

进而, 利用 Taylor 展开 (注意, 这一步必须在 ∇h 很小, 即曲线非常平滑时才成立, 但 Eden 模型告诉我们, 经过足够长的时间, 界面曲线跟 Brown 运动的轨道一样粗糙, 所以, Taylor 展开一般不成立, 这也是 KPZ 方程“病态”的来源之一):

$$\frac{\delta h}{\delta t} = \lambda (1 + (\nabla h)^2)^{1/2} \approx \lambda + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \dots$$

显然, 常数项 λ 是非必需的. 事实上, 若 $F(\nabla h)$ 中包含常数 λ , 用 $h(t, x) + \lambda t$ 代替 (2.6) 中的 $h(t, x)$, 即可消去 λ (从 Eden 模型来看, 常数 λ 只体现在高度函数的平均值 \bar{h} 中, 对高度与平均值的偏差没有影响). Kardar 等进一步认为, 高阶项对涨落也没有本质影响, 可以略去. 因此, 最终的 KPZ 方程可以写成如下形式:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \Delta h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(t, x). \quad (2.7)$$

Kardar 等对方程 (2.7) 有两点重要的说明. 第一, (形式上) 利用变换 $Y(t, x) = \exp\{(\lambda/(2\nu))h(t, x)\}$, 可以得到

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \nu \Delta Y + \frac{\lambda}{2\nu} Y \cdot \eta(t, x). \quad (2.8)$$

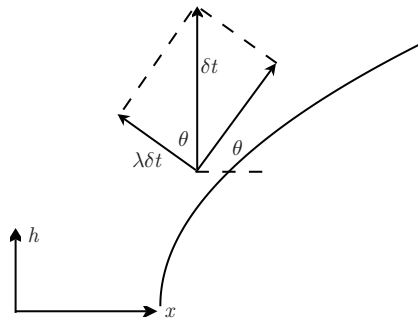


图 2 KPZ 方程中的非线性项

这是一个线性方程. 他们所指的 KPZ 方程的解就是 $h(t, x) = 2\nu/\lambda \cdot \log Y(t, x)$, 其中, $Y(t, x)$ 通过 (2.8) 解出. 第二, 在 (2.7) 两边对 x 求导, 记 $\mathbf{v} := -\nabla h$, Kardar 等还得到高度势差 \mathbf{v} 满足如下方程:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla \eta(t, x). \quad (2.9)$$

这是 Navier-Stokes 方程带随机扰动的形式, 在文献 [17] 中被用来研究流体系统的涨落. 特别地, 利用重整化群方法 (renormalization-group method, 原始思想来源于 Ising 模型, 它可以用来求出 Ising 模型的临界指数, 参见文献 [3, 第七章]), 文献 [17] 提出了确定流体系统 (2.9) 中物理量涨落关联函数的标度参数的方法. 应用文献 [17] 的思想, Kardar 等^[1] 确定了高度函数的涨落满足如下的 (形如 (2.2)) 动态标度律:

(i) $\lambda = \nu = 0$: $h(t, x)$ 的涨落与 x 无关, 且 $h(t, x) \sim t^{1/2}$ (即动态标度律为 $2 : 0 : 1$, 与随机落体模型一致);

(ii) $\lambda = 0, \nu \neq 0$: $\chi = (2 - d)/2, z = 2$ (与文献 [15] 一致);

(iii) $\lambda, \nu \neq 0, d = 1$: $\chi = 1/2, z = 3/2$;

(iv) $\lambda, \nu \neq 0, d \geq 2$: 尚不明确. 但文献 [1] 表明, 如果 λ 足够大, $\chi + z = 2$ 仍然成立.

特别地, 对于一维 (即 $d = 1$) 非平凡 ($\lambda, \nu \neq 0$) 情形, KPZ 方程驱动的高度函数的涨落满足 $3 : 2 : 1$ 的动态标度律. 与已有的实验事实 (如文献 [11, 12]) 相比较, 这一结果非常吻合.

3 数学中的 KPZ: KPZ 方程的解

从本节开始, 我们回到数学中来考察 KPZ 方程. 如无特别说明, 空间维数默认为 $d = 1$. 为了简便起见 (参见附录 A), 我们暂时假设 $\nu = 1/2, \lambda = D = 1$, 将 (2.7) 写作

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta h + \frac{1}{2} (\nabla h)^2 + \eta(t, x), \quad (3.1)$$

其中, $\eta(t, x)$ 是时空白噪声, 即 $E\eta(t, x) = 0, E[\eta(t, x)\eta(t', x')] = \delta(t - t')\delta(x - x')$.

3.1 时空白噪声

用于定义时空白噪声的空间维数不必局限于 $d = 1$. 记 $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ 是以速降函数 $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ 为测试函数空间的缓增分布空间 (tempered distribution). 在数学上, 时空白噪声 $\{\eta(t, x) : t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d\}$ 一般被理解为取值为缓增分布的随机函数, 即认为 $\eta(\omega) \in \mathcal{S}'$ (ω 是样本轨道的代表元, 为了简便起见, 在不引起混淆时将省略). 于是, η 的定义必须作用到具体的测试函数才是明确的: 对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$, 令 $\eta(\varphi)$ 表示广义函数 η 与测试函数 φ 之间的作用, 有时为了方便, 也将它们的作用写成 $\iint \eta(t, x)\varphi(t, x)dt dx$. 显然, η 是 Gauss 型的, 即对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$, $\eta(\varphi)$ 满足 Gauss 分布. 广义函数的期望自然应该理解为作用测试函数之后的期望. 于是, $E\eta(t, x) = 0$ 理解为

$$E[\eta(\varphi)] = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (3.2)$$

而 $E[\eta(t, x)\eta(t', x')] = \delta(t - t')\delta(x - x')$ 是指对任意 $\varphi, \phi \in \mathcal{S}$, 有

$$E[\eta(\varphi)\eta(\phi)] = \iint \varphi(t, x)\phi(t', x')\delta(t - t')\delta(x - x')dt dx dt' dx' = \iint \varphi(t, x)\phi(t, x)dt dx. \quad (3.3)$$

换句话说, 取值为缓增分布 \mathcal{S}' , 并满足 (3.2) 和 (3.3) 的 Gauss 型随机函数 η 称为时空白噪声. 特别地, 取 $\{e_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一组标准正交基, $\{\beta_n(t) : n \geq 1\}$ 是一列独立的 Brown 运动. 那么, 不难证明, 由

$$\xi(\varphi) := \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, x) e_n(x) dx d\beta_n(t), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad (3.4)$$

定义的 ξ 就是一个时空白噪声. 形式上, 我们可以写作 $\xi(t, x) = \sum_{n \geq 1} e_n(x) \dot{\beta}_n(t)$, 其中, $\dot{\beta}_n(t)$ 表示 β_n 关于时间的形式导数. 注意

$$W_t := \sum_{n \geq 1} e_n(\cdot) \beta_n(t) \quad (3.5)$$

实际上是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的柱 Wiener 过程 (cylindrical Wiener process).

注 3.1 从 (3.4) 很容易看出, 利用 Itô 等距的技巧, 我们可以将 η 的测试函数空间推广到 $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. 具体来说, 取 $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ 的一组标准正交基 $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$, 那么可以定义

$$\eta(\varphi) := \sum_{n \geq 1} (f_n, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)} \cdot \eta(f_n), \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d),$$

上式的右边在 $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ 中收敛.

3.2 非线性项与重整化

我们已经在第 2.3 小节中指出, KPZ 方程“病态”的来源是关于非线性项 $(\nabla h)^2$ 的不严格的数学推导. 然而, 事情远比 Taylor 展开的错误使用更严重. 从数学角度来看, 时空白噪声被理解为广义函数. 于是, 一般来讲, KPZ 方程的解 h 在数学意义上差不多也只能是广义函数, 广义函数的导数 Δh 和 ∇h 自然是可以严格定义的, 然而, 广义函数的乘积 $\nabla h \cdot \nabla h$ 的定义却不明朗. 而从物理角度而言, 第 2.1 小节总结了 Eden 模型的一些实验结果, 特别地, 当 $t = \infty$ 时, 高度函数的涨落与 Brown 粒子的位移涨落相当. 因而, 从某种意义上讲, 我们可以认为 KPZ 方程的遍历“测度” (即 $t \rightarrow \infty$ 的极限) 是以空间变量 x 为“时间参数”的双边 Brown 运动 (严格来说, 是带漂移的双边 Brown 运动, 参见文献 [18]). 如此, 形式上, $(\nabla h)^2 = \infty$ (h 关于 x 不可导), KPZ 方程的非线性项爆炸, 这给方程的理解带来了进一步的困难.

要解决广义函数的乘积 $\nabla h \cdot \nabla h$ 的定义歧义, 数学上一般采取“磨光”的办法, 即用合适的方式将时空白噪声 η 光滑化, 如此得到磨光方程就不存在定义 $\nabla h \cdot \nabla h$ 的困难, 最后只要证明磨光方程的解可以按照合适的方式收敛到我们需要的解. 然而, 仅采用合适的“磨光”方式, 并不能解决物理上非线性项“爆炸”的观察. 也就是说, 在证明磨光解的收敛性时, 还是会碰到一些“无穷大”因素的干扰. 为了解决这个问题, 我们通常采用物理中的“重整化” (renormalization) 方法. 这个方法建议, 前述 KPZ 方程实际上是

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta h + \left(\frac{1}{2} (\nabla h)^2 - \infty \right) + \eta(t, x), \quad (3.6)$$

其中, “ $-\infty$ ” 表示以合适的方式减去某个无穷大项. 首先在严格数学意义下完成上述解释, 并给出 KPZ 方程解的是 Bertini 和 Giacomin^[19]. 接下来将介绍他们的结果.

注 3.2 “重整化”这个概念是由日本物理学家 Shin'ichirō Tomonaga 命名的 (他与 Feynman 和 Schwinger 分享了 1965 年的诺贝尔物理学奖). 这是物理学家在处理“无穷大”问题 (例如, Abraham 和 Lorentz 针对点粒子的自作用 (self-interaction), Dirac 和 Feynman 建立量子力学的路径积分, 以及

后来量子场论对重整化的广泛使用) 时采用的一种权宜之计. 简单来说, 在遇到无穷大时, 他们采取合适的方式去掉另一个无穷大量 (后者被认为蕴含在某个无法测量的物理量中), 从而得到一个可以测量的有限物理量. 这听起来随意而荒谬, 但它拯救了很多艰辛建立却险被抛弃的理论.

以在固体中运动的某个电子为例. 如果电子和固体晶格的相互作用比较弱, 可以用一个有效质量 m^* 来描述这个电子对外在作用的反应. 显然, 这个有效质量和在固体之外测量的电子质量 m 不同. 也就是说, 固体晶格将电子“裸”质量 m “重整化”为有效质量 m^* . 而在很多其他模型中, 处在相互作用中的物理量经常会计算出无穷大的结果, 而且很可能没有办法去掉粒子间的相互作用 (即不可能像上面的例子, 将电子从固体晶格中取出). 重整化理论解决这个问题的思路是: 将各种发散量打包到无法测量的“裸量”中, 即重新定义无法测量的物理量来吸收这些无穷大, 从而得到有限的可测量的物理量 (参见文献 [20]).

3.3 Cole-Hopf 解

Bertini-Giacomin 的工作 (仅针对 $d = 1$) 基于 Kardar 等对于方程 (2.7) 的第一点说明, 即实际上通过变换

$$Y(t, x) = \exp\{h(t, x)\}$$

将问题转化为求解方程 (2.8), 再由 $h(t, x) := \log Y(t, x)$ 来定义 KPZ 方程的解 (见附录 B). 这个变换称作 Cole-Hopf 变换, 是 Cole^[21] 和 Hopf^[22] 在处理相应的确定性方程时引入的, 因而基于 Cole-Hopf 变换的解通常称为 Cole-Hopf 解 (Cole-Hopf solution).

根据第 3.1 小节对时空白噪声的理解以及附录 B, (2.8) 可以解释为 ($Y_t := Y(t, \cdot)$)

$$dY_t = \frac{1}{2} \Delta Y_t dt + Y_t dW_t, \quad (3.7)$$

其中, W_t 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的柱 Wiener 过程. 这是一个由可乘噪声 (multiplicative noise) 驱动的线性方程, 一般称作随机热方程. 它的解通常采用温和 (mild) 解的形式, 即

$$Y_t = G_t * Y_0 + \int_0^t G_{t-s} * (Y_s dW_s), \quad (3.8)$$

其中, $G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$ 是算子 $\frac{1}{2}\Delta$ 的热核, $Y_0 = \exp\{h_0\}$ 是 Y 的初值.

随机热方程 (3.7) 有两个层面的问题需要解决. 首先是方程的适定性问题, 即解的存在性和唯一性. 适定性问题可以在不同的函数空间中来考察. 例如, Bertini 和 Giacomin^[19] 证明了, 如果 Y_0 属于如下的函数空间: 对任意 $p > 0$, 存在常数 a_p 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-a_p |x|} \mathbb{E}(|Y_0(x)|^p) < \infty, \quad (3.9)$$

那么, 方程 (3.7) 在 (3.9) 描述的函数空间中存在唯一的温和解 Y_t . 而文献 [23] 和 [24, 第 2.3 小节] 则允许 Y_0 取值为符号测度 (例如, $Y_0 = \delta_0$), 它们同样可以得到 (3.7) 的适定性. 注意, 若 Y_0 取值为测度, 则没有 h_0 与之相对应. 其次, 为了保证 Cole-Hopf 解是良定的, 需要说明当 $t > 0$ 时, $Y_t(x) > 0$, 如此 $h(t, x) = \log Y(t, x)$ 才是有意义的. 这项工作最早是 Mueller^[25] 完成的, 他的结果表明, 只要初值 Y_0 是正的 (包括正测度), 那么对于所有的 $t > 0, x \in \mathbb{R}, Y(t, x) > 0$ a.s. (注意 $Y_0 = \exp\{h_0\}$, 故而这个初值条件通常是成立的). 特别地, 在 Bertini 和 Giacomin^[19] 的框架下 (即在由 (3.9) 描述的函数空间中得到 Y_t), 温和解 (在如下意义下) 实际上是强解: 如果 $Y_0 \in \mathcal{C}_+(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$ a.s., 那么 $Y \in C([0, T]; \mathcal{C}_+(\mathbb{R}))$ a.s. (T 是任意给定的正数).

定义 3.1 (Cole-Hopf 解) 如果 $(Y_t)_{t>0}$ 是以 $Y_0 = \exp\{h_0\}$ 为初值的随机热方程 (3.7) 的温和解, 并且对于所有的 $t > 0, x \in \mathbb{R}, Y(t, x) > 0$ a.s., 那么,

$$h(t, x) := \log Y(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

称作初值为 h_0 的 KPZ 方程 (3.1) 的 Cole-Hopf 解. 特别地, 若 $Y_0 = \delta_0$, 则相应的 h 称作满足窄楔形初值条件 (narrow wedge initial condition) 的 KPZ 方程的 Cole-Hopf 解.

以下几类 KPZ 方程的初值问题是比较重要的, 我们将在第 4.2.2 小节中通过离散增长模型来解释它们受人关注的原因.

定义 3.2 以下是几类 KPZ 方程或随机热方程的初值条件:

(1) 窄楔形初值: $Y_0 = \delta_0$. 此时, 没有严格意义下的 h_0 与之对应, 但形式上, 可以认为 $h_0(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} |x|/\sqrt{\epsilon}$ (见定理 4.2 后面关于初值收敛条件的讨论). 根据文献 [23, 定理 2.2], 可得

$$Y \in C((0, \infty), \mathcal{C}_+(\mathbb{R})),$$

并且, Y 关于时间变量的 Hölder 指数是 $(1/4)-$, 关于空间变量的 Hölder 指数是 $(1/2)-$. 于是, (3.10) 是良定的, Cole-Hopf 解存在.

(2) 平坦初值 (flat initial condition): $h_0 \equiv 0$, 即 $Y_0 \equiv 1$. 显然, (3.9) 成立, Cole-Hopf 解存在.

(3) Brown 初值 (Brownian initial condition): $h_0(x) = B(x)$ 是双边 Brown 运动, 即 $Y_0(x) = \exp\{B(x)\}$. 不难验证, (3.9) 仍然成立, 故而 Cole-Hopf 解存在.

(4) 以下几类初值问题是由上述三类基本初值问题衍生而来的, 它们的 Cole-Hopf 解均存在.

- 半窄楔形/半平坦初值 (楔形 \rightarrow 平坦): $Y_0(x) = 1_{\{x \geq 0\}}$;
- 半窄楔形/半 Brown 初值 (楔形 \rightarrow Brown): $Y_0(x) = e^{B(x)} 1_{\{x \geq 0\}}$;
- 半平坦/半 Brown 初值 (平坦 \rightarrow Brown): $Y_0(x) = 1_{\{x < 0\}} + e^{B(x)} 1_{\{x \geq 0\}}$.

KPZ 方程实际上是为了模拟一些离散增长模型的连续近似而引入的, 这些模型被认为满足 $3:2:1$ 的动态标度律. 根据第 2.3 小节的介绍, KPZ 方程的推导虽有其合理性, 但在数学意义上是病态的. Cole-Hopf 解只是形式上依托 KPZ 方程 (3.1), 而在严格数学意义下通过 Cole-Hopf 变换定义了高度函数 (3.10). 因此, 首要的问题即是, 如此定义的 (3.10) 是否符合提出 KPZ 方程的初衷. 如下几件事实 (尤其是 (3)) 显示, Cole-Hopf 解确实是比较适合 KPZ 方程的“物理”解 (physical solution):

(1) 如果 η 是一个“好”函数 (即具有足够好的时空正则性), 而不是时空白噪声, 那么 (3.7) 中的 dW_t 由 $\eta(t, x)dt$ 代替, 而 Cole-Hopf 解确实是方程 (3.1) 严格意义下的解, 相应的变换正是经典 Cole-Hopf 变换.

(2) Cole-Hopf 解可以按照下述方式来描述 KPZ 方程的重整化 (附录 B 用一种不严格, 但更直观的方式描述了它的重整化). 首先, 对 η 进行磨光: 取满足 $\int J(x)dx = 1$ 的偶函数 $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 对任意 $\kappa > 0, y \in \mathbb{R}$, 令 $J_y^\kappa(x) := \kappa J(\kappa(y-x))$ ($\in C_0^\infty(\mathbb{R})$), 并定义 $W_t^\kappa(y) := W_t(J_y^\kappa)$ (注意柱 Wiener 过程也可以认为取值为缓增分布), 记

$$C_\kappa(0) := \int J_0^\kappa(x)^2 dx \quad (\sim \kappa).$$

其次, 将 (3.6) 写成关于时间的积分形式, 注意 $\int_0^t \eta(s, \cdot)ds = W(t, \cdot)$, 并采用上述磨光方式得到逼近方程 (以下, $h_t(\cdot) := h(t, \cdot)$): 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 有

$$h_t^\kappa(\varphi) - h_0(\varphi) = \int_0^t \frac{1}{2}(h_s^\kappa(\varphi'') + ((\nabla h_s^\kappa)^2 - C_\kappa(0))(\varphi))ds + W_t^\kappa(\varphi), \quad (3.11)$$

其中, $C_\kappa(0) \sim \kappa \uparrow \infty$ ($\kappa \uparrow \infty$) 对应着 (3.6) 中被减去的“无穷大”. Bertini-Giacomin 在文献 [19, 定理 2.1 和 3.2] 中论断: 方程 (3.11) 存在唯一的解 $h^\kappa \in C([0, T]; C(\mathbb{R}))$; 并且, 当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时, $\{h_t^\kappa, t \in [0, T]\}$ 存在弱收敛意义下的极限, 极限过程与 KPZ 方程的 Cole-Hopf 解具有相同的分布.

(3) Cole-Hopf 解被猜测满足 3 : 2 : 1 的动态标度律. 第一件支撑这个猜测的事实是文献 [26] 发现, 如果初值 h_0 是双边 Brown 运动, 那么存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得 Cole-Hopf 解的涨落 $\text{Var}(h)$ 满足

$$C_1 t^{1/3} \leq \sqrt{\text{Var}(h(t, 0))} \leq C_2 t^{1/3}.$$

进一步, Amir 等 [27] (以及文献 [28, 29]) 证明, 窄楔形初值下的 Cole-Hopf 解在 3 : 2 : 1 的尺度变换 (见第 4.4 小节) 下存在点态 (即固定 t 和 x) 的极限分布, 即 GUE (Gaussian unitary ensemble) Tracy-Widom 分布.

尽管如此, Cole-Hopf 解也在某些方面让人并不满意:

(1) 随机热方程 (3.7) 仅在 $d = 1$ 时, 温和解可以成为强解. 在 $d \geq 2$ 时, 它的解必须在广义函数的意义下才是可理解的. 于是, 毋宁说 $Y(t, x) > 0$, 连 $h(t, x) = \log Y(t, x)$ 的定义都是不明的. 这也是 KPZ 方程在 $d \geq 2$ 时不存在 Cole-Hopf 解的原因.

(2) Cole-Hopf 解依赖 (磨光) 序列的逼近, 但 Cole-Hopf 解实际上并不是用序列去直接逼近 KPZ 方程, 而是去逼近随机热方程 (3.7) ((3.11) 实际上是通过逼近随机热方程转化而来的). 这给很多相关问题的理解带来了困难. 我们将在第 4.2 小节中继续深入讨论这个问题.

(3) 磨光方式有局限. Cole-Hopf 解仅对空间变量进行磨光, 在时间变量上采用 Itô 随机分析的方式来理解. 但在一些其他学者看来 (如文献 [30]), 时空变量同时进行磨光是更自然的方式.

3.4 Wick 积方法

一个比较有名的绕开 Cole-Hopf 变换来研究 KPZ 方程的例子是文献 [31]. 它将 KPZ 方程中的非线性项 $(\nabla h)^2$ 解释为 Wick 积 $\nabla h \diamond \nabla h$. 在物理上, Wick 积 (Wick product) 表示两物体之间的某种弱相互作用. 而从数学角度, 我们可以用 Hermite 多项式简单解释它的含义. Hermite 多项式全体构成 $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ (γ 是 \mathbb{R} 上的标准 Gauss 测度) 的一组正交基, 它的前几项为 $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$. 对于 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, H_{k_1} 和 H_{k_2} 的 Wick 积定义为

$$H_{k_1} \diamond H_{k_2} := H_{k_1+k_2}.$$

特别地, $H_1 \diamond H_1 = H_2$, 它比通常的乘法要“弱”一些 (多一项“-1”). 一般的函数 (未必在 $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ 中) 可以先写成 Hermite 多项式的线性组合, 再利用分配律和 Hermite 多项式的 Wick 积定义它们的 Wick 积.

具体来说, Chan [31] 的工作是在白噪声分析 (white noise analysis) 的框架下展开的, 它能处理任意空间维数, 而不仅局限于一维. 为了介绍他的结果, 我们需要说明文献 [31] 使用的 Wick 积的严格定义 (有关 Wick 积的一般设定, 见附录 C). 一言以蔽之, 非线性项 $(\nabla h)^{\circ 2} = \nabla h \diamond \nabla h$ 中的 Wick 积运算并不是基于时间变量 t 或空间变量 x , 而是基于随机样本 $\omega \in (\Omega, \mathbf{P})$ 进行的. Chan [31] 将概率空间 (Ω, \mathbf{P}) 选取为某个抽象 Wiener 空间 (B, H, μ) , $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B'$ (B' 是 B 的共轭空间) 构成 H 的一组标准正交基. 对于任意自然数序列 $\alpha = (\alpha_i)_{i \geq 1}$ (即 $\alpha_i \in \mathbb{N}$), 定义迭代 Wiener 积分 (iterated Wiener integral):

$$\mathbf{H}_\alpha(\omega) := \prod_i H_{\alpha_i}(\varphi_i(\omega)), \quad \omega \in B,$$

其中, H_{α_i} 是第 α_i 个 Hermite 多项式. 于是, $\{(\sqrt{\alpha!})^{-1}\mathbf{H}_\alpha\}$ ($\alpha! := \prod_i \alpha_i!$) 构成 $L^2(B, \mu)$ 的一组标准正交基. 进而, 定义 Wick 积

$$\mathbf{H}_\alpha \diamond \mathbf{H}_\beta := \mathbf{H}_{\alpha+\beta}. \quad (3.12)$$

对于一般的随机函数 $\mathbf{F}(\omega) := \sum_\alpha a_\alpha \mathbf{H}_\alpha(\omega)$, $\mathbf{F} \in L^2(B, \mu)$ 等价于 $\sum_\alpha a_\alpha^2 \cdot \alpha! < \infty$. 但固定时空变量的时空白噪声 $\eta(t, x)(\cdot) \notin L^2(B, \mu)$, 这意味着 $L^2(B, \mu)$ 空间不太够用 (见注 C.3). 于是, Chan 将随机函数 \mathbf{F} 的范围扩展到一个更大的空间 (\mathcal{S}^{-1}) , 它的半范由 \mathbf{F} 的系数 a_α 决定, 具体细节依赖于 Wiener 空间 B 和 φ_n 的选取 (在文献 [31] 中, $B := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, $H := L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, $B' := \mathcal{S}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$), 这里不再赘述. 特别地, $L^2(B, \mu) \subset (\mathcal{S}^{-1})$, $\eta(t, x) \in (\mathcal{S}^{-1})$. 另外, 可依据 (3.12) 对 (\mathcal{S}^{-1}) 中的函数定义 Wick 积 (见附录 C.3). 在白噪声分析中, 随机函数 \mathbf{F} 由它的系数 $\{a_\alpha : \alpha\}$ 决定, 在不同正交基下具有相同系数的随机函数被认为是等同的.

定义 3.3 取定 H 的一组标准正交基 $\{\varphi_n : n \geq 1\} \subset B'$ 和 $\mathbf{F}(\omega) := \sum_\alpha a_\alpha \mathbf{H}_\alpha(\omega) \in (\mathcal{S}^{-1})$. 如果存在另一组标准正交基 $\{\varphi'_n\}$ 以及相应的 \mathbf{H}'_α , 那么,

$$\mathbf{F}' := \sum_\alpha a_\alpha \mathbf{H}'_\alpha(\omega) \in (\mathcal{S}^{-1})$$

与 \mathbf{F} 称作在分布上等同 (identical in law), 记作 $\mathbf{F} \stackrel{\mathcal{W}}{\cong} \mathbf{F}'$.

而对于 $\mathbf{F}_n, \mathbf{F} \in (\mathcal{S}^{-1})$, $\mathbf{F}_n \stackrel{\mathcal{W}}{\rightarrow} \mathbf{F}$ 是指存在 \mathbf{F}_n 某个分布上等同的版本 \mathbf{F}'_n 使得 \mathbf{F}'_n 在 (\mathcal{S}^{-1}) 的拓扑意义下收敛至 \mathbf{F} .

为了在 (\mathcal{S}^{-1}) 空间中求解 (Wick 积在一定意义上即表示某种重整化)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta h + \frac{1}{2} (\nabla h)^{\circ 2} + \eta(t, x), \quad (3.13)$$

Chan [31] 对 h 作 Wiener-Chaos 分解: $h(t, x) = \sum_\alpha c_\alpha(t, x) \mathbf{H}_\alpha$, 从而将 (3.13) 转化为 $\{c_\alpha\}$ 的方程组. 经过一番探讨, Chan [31] 最终论断:

定理 3.1 [31] 方程 (3.13) 具有初值条件 $h(0, x) = 0$ 的解 h 满足

(1) 对于任意维数 $d \geq 1$, 如果 $z \leq \min(\frac{6+d}{4}, 2)$, $\chi = z - 1 - \frac{d}{2}$, 那么, 对于任意固定的 t 和 x , 有

$$\epsilon^\chi h(\epsilon^{-z}t, \epsilon^{-1}x)$$

在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时存在 \mathcal{W} (分布等同) 意义下的极限.

(2) 特别地, 当 $d = 2$ 时, 对于任意 t 和 x , 任意 $\epsilon > 0$, 有 $h(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-1}x) \stackrel{\mathcal{W}}{\cong} h(t, x)$.

不严格地说, 在 Wick 积框架下得到的方程 (3.13) 的解满足 $z : 1 : \chi$ 的动态标度律. 在 $d = 1$ 时, $z \leq 7/4$, $\chi = z - 3/2$. 这说明, 它不符合物理上得到的 $3 : 2 : 1$ 的动态标度律. 因此, 尽管文献 [31] 在数学上简洁, 优雅地给出了 KPZ 方程的解, 但这个解却不是“正确”的解.

需要指出的是 (参见文献 [32, 第 4 节]), (3.13) 与下述 Wick 积意义下的随机热方程:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta Y(t, x) + Y(t, x) \diamond \eta(t, x) \quad (3.14)$$

通过 Wick 积版本的 Cole-Hopf 变换联系, 即

$$Y(t, x) = \exp^\diamond \{h(t, x)\}, \quad h(t, x) = \log^\diamond Y(t, x),$$

其中, \exp^\diamond 和 \log^\diamond 通过它们的 Taylor 展式和 Wick 积 (乘法) 来定义, 例如, $\exp^\diamond X := \sum_{n=0}^{\infty} (X^{\circ n} / n!)$. 实际上, 在某种意义上, 随机热方程 (3.7) 和 (3.14) 可以认为是相同的 (参见文献 [33]), 但 Bertini 和

Giacomin^[19] 用通常的 \log 函数, 即 $\log Y(t, x)$, 来定义 Cole-Hopf 解, 它是满足动态标度律 $3:2:1$ 的“正确”的解, 但无法写出 Cole-Hopf 解满足的具体方程 (只能对 (3.6) 做合适的解释). 相反地, Chan^[31] 采用 $\log^\circ Y(t, x)$ 的方式定义“KPZ 方程”的解, 这个解满足可以清晰表述的“KPZ 方程” (3.13), 但不满足 $3:2:1$ 的动态标度律. 从这点来看, Wick 积方法尽管不能得到 KPZ 方程在物理意义上正确的解, 但仍然十分具有启发性.

3.5 正则结构理论

近年来, 在 KPZ 方程方面比较重大的突破是 Hairer^[30] 用粗糙路径 (rough path) 理论绕开 Cole-Hopf 变换, 重现了 Cole-Hopf 解. 这一研究进一步催生出针对一大类“病态”随机偏微分方程的正则结构理论^[34] (regularity structure), Hairer 也因此获得了 2014 年的 Fields 奖.

Hairer^[30] 只考察了满足次临界 (subcritical) 条件的 KPZ 方程, 这相当于 $d = 1$. 另外, 出于磨光技术的要求, 高度函数被假设满足周期性边界条件. 为了与 Hairer^[30] 一致, 我们将 KPZ 方程写作

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \partial_x^2 h + (\lambda(\partial_x h)^2 - \infty) + \eta(t, x), \quad (3.15)$$

其中, $x \in S^1 \simeq [0, 2\pi)$, $\lambda > 0$ 是给定的常数, 时空白噪声依赖的参数 $D = 4\pi$ (这时, 定义时空白噪声的缓增分布都作用在 $\mathbb{R}^+ \times S^1$ 上关于空间变量周期变化的速降函数上). 这相当于在 (2.7) 中取 $\nu = 1$, λ 用 2λ 来代替. 保持 λ 为形式变量的作用将在下述 Wild 分解中得到体现.

不同于 Chan^[31] 将时空白噪声 η 和高度函数 h 放入满足某种可积性条件的函数空间 (S^{-1}) 中来考察, Hairer 将依托空间换成满足某种正则性条件 (可与 Hölder 连续性类比) 的函数空间. 如下基于典则映射的观察是基本的: 固定时间变量 t , $h_t(\cdot) := h(t, \cdot)$ 是以空间变量为参数的随机过程, 特别地, 每一个随机样本 $\omega (\in \Omega)$ 对应一个轨道函数

$$x \mapsto h_t(x). \quad (3.16)$$

众所周知, 一维 Brown 运动的样本轨道函数是 α -Hölder 连续的 (任意 $\alpha < 1/2$). 一般地, 如果 (3.16) 也具有一定的正则性, 用 \mathcal{C} 表示具有该正则性的函数空间, 那么,

$$\Omega \rightarrow \mathcal{C}, \quad \omega \mapsto h_t(\cdot)(\omega) \quad (3.17)$$

即是所谓的典则映射. 换句话讲, 固定时间 t , 我们总可以将随机样本 ω 看作 \mathcal{C} 中的函数, 这个函数以 x 为变量. 需要指出的是, 诸如时空白噪声等广义函数不可能具有正指数的 Hölder 连续性, 因而需要对它们的正则性进行重新定义. 类比于负指数的 Sobolev 空间, 不难理解, 这一定义是可以实现的. 限于篇幅, 这里就不仔细展开了. 类似地, 如果不固定 t , 而将之视作变量, 一般地, $t \mapsto \|h_t\|_{\mathcal{C}}$ 是连续的. 于是,

$$\Omega \rightarrow C(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}), \quad \omega \mapsto h(\cdot, \cdot)(\omega)$$

是相应的典则映射, 其中, $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{C})$ 表示以时间 t 为变量, 取值为 \mathcal{C} 的连续泛函.

为了后续探讨的方便, 我们将 KPZ 方程的 Cole-Hopf 解写成

$$h_t(\cdot)(\omega) = \mathcal{S}_{\text{CH}}(h_0, \omega)(t) \in \mathcal{C},$$

其中, h_0 是 h 的初值. 在 Hairer^[30] 的框架下, $h_0 \in C^\beta$ ($0 < \beta < 1/2$), 差不多可以认为, C^β 是指数为 β 的 Hölder 连续函数空间. 于是, Cole-Hopf 解映射可以完整地写成

$$\mathcal{S}_{\text{CH}} : C^\beta \times \Omega \rightarrow C(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}), \quad (h_0, \omega) \mapsto \mathcal{S}_{\text{CH}}(h_0, \omega).$$

不严格地来说, \mathcal{C} 中的函数具有 $1/2 - \beta$ 的正则性阶数.

Hairer^[30] 的主要结果定理 1.1 得到了一个具有某种较复杂正则性并经粗糙路径技术处理的 Polish 空间 \mathcal{X} , 提升映射

$$\Psi: \Omega \rightarrow \mathcal{X},$$

新的“解”映射 (下角标 R 表示“Rough”)

$$\mathcal{S}_R: \mathcal{C}^\beta \times \mathcal{X} \rightarrow C(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}), \quad (h_0, \mathfrak{r}) \mapsto \mathcal{S}_R(h_0, \mathfrak{r})$$

以及新“解” \mathcal{S}_R 的爆炸 (explode) 时间:

$$T_*: \mathcal{C}^\beta \times \mathcal{X} \rightarrow (0, \infty].$$

它们可根据下述性质得以理解:

(1) \mathcal{S}_R 在 \mathcal{X} 上是逐点定义的, 不依赖 \mathcal{X} 上的任何测度, 而 \mathcal{S}_{CH} 在 Ω 上是 \mathbf{P} -a.s. 定义的.

(2) 对 \mathbf{P} -a.s. $\omega \in \Omega$, $\mathcal{S}_{CH}(h_0, \omega) = \mathcal{S}_R(h_0, \Psi(\omega))$. 换句话说, 如果我们在 \mathcal{X} 上赋予像测度 $\mathbf{P} \circ \Psi^{-1}$, 那么, 在几乎处处的意义下, \mathcal{S}_R 和 Cole-Hopf 解就是等同的.

(3) 如果将 KPZ 方程中的时空白噪声换成具有较好时空正则性的随机函数 $g(t, x)$, 并记此时的解为 $\mathcal{S}_D(h_0, \omega)$, 那么, 我们同样可以找到映射 $\Phi: \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ 使得对 \mathbf{P} -a.s. $\omega \in \Omega$, $\mathcal{S}_D(h_0, \omega) = \mathcal{S}_R(h_0, \Phi(\omega))$. 根据这一事实, 我们可以简要诠释 \mathcal{S}_R 的重整化: 对 $\epsilon > 0$, 令 $\eta_\epsilon(t, x)$ 是时空白噪声以合适的方式磨光之后得到的随机函数, 那么, 可以找到常数 C_ϵ (随着 $\epsilon \downarrow 0$ 增长到无穷大), 使得将 $\eta_\epsilon - C_\epsilon$ 看作上述随机函数 g 后可以得到提升映射 Ψ_ϵ , 并且 Ψ_ϵ 随着 $\epsilon \downarrow 0$ 依概率收敛到 Ψ . 显然, 这一重整化过程绕开了 Cole-Hopf 变换, 是直接针对 KPZ 方程的诠释 (具体的表达式见 (3.24)).

(4) 作为 \mathcal{X} 上点点定义的映射 \mathcal{S}_R , 它可能会在有限时间内爆炸, 即可能存在初值 $h_0 \in \mathcal{C}^\beta$, $\mathfrak{r} \in \mathcal{X}$ 以及有限时间 $T < \infty$ 使得 $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathcal{S}_R(h_0, \mathfrak{r})(t)\|_{\mathcal{C}} = \infty$. 爆炸时间 $T_*(h_0, \mathfrak{r})$ 即是指使得爆炸发生的最小的 T . 然而, \mathcal{S}_R 中与 Cole-Hopf 解对应的部分却不会在有限时间内爆炸. 也就是说, 对于任意 $h_0 \in \mathcal{C}^\beta$, \mathbf{P} -a.s. $\omega \in \Omega$, 有

$$T_*(h_0, \Psi(\omega)) = \infty.$$

粗略地来说, \mathcal{S}_R 是通过“扩充” Cole-Hopf 解的样本空间 Ω 得到的 (严格来讲, Ψ 未必是单射, 所以, \mathcal{X} 不一定比 Ω “大”), 扩充后的空间 \mathcal{X} 比 Ω 具有更丰富的拓扑和代数结构 (见 (3.25)). 需要指出的是, 这一扩充步骤并不是无的放矢, 在 \mathcal{X} 上点点定义的 \mathcal{S}_R 还满足如下性质 (不依赖 \mathcal{X} 上的任何测度):

(1) 在爆炸之前 (即 $t \in (0, T_*(h_0, \mathfrak{r}))$),

$$(t, h_0, \mathfrak{r}) \mapsto \mathcal{S}_R(h_0, \mathfrak{r})(t) \in \mathcal{C}$$

是连续映射. 即使在 Ω 上赋予合适的拓扑结构, Cole-Hopf 解映射 \mathcal{S}_{CH} 也未必满足相应的连续性.

(2) \mathcal{S}_R 可以被描述为某个不动点问题的解. 进而, 在一定意义下, 它 (同样地, KPZ 方程的 Cole-Hopf 解) 可以实现为 \mathcal{X} 上的连续随机动力系统 (参见文献 [30, 命题 1.2]).

(3) 将 h_0 和 \mathfrak{r} 取作相应函数空间中的光滑函数 (注意 \mathcal{X} 是具有某种正则性的函数空间, 它也包含某种意义下的光滑函数), Hairer 在文献 [30, 定理 2.5] 中给出了 $h_t := \mathcal{S}_R(h_0, \mathfrak{r})(t)$ 满足的具体方程: 它的主要部分与 KPZ 方程一致, 另外还包含一些合适的余项. 这件事实在一定程度上回答了 Cole-Hopf 解满足何种具体形式的方程. 从第 3.4 小节不难知道, 这个问题并不容易解决.

在本节的最后, 我们来简要介绍 \mathcal{X} 、 Ψ 和 \mathcal{S}_R 的构造过程. 在 (3.15) 中, 参数 λ 是待定的形式变量, 这是为了对高度函数进行所谓的 Wild 分解 (参见文献 [35, 36]). 简单来说, 它是将 h 以 λ 为变量进行 “Taylor” 展开, 但展开的幂项指数序列却不是自然数序列 (即不是形如 $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \lambda^n$ 的展开式), 而是用二叉树 (binary tree) 作为幂项指数序列 (即将前述求和序列中的 \mathbb{N} 换成二叉树集合).

注 3.3 二叉树是从一个根 (root) 出发, 每个节点 (node) 都生出两片叶子 (leaf) 的图. 平凡二叉树只有一个根, 记作 “ \bullet ”. 一般地, 对于任意一个非平凡二叉树 τ , 将它的根和与根相连的两条边去掉, 可以得到两个二叉树 τ_1 和 τ_2 . 这个过程显然是可逆的. 于是, 我们可以用 $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ 来唯一地表示二叉树 τ , 这种方式实际上给出了二叉树全体的递归方案. 用 \mathcal{T} 表示二叉树全体, 用 $|\tau|$ 表示非叶子的节点数, 例如, $|\bullet| = 1$, $|\bullet, \bullet| = 2$. 特别地, 令 $|\bullet| = 0$. 不难验证, 对于 $\tau = [\tau_1, \tau_2]$, $|\tau| = |\tau_1| + |\tau_2| + 1$.

Wild 分解的基本想法是用如下关于 λ 的 “Taylor” 展式表示高度函数 (注意 $h(t, x)$ 与 λ 有关)

$$h(t, x) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} Y^\tau(t, x) \cdot \lambda^{|\tau|}. \tag{3.18}$$

类比于 Picard 迭代, 上述分解通过递归的方式将 h 满足的非线性 KPZ 方程转化为 Y^τ 满足的线性方程. 为此, 我们利用 (3.18) 先对 KPZ 方程的非线性项做如下的形式计算 (注意 (τ_1, τ_2) 通过 $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ 与 τ 一一对应):

$$\begin{aligned} \lambda(\partial_x h)^2 &= \lambda \cdot \partial_x \left(\sum_{\tau_1 \in \mathcal{T}} Y^{\tau_1} \lambda^{|\tau_1|} \right) \cdot \partial_x \left(\sum_{\tau_2 \in \mathcal{T}} Y^{\tau_2} \lambda^{|\tau_2|} \right) \\ &= \sum_{\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}} \partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2} \lambda^{|\tau_1| + |\tau_2| + 1} \\ &= \sum_{\tau = [\tau_1, \tau_2] \in \mathcal{T}} (\partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2}) \lambda^{|\tau|}. \end{aligned}$$

需要指出, 上式中最后一个求和序数不包含 \bullet . 另外, 我们还能看出, 采用二叉树作为展开序列, 恰好将非线性项中的系数 λ 并入展开式的 $\lambda^{|\tau|}$ 中 ($|\tau| = |\tau_1| + |\tau_2| + 1$ 是关键), 进而系数中不含 λ . 同时, 选用二叉树, 而非 “一” 叉树 (即 \mathbb{N}) 或三叉树, 是与 KPZ 非线性项的幂指数 “2” 相关的.

有了这些准备, 将 (3.18) 和非线性项的计算式代入 (3.15), 比较 $\lambda^{|\tau|}$ 的系数, 我们可以得到系数列 $\{Y^\tau\}$ 满足的递归方程. 具体来说, 第一项 Y^\bullet 通过 KPZ 方程的线性部分给出:

$$\frac{\partial Y^\bullet}{\partial t} = \partial_x^2 Y^\bullet + \eta(t, x). \tag{3.19}$$

对于 $\tau = [\tau_1, \tau_2]$, 有

$$\frac{\partial Y^\tau}{\partial t} = \partial_x^2 Y^\tau + \partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2}. \tag{3.20}$$

形式上来说, (3.20) 中的 Y^{τ_1} 和 Y^{τ_2} 已经在先前的方程中解出了, 所以在 (3.14) 中是已知函数. 于是, 似乎只需依次将线性方程 (3.19) 和 (3.20) 解出来, 代入 (3.18) 即可求出高度函数. 然而, KPZ 方程遇到的无穷大困境 (见第 3.2 小节) 不可能经过形式变换 Wild 分解就消失了. 它现在表现如下. 在 (3.19) 中, 抛物算子差不多将 Y^\bullet 的正则性 (比 η) 提高两阶. 于是, 根据注 3.4, Y^\bullet 关于 x 的正则性阶数是 $(1/2)_-$, 它还是一个实函数. 但在 (3.20) 表示的第一个方程 (即 $\tau = [\bullet, \bullet]$, $\tau_1 = \tau_2 = \bullet$) 中, $\partial_x Y^{\tau_1} = \partial_x Y^{\tau_2} = \partial_x Y^\bullet$ 的阶数是 $(-1/2)_-$, 都是广义函数. 所以, $\partial_x Y^{\tau_1} \cdot \partial_x Y^{\tau_2}$ 面临着与 KPZ 方程的非线性项一样的困难. 类似地, (3.20) 表示的其他方程都会遇到广义函数相乘的问题.

注 3.4 不严格地说, 时空白噪声关于空间变量 x 的正则性阶数是 $(-d/2 - 1)-$ (“ $\alpha-$ ” 表示对于任意 $\beta < \alpha$, 相应函数都满足 β - 阶的正则性; α 是负数表示相应的函数是广义函数, 参见文献 [34]). 特别地, 当 $d = 1$ 时, 时空白噪声关于 x 的正则性阶数是 $(-3/2)-$.

参考之前的讨论, 磨光技术和重整化思想很自然地应用于 (3.19) 和 (3.20). 具体来讲, 时空白噪声经过合适的磨光 (时空变量同时进行磨光) 成为 $\eta_\epsilon(t, x)$, (3.19) 重新写作

$$\frac{\partial Y_\epsilon^\bullet}{\partial t} = \partial_x^2 Y_\epsilon^\bullet + \eta_\epsilon(t, x). \quad (3.21)$$

注意 (3.21) 在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的形式极限即 (3.19), 它存在强解, 因而 (3.21) 不需要进行重整化. 方程 (3.20) 则不然, 由于 $\partial_x Y_\epsilon^{\tau_1} \cdot \partial_x Y_\epsilon^{\tau_2}$ 的歧义, 磨光后的方程若期望存在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的极限, 重整化是无法避免的. 也就是说, (3.20) 经过磨光和重整化之后变成 (C_ϵ^τ 是某个合适的常数)

$$\frac{\partial Y_\epsilon^\tau}{\partial t} = \partial_x^2 Y_\epsilon^\tau + \partial_x Y_\epsilon^{\tau_1} \partial_x Y_\epsilon^{\tau_2} - C_\epsilon^\tau. \quad (3.22)$$

相应地, 与 (3.18) 对应的

$$h_\epsilon(t, x) := \sum_{\tau \in \mathcal{T}} Y_\epsilon^\tau(t, x) \cdot \lambda^{|\tau|} \quad (3.23)$$

满足方程

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial t} = \partial_x^2 h_\epsilon + \lambda(\partial_x h_\epsilon)^2 - \sum_{\tau \in \mathcal{T}} C_\epsilon^\tau \lambda^{|\tau|} + \eta_\epsilon(t, x). \quad (3.24)$$

(3.24) 即可理解为 KPZ 方程的重整化. 当然, 前提是需要证明 h_ϵ 随着 $\epsilon \rightarrow 0$ 的收敛性. 同时, (3.23) 中求和级数的收敛性是一个伴随问题. Hairer [30] 在处理二者的收敛性时, 将 (3.23) 中的级数分为两部分, 第一部分只包含前几个 τ 对应的项 (Hairer [30] 将这些 τ 记作 $\bar{\mathcal{T}}_0$), 第二部分由余下的项组成. 对于第一部分, Hairer 逐项证明其收敛性 (此时将 Y_ϵ^τ 视作从 Ω 到某个函数空间 (形如 $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{C})$) 的典则映射). 具体来讲, 文献 [30, 定理 2.1] 断言, 对于 $\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0$, 存在某个具有一定时空正则性的空间 \mathcal{X}_τ 使得 $Y_\epsilon^\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{X}_\tau$ 是典则映射, 并且存在 $Y^\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{X}_\tau$ 使得 Y_ϵ^τ 随着 $\epsilon \rightarrow 0$ 依概率收敛至 Y^τ . 第二部分, 即 (3.23) 中 $\mathcal{T} \setminus \bar{\mathcal{T}}_0$ 对应的余下部分, 作为一个整体 $\mathbf{R}_\epsilon(t, x)$ (实际上, 文献 [30] 还要对余下部分再做一次划分), 采用文献 [37] 中基于粗糙路径的处理方式, 同样可以找到一个函数空间 $\mathcal{X}_{\mathcal{T} \setminus \bar{\mathcal{T}}_0}$ 使得 $\mathbf{R}_\epsilon : \Omega \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{T} \setminus \bar{\mathcal{T}}_0}$ 是典则映射, 并且存在 $\mathbf{R} : \Omega \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{T} \setminus \bar{\mathcal{T}}_0}$ 使得 \mathbf{R}_ϵ 收敛至 \mathbf{R} . 最终, \mathcal{X} 定义为如下直和空间 \mathcal{W} 的某个闭子集 (只取一部分是为了保证 \mathcal{S}_R 的连续性):

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{W} := \left(\bigoplus_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0} \mathcal{X}_\tau \right) \oplus \mathcal{X}_{\mathcal{T} \setminus \bar{\mathcal{T}}_0}, \quad (3.25)$$

$\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ 定义为

$$\Psi := \left(\bigoplus_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0} Y^\tau \right) \oplus \mathbf{R}.$$

而 \mathcal{S}_R 由 (3.23) 在 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限给出.

总而言之, Hairer 采取了一种与 Cole-Hopf 变换完全不同的策略来对 KPZ 方程进行线性化, 这一策略的核心是 Wild 分解. 相较于 Cole-Hopf 变换的局限性 (几乎无法应用于其他类型的方程), 这种策略更加灵活 (例如, 可以改用二叉树、四叉树等), 在形式上也只涉及简单的方程叠加 (如 (3.23)), 回避了可能会造成麻烦的非线性的 \exp 变换或 \log 变换, 故而它有希望用于处理其他 “病态” 随机偏微分方程 (参见文献 [34]). 另一方面, 在 Hairer 的策略中, 时间变量和空间变量的奇异性并不像 Cole-Hopf

变换那样被区别对待 (在 Cole-Hopf 变换下, 空间变量的奇异性由磨光技术和重整化来处理, 时间变量的奇异性按照 Itô 随机分析的技术来处理), 而是作为一个整体同时进行磨光和重整化, 这在某种程度上简化了对问题的理解 (尽管形式并不简洁), 显得更加自然.

4 数学中的 KPZ: 离散生长模型与 KPZ 方程

如前所述, KPZ 方程的引入是为了模拟 Eden 模型、黏性落体模型等随机生长模型. 在物理中, 人们发现它们的涨落都满足 $3:2:1$ 的动态标度律, 因而被认为同属于所谓的 KPZ 普适类. 在数学上, 如何严格描述和证明上述模型 (包括 KPZ 方程) 属于 KPZ 普适类是一方面的问题, 这些问题还有诸多不清晰和不完善之处. 另一方面, 作为 KPZ 方程提出的初衷, 它所刻画的高度函数 (即 Cole-Hopf 解) 应该是一些相关生长模型在合适尺度变换下的极限. 但即使对于 Eden 模型和黏性落体模型, 这一猜测在数学上至今未被证实. 本节将来探讨有关这一方面的数学研究.

4.1 KPZ 普适性

我们关注的焦点仍然是一维 KPZ 方程 (3.1). 在第 3.3 小节中, 我们已经通过 Cole-Hopf 变换得到了所谓的 Cole-Hopf 解. 以下, 若谈及一维 KPZ 方程驱动的高度函数, 我们都默认为由定义 3.1 给出的 Cole-Hopf 解.

KPZ 方程提出的初衷, 是为了描述几类随机增长模型的连续近似. 于是, 无论从物理还是数学的角度来说, 以下两个问题都是值得被探讨的: 第一, KPZ 方程驱动的高度函数是否与第 2 节中介绍的几类离散随机增长模型具有类似的特征, 最根本的一点在于, 它的涨落是否满足 $3:2:1$ 的动态标度律? 第二, 这些离散增长模型是否在某些恰当的规则下 (例如, 将离散增长模型实现到格点空间 $a\mathbb{Z}$ 上, 在合适的规则下令 $a \downarrow 0$, 从而得到最终的极限) 收敛至 KPZ 方程? Kardar 等^[1] 利用重整化群方法对上述第一个问题作了肯定的回答, 但他们的回答离数学严格性相差甚远. 在这一部分, 我们将讨论为了回答这两个问题, 一些学者在数学层面所做的努力.

为了引入一种刻画涨落的数学描述, 我们先来观察经典的 Gauss 普适性. 首先考察最简单的例子, 令 $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $E\xi_1 = a > 0$, $E\xi_1^2 = \sigma^2$, 再记

$$h(t) := \sum_{k=1}^t \xi_k, \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

直观上来说, 我们可以将 $t \mapsto h(t)$ 看作与空间变量无关的高度函数, 它随着离散时间的推进不断演变, 每次的高度变化都是独立的. 而 $E\xi_1 = a > 0$ 保证这个高度函数在总体趋势上是增长的. Bernoulli 大数定律告诉我们,

$$\frac{h(t)}{t} \rightarrow a, \quad \text{a.s.} \quad (t \rightarrow \infty).$$

这差不多表明, 如果演化的时间足够长, $h(t)$ 约等于 at , 即 $h(t) \sim at$. 但 $h(t)$ 的准确值自然与 at 相比存在偏差, 这即是我们第 1.3 小节中提到的涨落. 著名的中心极限定理刻画了 $h(t)$ 涨落的统计信息:

$$\frac{h(t) - at}{\sigma t^{1/2}} \Rightarrow N(0, 1) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (4.1)$$

其中, “ \Rightarrow ” 表示 “依分布收敛”. 首先, 上式左边的分母项反映了涨落的 “规模”: $h(t)$ 围绕平均高度的偏差大概是 $t^{1/2}$; 换句话说讲, $h(t)$ 的涨落满足 $2:1$ 的标度律. 其次, 上述极限性质表明, 偏差的实际分

布差不多是某种正态分布. 总而言之, 上述 Gauss 型增长模型在经过足够长时间的演变后, 由大数定律可以确定它的整体高度, 而中心极限定理则刻画了它围绕这个整体高度的涨落, 包括涨落的大小以及近似遵循的分布.

第 2.2 小节中提到的随机落体模型是另一个类似的满足 Gauss 普适性 (引入了空间变量) 的例子. 具体来说, $T \rightarrow h^r(T, X)$ 表示方块堆随着时间 T 的演化在 $X \in \mathbb{Z}$ 处的高度. 对于不同的 X , 相应位置的高度是独立演化的, 并且都是参数为 1 的 Poisson 过程. 于是, 大数定律表明, 对于任意 $X \in \mathbb{Z}$, 有

$$\frac{h^r(T, X)}{T} \rightarrow 1, \quad \text{a.s.} \quad (T \rightarrow \infty).$$

也就是说, 如果演化的时间足够长, $h^r(T, \cdot)$ 每个位置的高度差不多都是 T . 相应地, 中心极限定理可以写作

$$\frac{h^r(T, X) - T}{T^{1/2}} \Rightarrow N(X) \quad (T \rightarrow \infty), \quad (4.2)$$

其中, $\{N(X) : X \in \mathbb{Z}\}$ 是一列独立的标准 Gauss 随机变量. 它刻画了 h^r 围绕整体高度 T 的涨落. 注意, 与 (4.1) 不同的是, (4.2) 实际上同时卷入了时间变量和空间变量. 而 (2.4) 表明, h^r 的涨落 w^r 满足 $2:0:1$ 的动态标度律. 为了体现这一动态标度律, 我们将 (4.2) 作如下改写: 固定 (t, x) , 在 (4.2) 中令 $T := \epsilon^{-2}t$, $X := \epsilon^{-0}x$, $T \rightarrow \infty$ 即转化为 $\epsilon \rightarrow 0$. 根据 (2.5), 我们可以得到

$$\frac{h^r(T, X) - T}{T^{1/2}} = \frac{h^r(T, X) - T}{w^r(T, X)} = \frac{h^r(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-0}x) - \epsilon^{-2}t}{w^r(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-0}x)} = \frac{\epsilon h^r(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-0}x) - \epsilon^{-1}t}{w^r(t, x)}.$$

进而, (4.2) 等价于如下形式: 给定任意 t 和 x , 有

$$\epsilon h^r(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-0}x) - \epsilon^{-1}t \Rightarrow w^r(t, x)N(x) \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (4.3)$$

因为右边的 $w^r(t, x)$ 不含随机项, 所以, 重要的是上式左边的尺度变换 $\epsilon h^r(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-0}x)$. 特别地, $\epsilon^{-1}t$ 是 h^r 在 $2:0:1$ 的尺度变换后的整体高度.

涨落满足动态标度律 $3:2:1$ 的随机增长模型一般称作具有 KPZ 普适性, 它不限于 KPZ 方程驱动连续模型, 也涵盖潜在的离散增长模型. 有了上述 Gauss 普适性的观察, 我们就可以用类比的方式给出描述高度函数 $h(t, x)$ 具有 KPZ 普适性的如下方案:

(1) 利用某种方式 (如某种类型的大数定律), 确定 $t \rightarrow \infty$ 时 $h(t, x)$ 的整体高度状况, 或者不严格地说, 某种意义下的“平均高度” $\bar{h}(t, x)$;

(2) 将 (4.3) 中的动态标度律 $2:0:1$ 换成 $3:2:1$, 平均高度换成第一步中得到的 \bar{h} , 再证明其收敛性. 具体来说, 就是要证明下述极限存在:

$$\epsilon^{1/2}h(\epsilon^{-3/2}t, \epsilon^{-1}x) - \bar{h}_\epsilon \Rightarrow \mathfrak{h}(t, x), \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

上述两条在某种意义上可以视作 KPZ 普适性的另一种描述, 我们将在第 4.4 小节中继续讨论这个问题.

注 4.1 有时候我们也将 (4.4) 写成 $t \rightarrow \infty$ 的形式, 从而反映高度函数随着时间的演化而最终可能到达的状态. 具体来说, 令 $t = 1$, $\mathfrak{t} := \epsilon^{-3/2}$, 将 $\mathfrak{h}(1, x)$ 简写作 $\mathfrak{h}(x)$, \bar{h}_ϵ 写作 $\bar{h}_\mathfrak{t}$, 于是, (4.4) 可写作

$$\frac{h(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}^{2/3}x)}{\mathfrak{t}^{1/3}} - \bar{h}_\mathfrak{t} \Rightarrow \mathfrak{h}(x), \quad \mathfrak{t} \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

现在回到 KPZ 方程驱动的高度函数 $h(t, x)$. 如果仅从 KPZ 方程本身出发, 想要按照上面两个步骤来说明它的普适性, 这显然是无比艰难的. 例如, 第一步是要确定平均高度. 不严格地说, 平均高度 \bar{h} 可以认为是 $h(t, x)$ 的期望, 这差不多需要知道 $h(t, x)$ 满足的具体分布. 即便是针对线性方程, 这也近乎是无法完成的任务. 事实上, 现有的实现了上述方案的工作 (如文献 [27, 38]) 的确是在确定了 $h(t, x)$ (固定 (t, x)) 的单点分布来完成的, 但它的分布并不是直接通过 KPZ 方程或随机热方程得到, 而是由在某种方案下收敛到 KPZ 方程的离散增长模型的分布间接求出的. 我们将在后面几节介绍这些离散增长模型.

注 4.2 在描述 KPZ 普适性的动态标度律 $3:2:1$ 中, 涨落关于时间的标度参数 $1/3$ 是不同于 Gauss 普适性的一个重要特征. Balázs 等^[26] 证明了具有 Brown 初值的 KPZ 方程的涨落 $\sqrt{\text{Var}(h(t, 0))} \approx t^{1/3}$ (见第 3.3 小节). 这从某个侧面说明相关的标度参数确实是 $1/3$. 这种估计涨落幅度的方式同样可以在一定程度上刻画 KPZ 普适性.

4.2 角落生长模型

简单排斥过程 (simple exclusion process, SEP) 和角落生长模型 (corner growth model, CGM) 是一对互偶的离散模型. 前者来源于交互粒子系统, 后者为 KPZ 方程的研究提供了一种新思路. 它们都是一维格点空间 \mathbb{Z} 上 (用 $x \in \mathbb{Z}$ 表示格点坐标), 随时间 $t \in \mathbb{R}^+$ 演化的系统. 二者的随机环境都可利用如下的独立的 Poisson 过程序列来实现: 对于任意 $x \in \mathbb{Z}$, 令 $t \mapsto L_x(t)$ 是以 $q \in [0, 1]$ 为参数的 Poisson 过程, $t \mapsto R_x(t)$ 是以 $p := 1 - q$ 为参数的 Poisson 过程. 特别地, 这些 Poisson 过程都是相互独立的. 以下先来介绍 SEP, 再将 SEP 转化为 CGM.

(1) 简单排斥过程 (SEP). SEP 描述的是 \mathbb{Z} 上粒子的排列状态. 在初始时刻, 有一些粒子放置在 \mathbb{Z} 的某些位置上, 每个位置最多放一个粒子. 例如, 在 $x \geq 1$ 的每个位置都放一个粒子, 而 $x \leq 0$ 的位置都空着. 这个初始条件后面还会提到, 一般称作阶梯初值条件 (step initial data). 接下来, \mathbb{Z} 上的粒子按如下方式开始运动. 如果 x 处的 Poisson 过程 L_x 在 t 时刻发生了跳跃, 并且 x 处此时有一个粒子, 那么这个粒子在 t 时刻尝试向左边 (“L” 表示 “left”) 相邻的格点跳跃: 若该格点上没有其他粒子, 跳跃发生; 若该格点上已经被其他粒子占据, 则跳跃不发生 (此即排斥 (exclusion) 的本意). 类似地, 如果 x 处的 Poisson 过程 R_x 在 t 时刻发生了跳跃, 那么粒子的相应操作换成朝右, 其余逻辑不变. 需要指出, \mathbb{Z} 上粒子系统随时间的这种演化方式能够实现, 是因为独立的 Poisson 过程列 $\{L_x, R_x : x \in \mathbb{Z}\}$ 不会同时发生跳跃. 另一方面, 不严格地说, Poisson 过程是一列独立指数分布型随机变量的和, 因而它发生跳跃的时间可以理解为某个指数分布型 “时钟” 敲响的时间. 特别地, L_x 是 “敲响速率” 为 q 的左时钟, 而 R_x 是 “敲响速率” 为 p 的右时钟. 因而, 直观上来说, 上述操作可以简单的描述为: 在敲响的时刻 (如 x 处的左时钟响), 如果条件成熟 (x 处有粒子, 左边与它相邻的格点无粒子), 那么跳跃发生 (x 处的粒子跳到与它相邻的左边格点); 否则, 保持原状.

一般地, 我们关心 $q \geq p$ 的情形. 当 $p = q$ 时, 我们称之为对称 SEP (symmetric SEP, SSEP); 当 $p < q < 1$ 时, 我们称之为部分非对称 SEP (partially asymmetric SEP, ASEP; 此时向左的跳跃占优); 当 $q = 1$ 和 $p = 0$ 时, 我们称之为完全非对称 SEP (totally asymmetric SEP, TASEP; 此时, 模型中只有粒子向左的运动, 而没有向右的). 上述 SEP 模型在 RNA 转运机制、交通系统等实际领域有着广泛的应用, 关于它的更多细节和性质, 可以参见文献 [39].

(2) 角落生长模型 (CGM). 我们再来介绍与 SEP 对应的角落生长模型. 令 $\gamma := q - p$ 表示 SEP 中向左的偏向程度. 角落生长模型由与 γ 相关的高度函数 $h_\gamma(t, x)$ ($t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{Z}$) 来驱动. 它由下述

公式给出:

$$h_\gamma(t, x) := \begin{cases} 2N(t) + \sum_{0 < y \leq x} \varrho(t, y), & x > 0, \\ 2N(t), & x = 0, \\ 2N(t) - \sum_{x < y \leq 0} \varrho(t, y), & x < 0, \end{cases}$$

其中, $N(t)$ 表示 t 时刻之前 “ ≥ 1 ” (即正半轴) 上的粒子净流入 “ ≤ 0 ” (即负半轴和原点) 的粒子数 (粒子可能从左跳到右, 或从右到左, “净” 流入是指相互抵消之后的结果); 在 t 时刻, 如 y 处有粒子, 则 $\varrho(t, y) := 1$, 否则 $\varrho(t, y) := -1$. 直观上来说, 从右到左的净流入粒子数 $N(t)$ 的二倍表示高度函数 h_γ 在 t 时刻的基准线, 也是 $x = 0$ 处的高度; $h_\gamma(t, \cdot)$ 随 $x \uparrow$ 的变化方式将由 x 处是否有粒子决定: 若有粒子, 则高度函数 $+1$, 否则高度函数 -1 . 对于具有阶梯初值条件的 SEP, 不难验证相应的 h_γ 的初值为 $h_\gamma(0, x) = |x|$, 它称作楔形初值条件 (wedge initial data). 如果说 h_γ 在 x 处的高度势差是由 SEP 在 x 处是否有粒子决定, 那么 $t \mapsto h_\gamma$ 随时间的演化就完全由 SEP 中粒子往相邻格点的跳跃决定. 在 x 处向左跳的先决条件是 x 处有粒子, 并且左边相邻的格点无粒子. 于是, 在粒子发生跳跃之前, 高度函数在 $x - 1$ 处 -1 , 然后 $+1$, 形成局部极小值; 而在跳跃之后, 相应位置的高度函数则是先 $+1$, 后 -1 , 局部极小值变成局部极大值. 类似地, SEP 中粒子向右跳跃则是将高度函数 h_γ 的局部极大值变成局部极小值. 特别地, TASEP 总是将局部极小变成局部极大, 高度函数始终在随机增长.

如下三类初值条件将会被经常提到:

(i) 阶梯初值条件/楔形初值条件 (step initial data/wedge initial data): SEP 具有阶梯初值, 即在 $x \geq 1$ 的每个位置都放一个粒子, 而 $x \leq 0$ 的位置都空着; 相应地, CGM 满足楔形初值条件 $h_\gamma(0, x) = |x|$.

(ii) 平坦初值条件 (flat initial data): SEP 的偶数位置没有粒子, 奇数位置有粒子; 相应地, 当 $x \in \mathbb{Z}$ 是偶数时, $h_\gamma(0, x) = 0$, 当 x 是奇数时, $h_\gamma(0, x) = 1$.

(iii) Bernoulli 初值条件: SEP 的每个位置独立的以 $1/2$ 的概率放或者不放粒子; 相应地, $x \mapsto h_\gamma(0, x)$ 是双边简单随机游动 ($h_\gamma(0, 0) \equiv 0$).

4.2.1 CGM 的普适性

当 $\gamma = 0$ 时, h_γ 增长或下降的速率是相等的. 因此, 总体而言, 它所代表的生长模型处于增长/下降的均衡模式, 随着时间的推移, 系统最终趋于平衡态. 实际上可以证明 (参见文献 [13]), 此时 h_γ 满足 $4:2:1$ 的动态标度律, 相应的尺度极限 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1/2} h_\gamma(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-1}x)$ 对应着 Edwards 和 Wilkinson^[15] 提出的方程 (即 KPZ 方程在 $\nu = 1/2$ 和 $\lambda = 0$ 时的特殊情形, 见第 2.3 小节) 的解. 此时, 一般称 h_γ 满足 Edwards-Wilkinson 普适性.

对于 $\gamma = 1$, 满足楔形初值条件的情形 (即 $h_\gamma(0, x) = |x|$), 首先是 Rost^[40] 证明了如下的大数律:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h_\gamma(\epsilon^{-1}t, \epsilon^{-1}x)}{\epsilon^{-1}} = \bar{h}_\gamma(t, x) := \begin{cases} t \frac{1 - (x/t)^2}{2}, & |x| < t, \\ |x|, & |x| \geq t. \end{cases} \quad (4.6)$$

进而, Johansson^[41] 证明了, $R_\epsilon h_\gamma(t, 0) - (\epsilon^{-1}t)/2$ 收敛至 GUE Tracy-Widom 分布 (参见文献 [42]). 一般地, 下面的定理成立, 它表明 TASEP 对应的角落生长模型满足 KPZ 普适性.

定理 4.1 ^[43, 44] 记 h_γ 是具有楔形初值的角落生长模型的高度函数, 并且令 $\gamma = 1$. 固定 (t, x) . 那么, 对于任意 $s \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(R_\epsilon h_\gamma(t, x) - \frac{\epsilon^{-1}t}{2} \geq \frac{x^2}{2t} - t^{1/3} \cdot s \right) = F_{\text{GUE}}(2^{1/3}s), \quad (4.7)$$

其中, F_{GUE} 是 GUE Tracy-Widom 分布函数.

注 4.3 根据 Rost 的大数律, 在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} R_\epsilon h_\gamma(t, x) &= \epsilon^{-1} \cdot \epsilon^{3/2} h_\gamma(\epsilon^{-3/2}t, \epsilon^{-3/2}(\epsilon^{1/2}x)) \\ &\approx \epsilon^{-1} \cdot \epsilon^{3/2} h_\gamma(\epsilon^{-3/2}t, \epsilon^{-3/2} \cdot 0) \\ &\approx \epsilon^{-1} \bar{h}_\gamma(t, 0) \\ &= \frac{\epsilon^{-1}t}{2}. \end{aligned}$$

这说明了 $R_\epsilon h_\gamma(t, x)$ 的“平均高度”是 $\epsilon^{-1}t/2$, 与 x 无关.

注 4.4 我们还可以按照注 4.1 将 (4.7) 写成 $t \rightarrow \infty$ 的形式, 即对于固定的 x , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{h_\gamma(t, t^{2/3}x)}{t^{1/3}} - \frac{t^{2/3}}{2} \geq \frac{x^2}{2} - s \right) = F_{\text{GUE}}(2^{1/3}s). \quad (4.8)$$

尽管 (4.8) 只给出了固定 x 时的收敛性, 但相应的有限维分布也是收敛的, 并且收敛的极限是所谓的 Airy_2 过程 $(\mathcal{A}_2(x))_{x \in \mathbb{R}}$ 的有限维分布 (有关 Airy_2 过程, 参见文献 [24]; 当然, 它的单点分布都是 GUE Tracy-Widom 分布): 对于任意 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ 和 $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{h_\gamma(t, t^{2/3}x_i)}{t^{1/3}} - \frac{t^{2/3}}{2} - \frac{x_i^2}{2} \geq -s_i, 1 \leq i \leq n \right) = \mathbf{P}(\mathcal{A}_2(x_i) \leq 2^{1/3}s_i, 1 \leq i \leq n).$$

换句话说, 如下定义的随机过程 (以 x 为“时间”参数):

$$\mathcal{H}_t(x) := \frac{h_\gamma(t, t^{2/3}x)}{t^{1/3}} - \frac{t^{2/3}}{2} - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

随着 $t \rightarrow \infty$ (差不多) 在有限维分布的意义下收敛到 Airy_2 过程.

对于 $0 < \gamma < 1$ 的情形, Tracy-Widom 在一系列工作中 (如文献 [45–48]) 进一步证明, 将 t 换成 t/γ 之后, 上述结论仍然成立. 也就是说, 令

$$\tilde{h}_\gamma(t, x) := h_\gamma\left(\frac{t}{\gamma}, x\right), \quad (4.9)$$

仍然考虑楔形初值条件, 那么, 如下的大数律成立:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{h}_\gamma(\epsilon^{-1}t, \epsilon^{-1}x)}{\epsilon^{-1}} = \bar{h}_\gamma(t, x),$$

并且, 固定 (t, x) , $R_\epsilon \tilde{h}_\gamma(t, x) - (\epsilon^{-1}t)/2$ 仍然收敛至 GUE Tracy-Widom 分布 (具有与 (4.7) 相似的收敛形式).

总而言之, $\gamma = 0$ 对应的 h_γ 满足 4 : 2 : 1 的动态标度律, 它满足 Edwards-Wilkinson 普适性, 描述的是一个近平衡过程. 而 $0 < \gamma \leq 1$ 对应的 h_γ 描述的是非平衡过程, $\tilde{h}_\gamma(t, x) = h_\gamma(t/\gamma, x)$ 满足 3 : 2 : 1 的动态标度律, 它具有 KPZ 普适性.

表 1 几类初值问题的普适性

	“平均高度” (大数律)	涨落的单点分布	涨落的多维分布
楔形初值	(4.6)	GUE	Airy ₂
平坦初值	$t/2$	GOE (Gaussian orthogonal ensemble)	Airy ₁
Bernoulli 初值	$t/2$	F_0	Airy _{stat}

注 4.5 以上考察 CGM (尤其是 $0 < \gamma \leq 1$) 的普适性, 我们仅以满足楔形初值条件的 CGM 为例. 实际上, 对于另外两类初值问题 (以及它们衍生的组合初值问题), 即平坦初值问题和 Bernoulli 初值问题, 类似的结论仍然是成立的. 对于这两类初值问题, 它们由大数律给出的平均高度 \bar{h}_γ 、涨落的单点分布以及多维分布的极限过程均与楔形初值问题不同 (见表 1, 另外两种分布和随机过程的定义和描述参见文献 [16, 24] 等), 但 $3:2:1$ 的动态标度律是一致的. 特别地, 它们都满足 KPZ 普适性.

4.2.2 CGM 收敛至 KPZ 方程

如前所述, CGM 在 $\gamma = 0$ 时满足 Edwards-Wilkinson 普适性, 在 $0 < \gamma \leq 1$ 时满足 KPZ 普适性. 这种类似于相变的行为, 自然产生了下面这个有趣的问题: $\gamma \downarrow 0$ 时, \tilde{h}_γ 是否会按照某种方式收敛到另一个函数? 如果收敛行为存在, 那么极限是否具有某种普适性?

Bertini 和 Giacomin 在文献 [19, 定理 2.3 和 3.3] 中考察了这个问题. 他们发现, 对 (4.9) 定义的 \tilde{h}_γ 作 $3:2:1$ 的尺度变换, 并选取合适的 $\gamma \downarrow 0$ 的速度, 可以证明, 它的极限收敛于 KPZ 方程的 Cole-Hopf 解. 具体地, 对于任意固定的 t , 通过 Euler 折线的方式将 $\tilde{h}_\gamma(t, \cdot)$ 转换为 \mathbb{R} 上的连续函数 (即连接 $(x, \tilde{h}_\gamma(t, x))$ 和 $(x+1, \tilde{h}_\gamma(t, x+1))$ 来定义 $[x, x+1]$ 上的值), 仍然记作 \tilde{h}_γ . 令 $(v_\epsilon$ 是某个重整化常数)

$$\tilde{h}_\gamma^\epsilon(t, x) := R_\epsilon \tilde{h}_\gamma(t, x) - \frac{v_\epsilon t}{2} = \epsilon^{1/2} \tilde{h}_\gamma(\epsilon^{-3/2} t, \epsilon^{-1} x) - \frac{v_\epsilon t}{2}, \quad (4.10)$$

给定任意固定的时间 $T > 0$, $\tilde{h}_\gamma^\epsilon$ 可以视作 $D([0, T], C(\mathbb{R}))$ 中的随机元素, 其中, D 表示右连左极函数全体构成的 Skorokhod 空间.

定理 4.2^[19] 记 $h(t, x)$ 是 KPZ 方程 (3.1) 的 Cole-Hopf 解, 其初值为 $h(0, \cdot) = h_0$. ASEP 对应的高度函数经过尺度变换后记作 $\tilde{h}_\gamma^\epsilon(t, x)$, 由 (4.10) 给出, 其中, $v_\epsilon = \epsilon^{-1} - 1/12$, 并取 $\gamma = \epsilon^{1/2}$. 在一些合适的设定下 (参见文献 [19, 定义 2.2]), 并且假设 $\tilde{h}_\gamma^\epsilon(0, \cdot)$ 随着 $\epsilon \downarrow 0$ 在 $C(\mathbb{R})$ 拓扑中弱收敛至 $-h_0$, 那么, $\tilde{h}_\gamma^\epsilon$ 随着 $\epsilon \downarrow 0$ 在 $D([0, T], C(\mathbb{R}))$ 中弱收敛至 $-h$.

注 4.6 这里, h_0 和 h 前有负号的原因是, 文献 [19] 中作为极限的 KPZ 方程取 $\nu = 1/2, \lambda = -1$, 它的解与 (3.1) 的解相差一个负号.

我们先来考察保证上述定理结论成立的初值收敛条件, 即

$$\tilde{h}_\gamma^\epsilon(0, x) = \epsilon^{1/2} h_\gamma(0, \epsilon^{-1} x) \rightarrow -h_0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

也就是说, ASEP 的初值条件 (视作变量为 x 的函数) 在 $2:1$ 的尺度变换下存在收敛极限. 一般来说, 收敛极限应该满足 $2:1$ 的尺度不变性, 也就是说, 在某种意义上,

$$\epsilon^{1/2} h_0(\epsilon^{-1} x) = h_0(x), \quad \forall \epsilon > 0. \quad (4.11)$$

满足上式的 h_0 显然有以下三个简单但典型的例子:

- 对于 $x \neq 0$, $h_0(x) = -\infty$ ($h_0(0)$ 可以取作 0, 而不必也等于 $-\infty$): 不难验证, 当 $h_\gamma(0, \cdot)$ 是楔形初值时,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{1/2} h_\gamma(0, \epsilon^{-1}x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{|x|}{\epsilon^{1/2}} \quad (4.12)$$

恰好对应这个极限 (正无穷的情形类似, 这里为了方便起见, 仅说明了负无穷的情形).

- $h_0 \equiv 0$: 显然, ASEP 的平坦初值条件对应了这个极限.

- h_0 是双边 Brown 运动: (4.11) 中的等号是指分布相同; 显然, ASEP 的 Bernoulli 初值条件对应了这个极限.

这实际上也说明了 ASEP 的这几类初值问题 (楔形初值/平坦初值/Bernoulli 初值) 以及 KPZ 方程相应的几类初值问题 (见定义 3.2) 为什么比较受关注.

严格来说, 上面三个例子中只有后两个满足定理 4.2 的收敛条件, 也就是说, 定理 4.2 只能保证, 具有平坦初值/Bernoulli 初值的 CGM 的确按照 Bertini 和 Giacomin 的方式 (注意 $\gamma = \epsilon^{1/2} \downarrow 0$) 收敛到具有平坦初值/Brown 初值的 KPZ 方程. 具有楔形条件的 CGM 的收敛是文献 [27] 完成的, 它的极限是满足窄楔形初值条件的 KPZ 方程.

注 4.7 对于楔形初值条件 $h_\gamma(0, |x|) = |x|$, (4.12) 在通常意义下并不收敛. 另一方面, 在 Cole-Hopf 变换下, 不难验证 (注意 ASEP 与第 3 节中的 KPZ 方程差一个负号)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\{-\tilde{h}_\gamma^\epsilon(0, x)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\left\{-\frac{|x|}{\epsilon^{1/2}}\right\} = \delta_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

但上述收敛性是在点点意义下成立的, 这个极限值 (对应随机热方程) 非零的部分权重太小 (为零测集), 与满足 Dirac 初值条件的随机热方程有本质的不同.

在本节的最后, 我们来简要介绍文献 [19, 27] 证明 CGM 收敛至 KPZ 方程的大致步骤. 由于 KPZ 方程依赖于 Cole-Hopf 变换来定义解的具体形式, 所以, 它们实际上是将 CGM 作了离散版本的 Cole-Hopf 变换 (即下述的 Gärtner 变换, 参见文献 [49]), 证明变换后的系统收敛至相应的随机热方程, 从而最终得到 CGM 收敛至 KPZ 方程的结论:

(1) 对 h_γ 进行 3 : 2 : 1 的尺度变换和 Gärtner 变换, 即定义

$$Y_\epsilon(t, x) := c_\epsilon \exp\left\{-\lambda_\epsilon \tilde{h}_\gamma(\epsilon^{-3/2}t, \epsilon^{-1}x) + \frac{\epsilon^{-3/2}\alpha_\epsilon t}{2\gamma}\right\},$$

其中, $\lambda_\epsilon \approx \epsilon^{1/2}$, $\alpha_\epsilon \approx \lambda_\epsilon \gamma$. 对于平坦初值和 Bernoulli 初值 (即文献 [19]), $c_\epsilon = 1$. 对于楔形初值, 注 4.7 说明, 仅进行 exp 变换并不能保证初值存在合适的收敛极限, 文献 [27] 实际上是添加修正参数 c_ϵ 使得 $Y_\epsilon(0, \cdot)$ 存在合适的收敛极限. 特别地, 取 $c_\epsilon = \epsilon^{-1/2}/2$, 那么,

$$Y_\epsilon(0, x) \approx \frac{\epsilon^{-1/2}}{2} \exp\left\{-\frac{|x|}{\epsilon^{1/2}}\right\} \rightarrow \delta_0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (4.13)$$

上述收敛是在广义函数的意义下成立的.

(2) 第一步中的参数 λ_ϵ 和 α_ϵ 等只指明了它们的主要部分, 它们的准确值请参见具体文献. 在合适地选取这些参数之后, 可以证明 Y_ϵ 满足如下离散形式的随机热方程:

$$\partial_t Y_\epsilon = \frac{1}{2} D_\epsilon \Delta_\epsilon Y_\epsilon dt + Y_\epsilon dM_\epsilon(t, x), \quad (4.14)$$

其中, Δ_ϵ 是离散 Laplace 算子, D_ϵ 是与 ϵ 和 γ 有关的常数, M_ϵ 是某个鞅. 这个方程的具体形式参见文献 [16, 第 2.3 小节].

(3) 在 (4.14) 中取 $\gamma = \epsilon^{1/2}$, 并令 $\epsilon \downarrow 0$, 可以证明 Y_ϵ 收敛至相应随机热方程的解. 特别地, 楔形条件下的 Y_ϵ 收敛至具有 δ_0 初值的随机热方程.

(4) 最后, 注意如下映射:

$$\Psi : D([0, T]; C(\mathbb{R})) \rightarrow D([0, T]; C(\mathbb{R})),$$

$$f \mapsto \Psi(f) := \begin{cases} -\log f, & f \in D([0, T]; C_+(\mathbb{R})), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在 $D([0, T]; C_+(\mathbb{R}))$ 上是连续映射. 于是, 很容易将第三步中 Y_ϵ 收敛至随机热方程的结论转化为 CGM 收敛至 KPZ 方程的结论.

4.2.3 CGM 的可解性与 KPZ 方程的 KPZ 普适性

对于 KPZ 方程来说, 需要回答的一个重要问题是, Cole-Hopf 解作为一些离散生长模型的连续近似, 是否称职? 在第 4.2.2 小节中, 我们说明了 CGM 在某种意义上收敛至 KPZ 方程. 这在一定程度上给了上述问题肯定的答复. 另一方面, 就 KPZ 方程自身而言, 它是否满足 KPZ 普适性, 同样是一个重要而且深刻的问题. 而 CGM 的收敛性给这个问题带来了另一种契机, 即绕开 KPZ 方程, 而由 CGM 的相关性质及其收敛性间接得到有关 KPZ 方程的结论.

Tracy 和 Widom (及其后续的大量学者) 在研究 ASEP 和 CGM 时的突破无疑是其中最重要的一环. 除了第 4.2.1 小节中定理 4.2 和注 4.4 提到的收敛性结果, 相关研究实际上还能够得到:

- 固定 (t, x) , ASEP 或 CGM 满足的分布, 即 ASEP 或 CGM 的单点分布;
- 固定 t , ASEP 或 CGM 在有限个不同位置 (如 x_1, \dots, x_n) 的联合分布.

将这些结果应用于 KPZ 方程的研究, 其策略是显然的. 但鉴于第 4.2.2 小节中由 CGM 收敛至 KPZ 方程的细节并不容易, 所以想要据此得到 KPZ 方程的单点分布或者固定时间 t 的联合分布 (从而描述它的 KPZ 普适性), 显然并非一项轻松的任务. 在文献 [16, 图 5] 中, Corwin 总结了已有的相关研究结果以及尚未解决的问题. 总的来说, 对于某些初值条件下的 KPZ 方程, 它的单点分布可以求出 (参见文献 [27, 28, 38] 等), 进而可以在第 4.1 小节建议的策略下描述它的 KPZ 普适性. 但对于固定时间 t 在不同位置的联合分布, 据我们所知, 还没有任何实质的突破. 下面这个定理是文献 [27] 给出的, 它说明满足窄楔形初值条件的 KPZ 方程满足 KPZ 普适性.

定理 4.3 ^[27] 令 $h(t, x)$ 是具有窄楔形初值条件的 KPZ 方程 (3.1) 的 Cole-Hopf 解. 固定 (t, x) . 那么, 对于任意 $s \in \mathbb{R}$,

$$F_t(s) := \mathbf{P} \left(h(t, x) + \log \sqrt{2\pi t} + \frac{x^2}{2t} + \frac{t}{24} \leq s \right)$$

与 x 无关, 并且可由几种等价的方式给出 (参见文献 [27, 定理 1.1]). 同时, 如下极限性质成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(t^{1/3}s) = F_{\text{GUE}}(2^{1/3}s).$$

进而, 采用注 4.4 类似的方式, 我们可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{h(t, t^{2/3}x) + \log \sqrt{2\pi t} + \frac{t^{1/3}x^2}{2} + \frac{t}{24}}{t^{1/3}} \leq s \right) = F_{\text{GUE}}(2^{1/3}s). \quad (4.15)$$

注 4.8 上述 (4.15) 即按照注 4.1 的方式描述了 h 的 KPZ 普适性, 它的极限分布与楔形初值的 CGM 一致, 都是 GUE Tracy-Widom 分布. 参照注 4.4 中 CGM 有限维分布的收敛结果, 我们很容易给出如下猜想: (4.15) 中的序列不仅对于固定的 x 随着 $t \rightarrow \infty$ 收敛至 GUE Tracy-Widom 分布, 同时它在有限个位置 x_1, \dots, x_n 的联合分布随着 $t \rightarrow \infty$ 收敛至 Airy₂ 过程相应的有限维分布. 关于其他几类初值条件下类似猜想的具体形式, 参见文献 [24, 第 1.12 小节].

4.3 有向聚合模型

本节来讨论 Huse 和 Henley [50] 提出的有向聚合模型 (directed polymer model), 这是另一类与 KPZ 方程紧密相关的离散模型. Huse 和 Henley 的探讨起源于 Ising 模型. 众所周知, Ising 模型描述了顺磁体向铁磁体相变的过程. 在这一离散模型中, 每个格点处放置一个上旋或下旋的粒子. 在临界点附近, 相同状态 (如上旋) 的粒子会形成一块一块的粒子簇, 在这些粒子簇内部, 其表现的整体磁性是一致的. 值得关注的是不同粒子簇之间的交界面如何演化. 类似的问题同样出现在其他相关研究中. 不同于 Eden 模型将交界面的演化解为高度函数的生长和涨落, Huse 和 Henley 将交界面视作一个整体, 并参考统计物理的思想对每个可能的交界面引入权重, 从而建立相应的 Gibbs 分布. 这一分布通常对应着系统的某个宏观状态, 并不是模型随机性的来源. 事实上, 有向聚合模型的随机性表现在系统所处的环境. 注意到, 权重的计算依赖于交界面上某种能量状态, 但能量状态会因为各种因素发生变化, 表现出一定的随机性. 故而有向聚合模型是一种随机环境上的概率模型.

(1) 离散有向聚合模型. 有向聚合模型涉及两个不同的概率空间:

(i) (Ξ, \mathbf{P}_0) : Ξ 由 \mathbb{Z}^d 上从 0 出发的“连续”样本轨道构成, \mathbf{P}_0 是 Ξ 上的某个概率测度. 它有不同选取方式. 例如, Ξ 中的轨道不限制长度和终点, 而 \mathbf{P}_0 可以选取为简单随机游动对应的概率测度, 换句话说, \mathbf{P}_0 下的典型过程是 \mathbb{Z}^d 上的简单随机游动. 类似地, 我们还可以将 Ξ 中的所有轨道限制为固定时长, 或者固定终点, 并选取合适的 \mathbf{P}_0 , 使得 (Ξ, \mathbf{P}_0) 对应于某个合适的随机游动.

(ii) (Ω, \mathbf{P}) : 随机环境全体, 它体现在系统的 Hamilton 函数 H 上. 具体来说, 对于每个环境 $\omega \in \Omega$, $H^\omega: \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ 给出了每条轨道 $\varpi \in \Xi$ 的 Hamilton 量. 对不同的环境, 样本轨道空间上的 Hamilton 函数可能不同. 一个典型的例子如下:

$$H^\omega(\varpi) := \sum_{k=0}^n \xi_{k, \varpi(k)}(\omega), \quad \varpi \in \Xi, \quad \omega \in \Omega, \quad (4.16)$$

其中, $n (\leq \infty)$ 是 Ξ 中连续轨道的长度, $\{\xi_{k,x} : 0 \leq k \leq n, x \in \mathbb{Z}^d\}$ 是 (Ω, \mathbf{P}) 上的一列独立同分布的随机变量.

以下, 先固定环境 $\omega \in \Omega$. 在物理中, Hamilton 函数表示系统的能量. 而在 Gibbs 系综中, $e^{-\beta H^\omega(\varpi)}$ 是 ϖ 的统计权重 (\mathbf{P}_0 是基准测度, β 是与温度相关的正常数). 于是, 给定 Hamilton 函数 H^ω , 我们就能得到环境 ω 下的 Gibbs 分布 (Ξ 上的另一个概率测度)

$$\mathbf{P}_\beta^\omega(d\varpi) := \frac{1}{Z_\beta^\omega} \exp\{-\beta H^\omega(\varpi)\} \mathbf{P}_0(d\varpi), \quad \varpi \in \Xi, \quad (4.17)$$

其中, $Z_\beta^\omega := \int_\Xi \exp\{-\beta H^\omega(\varpi)\} \mathbf{P}_0(d\varpi)$. 在统计物理中, Z_β^ω 称作配分函数 (partition function). 原则上, 只要确定了配分函数, 就能计算出系统的各种物理量. 特别地,

$$\mathcal{F}^\omega := -\left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot \log Z_\beta^\omega$$

是系统的自由能 (free energy).

在有向聚合模型中, 以下几个物理量的涨落是比较让人关心的. 例如, 对于固定轨道步长的情形, 用 $\varpi(n)$ 表示 ϖ 最终停留的位置, 它的涨落用 $\overline{\text{Var}}(\varpi(n))$ 来定义, Var 是关于 Gibbs 分布求方差, 而 $\overline{\text{Var}}$ 上的横线表示再关于随机环境 (Ω, \mathbf{P}) 求平均. 我们通常期望, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\overline{\text{Var}}(\varpi(n)) \sim n^{2\zeta}$, 渐近性由某个幂律指数 ζ 决定. 同样地, 自由能 \mathcal{F} 的涨落也被期望满足类似的渐近性. 关于更多相关讨论, 可以参见文献 [16, 24].

(2) 连续有向随机聚合模型. 我们再来介绍连续有向随机聚合模型 (continuous directed random polymer, CDRP), 它是上述离散模型的连续近似.

固定 $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$. 我们选取 Brown 桥的概率空间 $\{\Omega_{\text{bb}}, \mathbf{P}_{\text{bb}}, b_s (0 \leq s \leq t)\}$ 作为 CDRP 的基准测度空间, 其中, 下角标 bb 表示 “Brownian bridge”, b_s 是 Brown 桥的轨道函数, $b_0 = 0$, $b_t = x$. 进一步, 选取时空白噪声 $\eta(s, y)$ 来表示系统在时空 (s, y) 处的能量 (对应 (4.16) 中的 $\xi_{k,x}$). 注意 $\omega_{\text{bb}} \in \Omega_{\text{bb}}$ 的 Hamilton 量是 ω_{bb} 对应的轨道从 0 出发经过时间 t 到达 x 这段时间经过所有位置的 “能量” 总和, 也就是说,

$$H(\omega_{\text{bb}}) := \int_0^t \eta(s, b_s(\omega_{\text{bb}})) ds.$$

为了简便起见, 令 $\beta = 1$ (下述考察不涉及相变). 于是, 上述 CDRP 的 Gibbs 分布可以写成

$$\mathbf{P}_{t,x}^\omega(d\omega_{\text{bb}}) := \frac{1}{Z^\omega(t,x)} \langle \text{exp} \left\{ - \int_0^t \eta(s, b_s(\omega_{\text{bb}})) ds \right\} \rangle_{\mathbf{P}_{\text{bb}}(d\omega_{\text{bb}})},$$

其中, (t, x) 是固定的时空点, 表示 Brown 桥停止的时间和到达的终点, $\mathbf{P}_{t,x}^\omega$ 的随机环境 ω 来源于时空白噪声 η 所在的概率空间 (Ω, \mathbf{P}) . 注意时空白噪声是广义函数, 故而上式中的指数函数不能按照通常的方式来理解, 而是理解为 Wick 型指数函数, 用 $\langle \text{exp} \rangle$ 表示. 附录 B 对此作了详细的说明. 另外, 配分函数是 $(E_{\text{bb}}$ 是 \mathbf{P}_{bb} 对应的期望)

$$Z^\omega(t, x) = E_{\text{bb}} \left(\langle \text{exp} \left\{ - \int_0^t \eta(s, b_s(\omega_{\text{bb}})) ds \right\} \right), \quad (4.18)$$

系统的自由能是

$$\mathcal{F}^\omega(t, x) = -\log E_{\text{bb}} \left(\langle \text{exp} \left\{ - \int_0^t \eta(s, b_s(\omega_{\text{bb}})) ds \right\} \right). \quad (4.19)$$

特别地, 附录 C.2 的最后将给出配分函数的 Wiener-Chaos 展开计算.

注 4.9 在上述离散模型中, 若将基准测度空间 (Ξ, \mathbf{P}_0) 取为从 0 出发、步长限制为固定常数 (如 n , 它代表离散模型的时间跨度) 并固定终点的样本轨道构成的概率空间, 那么在合适的尺度变换下, 它将收敛至 Brown 桥. 也就是说, 上述 CDRP 实际上对应着固定轨道长度以及终点的一维离散模型的连续近似. 类似地, 我们还可以考虑其他离散模型的连续近似. 例如, 对于既不限制轨道长度, 又不限制终点的离散模型, 它的连续近似版本 CDRP 应该取标准 Brown 运动作为基准概率空间. 这里仅指出一维 Brown 桥的特殊情形, 原因在于, 我们将会在定理 4.4 中看到, (4.19) 恰好是满足窄楔形条件的一维 KPZ 方程的 Cole-Hopf 解.

4.3.1 CDRP 与 KPZ 方程

CDRP 中的基准测度空间实际上可以取作其他的 Markov 过程, 如 Brown 运动, 甚至不连续的对称稳定过程. 采用上面的方案, 即用 Brown 桥作为基准测度, 是因为由此计算出的配分函数 (4.18) 实

实际上是满足 $Y_0 = \delta_0$ 的随机热方程 (3.7) 的解. 这意味着, CDRP 自由能的相反数 $-\mathcal{F}(t, x)$ 是满足窄楔形条件的 KPZ 方程 (3.1) 的 Cole-Hopf 解. 严格来说, 我们可以得到如下命题.

定理 4.4 [16, 24, 27] 令 h 是满足窄楔形条件的 KPZ 方程 (3.1) 的 Cole-Hopf 解, Y 是相应的具有 δ_0 初值的随机热方程的解. 记 $G(t, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-x^2/2t\}$ 是 Gauss 热核, 那么, 对于任意 $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} Y(t, x) &= G(t, x)Z(t, x), \\ h(t, x) &= \log G(t, x) - \mathcal{F}(t, x), \end{aligned}$$

其中, Z 是 CDRP 的配分函数 (4.18), 而 \mathcal{F} 是 CDRP 的自由能 (4.19).

实际上, 我们也可以考虑其他几类初值条件下 KPZ 方程/随机热方程和 CDRP 的关系. 更多细节, 参见文献 [16, 24].

4.3.2 收敛策略

上述用时空空白噪声作为能量函数的 CDRP 可以通过离散的有向聚合模型来逼近: 在 (4.17) 中取合适的 Hamilton 函数 H^ω , 可以证明, 对离散模型的时空变量进行合适的尺度变换之后, 离散模型的配分函数收敛于 CDRP 的配分函数 (4.18). 具体细节, 参见文献 [16, 第 4.1.4 小节].

这启发我们, CDRP 或许可以提供另一种解决 KPZ 方程相关问题的思路. 与 ASEP 类似 (实际上, 随机聚合模型与 ASEP 也有千丝万缕的联系), 如下的路线图同样是值得尝试的:

- 证明离散 DRP 模型收敛至 CDRP: 尤其是配分函数之间的收敛性;
- 解离散 DRP 模型: 配分函数的单点分布、联合分布和普适性;
- 利用离散 DRP 模型的结果以及相应的收敛性, 得到 CDRP 的相关性质, 并利用与定理 4.4 类似的表示, 将之应用于 KPZ 方程, 从而解决一些有关 KPZ 方程的尚未解决的问题和猜想.

关于这份路线图的更多设想和细节, 请参阅已有的几份相关工作, 如文献 [51–53] 等.

4.4 KPZ 普适类和 KPZ 不动点

20 世纪 60 年代后期, 在总结实验的基础上, 物理学家提出了临界现象的普适性 (universality) 假设: 系统的临界行为由空间维数和序参量维数决定. 其中, 序参量是根据不同系统选取的相关量, 例如, Ising 模型的序参量是磁化强度 (其维度与不同材质对应的系统有关), 气液相变的序参量是气液两相的密度差 (维数为 1). 具有相同空间维数和序参量维数的系统属于同一个普适类 (universality class), 它们有相同的临界参数 (可与前述的标度参数类比). 特别地, 相应的渐近行为与参数类型和空间结构 (如 Ising 模型的格点结构) 无关.

类似地, 我们也可以引入 KPZ 普适性的概念. 第 2 节介绍了 Eden 模型、黏性落体模型和 KPZ 方程 (仅指一维非平凡情形) 等不同的系统, 它们分别描述了不同的生长过程, 变量类型不尽相同 (KPZ 方程的空间变量是连续的, 其余两个模型的空间变量是离散的), 空间结构也有差异, 但它们都满足 3 : 2 : 1 的动态标度律, 具有相同的标度参数. 因而, 它们可以认为属于同一个普适类, 一般称作 KPZ 普适类. 然而, 要描述并证明同一个普适类中的系统在严格数学意义下具有某种内在的相似性 (或者毋宁说, 给出普适类的严格数学定义, 并证明相关模型满足该定义), 却并不是件容易的事情. 首先, 动态标度律 (2.2) 刻画的是涨落在大尺度下的渐近行为, 而尺度变量在无穷大处的数学描述未必清晰. 其次, 标度参数在物理模型中一般是通过实验模拟 (如 Eden 模型) 或者特定的近似技巧 (如重整化群方法) 来确定, 这些方式与数学严格性相差甚远. 在第 4.1 小节中, 我们建议了一种描述 KPZ 普适性的

策略. 但显然, 这是一种比较“弱”的描述: 只要求形如 (4.4) 的在 $3:2:1$ 的尺度变换下单点分布的收敛性. 对于 ASEP, 普适性的描述可以稍强, 例如, 注 4.4 中表述的固定时间 t , 不同位置联合分布在尺度变换下的收敛性.

毋庸置疑的是, $3:2:1$ 的尺度变换是 KPZ 普适性的核心之一. 但参考 Brown 运动在不变原理中的作用, KPZ 普适类的描述中应该包含一个“理想”的核心成员, 即所谓的 KPZ 不动点: 它在 $3:2:1$ 的尺度变换下保持不变 (显然, KPZ 方程的解不是 KPZ 不动点). 记这个理想的 KPZ 不动点为 \mathfrak{h} , 那么下面的等式应该在某种意义上成立:

$$\mathfrak{h}(t, x) = R_\epsilon \mathfrak{h}(t, x) := \epsilon^{1/2} \mathfrak{h}(\epsilon^{-3/2} t, \epsilon^{-1} x), \quad \forall \epsilon > 0.$$

而且, KPZ 普适类中的元素 (如 Eden 模型、黏性落体模型、KPZ 方程、CGM 和 CDRP 等) 在 $3:2:1$ 的尺度变换下都应该收敛到这个 KPZ 不动点. 这种理想的数学描述可以写作

$$R_\epsilon h - \bar{h}_\epsilon \rightarrow \mathfrak{h}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

其中, \bar{h}_ϵ 是某个合适的重整项, 上述收敛是在随机过程 (以 t 和 x 为变量) 的弱收敛这个意义下而言的. KPZ 不动点的存在性和唯一性 ((4.20) 实际上蕴含着唯一性) 至今仍然是一个十分深刻且重要的公开问题.

另一方面, 我们可以从前面几节的讨论观察 (可能存在的) KPZ 不动点的一些特性. 例如, 对于固定的 (t, x) , $\mathfrak{h}(t, x)$ 的分布对应不同的初始状态可能要服从 GUE/GOE/ F_0 等分布; 对于固定的 t , $x \mapsto \mathfrak{h}(t, \cdot)$ 对应不同的初始状态应该与 $\text{Airy}_2/\text{Airy}_2/\text{Airy}_{\text{stat}}$ 等过程具有相同的有限维分布. 关于更多相关探讨, 参见文献 [54, 55].

参考文献

- 1 Kardar M, Parisi G, Zhang Y C. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys Rev Lett*, 1986, 56: 889–892
- 2 Eden M. A two-dimensional growth process. In: *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 4. Berkeley: University of California, 1961
- 3 苏汝铿. 统计物理学 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2004
- 4 刘玉鑫. 热学 (第二版). 北京: 北京大学出版社, 2013
- 5 Kolmogoroff A. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold's numbers (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1941, 30: 376–387
- 6 Frisch U, Kolmogorov A N. *Turbulence*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 7 Falconer K. *Fractal Geometry*. Chichester: John Wiley & Sons, 2014
- 8 刘式达, 刘式适. 物理学中的分形. 北京: 北京大学出版社, 2014
- 9 Walsh J B. An introduction to stochastic partial differential equations. In: *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984*. Berlin-Heidelberg: Springer, 1986, 265–439
- 10 Gouyet J F. *Physics and Fractal Structures*. New York: Springer-Verlag, 1996
- 11 Jullien R, Botet R. Surface thickness in the Eden model. *Phys Rev Lett*, 1985, 54: 2055–2055
- 12 Plischke M, Rácz Z. Dynamic scaling and the surface structure of Eden clusters. *Phys Rev A* (3), 1985, 32: 3825–3828
- 13 Corwin I. Kardar-Parisi-Zhang universality. *Notices Amer Math Soc*, 2016, 63: 230–239
- 14 Vold M J. A numerical approach to the problem of sediment volume. *J Colloid Sci*, 1959, 14: 168–174
- 15 Edwards S F, Wilkinson D R. The surface statistics of a granular aggregate. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1982, 381: 17–31
- 16 Corwin I. The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class. *Random Matrices Theor Appl*, 2012, 01: 1130001–1130076

- 17 Forster D, Nelson D R, Stephen M J. Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid. *Phys Rev A* (3), 1977, 16: 732–749
- 18 Funaki T, Quastel J. KPZ equation, its renormalization and invariant measures. *Stoch PDE Anal Comp*, 2015, 3: 159–220
- 19 Bertini L, Giacomin G. Stochastic burgers and KPZ equations from particle systems. *Comm Math Phys*, 1997, 183: 571–607
- 20 李灵峰. 量子场论. 北京: 科学出版社, 2015
- 21 Cole J D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart Appl Math*, 1951, 9: 225–236
- 22 Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm Pure Appl Math*, 1950, 3: 201–230
- 23 Bertini L, Cancrini N. The stochastic heat equation: Feynman-Kac formula and intermittence. *J Stat Phys*, 1995, 78: 1377–1401
- 24 Quastel J. Introduction to KPZ. In: *Current Developments in Mathematics*, vol. 2011. Somerville: International Press, 2012, 125–194
- 25 Mueller C. On the support of solutions to the heat equation with noise. *Stochastics Stochastic Rep*, 1991, 37: 225–245
- 26 Balázs M, Quastel J, Seppäläinen T. Fluctuation exponent of the KPZ/stochastic Burgers equation. *J Amer Math Soc*, 2011, 24: 683–708
- 27 Amir G, Corwin I, Quastel J. Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in $1 + 1$ dimensions. *Comm Pure Appl Math*, 2011, 64: 466–537
- 28 Takeuchi K A, Sano M. Universal fluctuations of growing interfaces: Evidence in turbulent liquid crystals. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 230601
- 29 Sasamoto T, Spohn H. Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition. *Nuclear Phys B*, 2010, 834: 523–542
- 30 Hairer M. Solving the KPZ equation. *Ann of Math* (2), 2013, 178: 559–664
- 31 Chan T. Scaling limits of Wick ordered KPZ equation. *Comm Math Phys*, 2000, 209: 671–690
- 32 Holden H, Lindström T, Ksandal B, et al. The stochastic Wick-type Burgers equation. In: *Stochastic Partial Differential Equations* (Edinburgh, 1994). Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 141–161
- 33 Lindstrøm T, Øksendal B, Ubøe J. Wick multiplication and Itô-Skorohod stochastic differential equations. In: *Ideas and Methods in Mathematical Analysis, Stochastics, and Applications* (Oslo, 1988). Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 183–206
- 34 Hairer M. A theory of regularity structures. *Invent Math*, 2014, 198: 269–504
- 35 McKean H P Jr. An exponential formula for solving Boltzmann’s equation for a Maxwellian gas. *J Combin Theory*, 1967, 2: 358–382
- 36 Wild E. On Boltzmann’s equation in the kinetic theory of gases. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1951, 47: 602–609
- 37 Hairer M. Rough stochastic PDEs. *Comm Pure Appl Math*, 2011, 64: 1547–1585
- 38 Corwin I, Quastel J. Crossover distributions at the edge of the rarefaction fan. *Ann Probab*, 2013, 41: 1243–1314
- 39 Liggett T M. *Interacting Particle Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2005
- 40 Rost H. Non-equilibrium behaviour of a many particle process: Density profile and local equilibria. *Z Wahrsch Verw Gebiete*, 1981, 58: 41–53
- 41 Johansson K. Shape fluctuations and random matrices. *Comm Math Phys*, 2000, 209: 437–476
- 42 Mehta M L. *Random Matrices*. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2004
- 43 Borodin A, Ferrari P L. Large time asymptotics of growth models on space-like paths, I: Push ASEP. *Electron J Probab*, 2008, 13: 1380–1418
- 44 Corwin I, Ferrari P L, Piché S. Limit processes for TASEP with shocks and rarefaction fans. *J Stat Phys*, 2010, 140: 232–267
- 45 Tracy C, Widom H. Asymptotics in ASEP with step initial condition. *Comm Math Phys*, 2009, 290: 129–154
- 46 Tracy C A, Widom H. On ASEP with step Bernoulli initial condition. *J Stat Phys*, 2009, 137: 825–838
- 47 Tracy C A, Widom H. Formulas for ASEP with two-sided Bernoulli initial condition. *J Stat Phys*, 2010, 140: 619–634
- 48 Tracy C A, Widom H. Formulas for joint probabilities for the asymmetric simple exclusion process. *J Math Phys*, 2010, 51: 063302
- 49 Gärtner J U. Convergence towards Burgers’ equation and propagation of chaos for weakly asymmetric exclusion

- processes. Stochastic Process Appl, 1988, 27: 233–260
- 50 Huse D A, Henley C L. Pinning and roughening of domain walls in Ising systems due to random impurities. Phys Rev Lett, 1985, 54: 2708–2711
- 51 Alberts T, Khanin K, Quastel J. The intermediate disorder regime for directed polymers in dimension $1 + 1$. Ann Probab, 2014, 42: 1212–1256
- 52 Alberts T, Khanin K, Quastel J. The continuum directed random polymer. J Stat Phys, 2014, 154: 305–326
- 53 Borodin A, Corwin I, Ferrari P. Free energy fluctuations for directed polymers in random media in $1 + 1$ dimension. Comm Pure Appl Math, 2014, 67: 1129–1214
- 54 Corwin I, Quastel J, Remenik D. Renormalization fixed point of the KPZ universality class. J Stat Phys, 2015, 160: 815–834
- 55 Matetski K, Quastel J, Remenik D. The KPZ fixed point. ArXiv:1701.00018, 2017
- 56 Wick G C. The evaluation of the collision matrix. Phys Rev, 1950, 80: 268–272
- 57 Simon B. The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory. Princeton: Princeton University Press, 1974
- 58 Avram F, Taqqu M S. Noncentral limit theorems and Appell polynomials. Ann Probab, 1987, 15: 767–775
- 59 Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics. Berlin: Springer-Verlag, 2006

附录 A KPZ 方程的尺度变换

我们仅考虑 $d = 1$ 的情形. 由 (2.7), KPZ 方程一般可写作

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \Delta h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(t, x), \quad (\text{A.1})$$

其中, $\nu, \lambda \neq 0, D > 0, \eta$ 是时空白噪声, 即 $E\eta(t, x) = 0, E[\eta(t, x)\eta(t', x')] = D\delta(t - t')\delta(x - x')$. 也就是说, 参数组 (ν, λ, D) 决定了 KPZ 方程的具体形式. 本节将说明如下事实: 给定另一组参数 (ν', λ', D') ($\nu', \lambda' \neq 0, D' > 0$), 由这组参数确定的 KPZ 方程可以由 (A.1) 通过合适的尺度变换得到.

事实上, 令

$$h_\zeta(t, x) := \zeta^a h(\zeta^{-b}t, \zeta^{-1}x), \quad (\text{A.2})$$

其中, $\zeta, a, b > 0$ 是待定的参数. 不难验证, h_ζ 满足如下方程:

$$\frac{\partial h_\zeta}{\partial t} = (\zeta^{2-b}\nu)\Delta h_\zeta + \left(\zeta^{2-a-b}\frac{\lambda}{2}\right)(\nabla h_\zeta)^2 + \eta_\zeta(t, x),$$

其中, $\eta_\zeta(t, x) = \zeta^{a-b}\eta(\zeta^{-b}t, \zeta^{-1}x)$. 特别地, η_ζ 仍然是时空白噪声, 并且 $E\eta_\zeta = 0$, 以及

$$\begin{aligned} E\eta_\zeta(t, x)\eta_\zeta(t', x') &= \zeta^{2a-2b}E\eta(\zeta^{-b}t, \zeta^{-1}x)\eta(\zeta^{-b}t', \zeta^{-1}x') \\ &= \zeta^{2a-2b}D\delta(\zeta^{-b}(t - t'))\delta(\zeta^{-1}(x - x')) \\ &= \zeta^{2a-b+1}D\delta(t - t')\delta(x - x'). \end{aligned}$$

上式中的第三个等式用到了 Dirac 函数的如下性质: $\delta(ct - ct') = c^{-1}\delta(t - t')$ ($c \neq 0$). 于是, 只需要取合适的 ζ, a 和 b 使得

$$\zeta^{2-b} = \frac{\nu'}{\nu}, \quad \zeta^{2-a-b} = \frac{\lambda'}{\lambda}, \quad \zeta^{2a-b+1} = \frac{D'}{D}, \quad (\text{A.3})$$

如上定义的 h_ζ 即满足由参数 (ν', λ', D') 确定的 KPZ 方程.

我们再来观察由上述事实得到的一个简单推论. 在 (A.2) 中考虑 $3 : 2 : 1$ 的尺度变换, 即取 $b = 3/2, a = 1/2$. 此时, (A.3) 给出 $\nu' = \zeta^{1/2}\nu, \lambda' = \lambda, D' = \zeta^{1/2}D$. 也就是说, KPZ 方程并不满足 $3 : 2 : 1$ 的尺度不变性.

附录 B Cole-Hopf 变换

本节解释针对一维 KPZ 方程的 Cole-Hopf 变换, 它将 KPZ 方程转化为随机热方程, 从而实现了方程的“线性化”. 为了简便起见, 并与第 3 节一致, 我们仍然假设 $\nu = 1/2$, $\lambda = D = 1$.

如第 3.1 小节所解释, 时空白噪声可理解为柱 Wiener 过程关于时间的 Itô 型形式导数. 于是, 若忽略空间变量造成的奇异性 (空间变量的奇异性可利用磨光技巧来处理), (3.6) 描述的函数 $h(t, x)$ 关于时间变量 t 差不多是一个半鞅. 进而, 在 Cole-Hopf 变换下, 我们应该利用 Itô 公式给出

$$Y(t, x) = \exp\{h(t, x)\}$$

满足的方程. 具体地, 我们将 (3.6) 写作

$$\partial_t h = \left(\frac{1}{2} \Delta h + \frac{1}{2} (\nabla h)^2 - \infty \right) dt + dW_t, \quad (\text{B.1})$$

其中, W_t 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的柱 Wiener 过程, 再利用 Itô 公式, 可以得到 ($Y_t := Y(t, \cdot)$)

$$dY_t = Y_t \partial_t h + \frac{1}{2} Y_t \text{tr}(I) dt,$$

其中, I 是柱 Wiener 过程的协方差算子, 即 $L^2(\mathbb{R})$ 上的恒等算子, $\text{tr}(I)$ 表示 I 的迹, 它是发散的. 将 (B.1) 代入上式, 即有

$$dY_t = \frac{1}{2} \Delta Y_t dt + Y_t \left(\frac{1}{2} \text{tr}(I) - \infty \right) dt + Y_t dW_t.$$

由此不难看出, Cole-Hopf 变换为了将 KPZ 方程转化为线性方程, 并且 (在形式上) 保证线性化后的方程有意义, 还需对 (3.6) 中的重整项作出如下诠释:

$$\infty = \frac{1}{2} \text{tr}(I).$$

特别地, Y_t 满足可乘噪声驱动的随机热方程 (3.7).

附录 C Wick 积

附录 C.1 Wick 积的一般定义

Wick 积是物理学家 Wick 在文献 [56] 中提出的一种 (任意阶矩均有限的) 随机变量之间的运算. 给定某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, 对于 $n \geq 0$ 和 Ω 上 n 个任意阶可积的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n ($\mathbf{E}X_i^p < \infty, 1 \leq i \leq n, \forall p \geq 1$), 它们的 Wick 积记作 $\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$ (有些文献中也将 Wick 积记作 $:X_1 X_2 \cdots X_n:$, 如文献 [57]), 它按照如下的递归方式给出.

定义 C.1 令 \mathcal{V} 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上任意阶矩均有限的随机变量全体. 对于 $n \geq 0$,

$$\langle \cdot \rangle_n : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X_1, \dots, X_n) \mapsto \langle X_1, \dots, X_n \rangle_n$$

是按照如下的递归方式定义的泛函:

- (1) $\langle \cdot \rangle_0 = 1$;
- (2) 假设 $\langle \cdot \rangle_{n-1}$ 已经定义, 对于 $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{V}$, $\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle_n$ 由 $\mathbf{E}\langle X_1, \dots, X_n \rangle_n = 0$ 和

$$\frac{\partial \langle X_1, \dots, X_n \rangle_n}{\partial X_i} = \langle X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n \rangle_{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n$$

确定.

称这族泛函 $\{\langle \cdot \rangle_n : n \geq 0\}$ 为 Wick 积. 一般地, 在不引起混淆时, 我们将省略 Wick 积中用来标记随机变量数量的下角标 n .

注 C.1 为了方便起见, 记

$$X^{/n} := \underbrace{X, \dots, X}_{n \uparrow},$$

于是,

$$\langle X^{/n} \rangle = \langle \underbrace{X, \dots, X}_{n \uparrow} \rangle.$$

特别地, 利用定义 C.1 中的第二条, 我们可以得到

$$\frac{d\langle X^{/n} \rangle}{dX} = n\langle X^{/n-1} \rangle. \quad (\text{C.1})$$

不难证明 (参见文献 [58]), 按上述递归方式给出的 Wick 积是良定的. 作为例子, 容易计算前两项 Wick 积是

$$\langle X \rangle = X - EX, \quad \langle X, Y \rangle = XY - XEY - YEX + 2EXEY - E(XY). \quad (\text{C.2})$$

并且,

$$\mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X_1, \dots, X_n) \mapsto \langle X_1, \dots, X_n \rangle$$

是 n 元对称多线性泛函.

引理 C.1 [58] 关于 Wick 积的以下性质成立:

- (1) 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有 $\langle \alpha X_1 + \beta \tilde{X}_1, X_2, \dots, X_n \rangle = \alpha \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle + \beta \langle \tilde{X}_1, X_2, \dots, X_n \rangle$;
- (2) 对于 $i < j$, 有 $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n \rangle = \langle X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_n \rangle$.

需要注意的是, 对于 Wick 积, 结合律通常是不成立的. 也就是说, 一般地, 若 $X, Y, Z \in \mathcal{V}$, 则

$$\langle X, Y, Z \rangle \neq \langle \langle X, Y \rangle, Z \rangle.$$

但在附录 C.3 中我们将发现, 如果限定在零均值的 Gauss 型随机变量上, 那么利用 Wick 积可以诱导出一种真正的乘法运算, 它的基础在于对独立随机变量的如下观察. 由 (C.2) 不难知道, 若 X 和 Y 独立, 那么 $\langle X, Y \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle$. 更一般地, 如下命题成立.

引理 C.2 [58] 如果 $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$ 两两独立, 那么, 对任意 $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, 有

$$\langle X_1^{/n_1}, X_2^{/n_2}, \dots, X_k^{/n_k} \rangle = \langle X_1^{/n_1} \rangle \langle X_2^{/n_2} \rangle \cdots \langle X_k^{/n_k} \rangle.$$

附录 C.2 Gauss 型随机变量的 Wick 积

常用的是 Gauss 型随机变量之间的 Wick 积. 同时, 为了简便起见, 以下仅考虑均值为 0 的随机变量. 记 \mathcal{V}_G^0 是均值为 0 的 Gauss 随机变量全体. 显然, $\mathcal{V}_G^0 \subset \mathcal{V}$.

对于满足标准正态分布的随机变量 X 和 Y , 由 (C.1) 和 (C.2), 我们不难证明

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= X, \quad \langle X, Y \rangle = XY - E(XY), \\ \langle X^{/n} \rangle &= H_n(X), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

其中, $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2/2}$ 是 Hermite 多项式. 特别地, 沿用前述符号, 记 $\{\eta(t, x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ 是时空白噪声 ($D = 1$). 对于满足 $\|f\|_{L^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)} = 1$ 的 $f \in \mathcal{S}$,

$$X_f := \eta(f) = \int f(t, x) \eta(t, x) dt dx$$

符合标准正态分布, 即 $X_f \sim N(0, 1)$. 利用 (C.3) 和 Wiener-Itô 公式 (参见文献 [59]), 我们可以得到 X_f 的 n 次 Wick 幂的如下表示:

$$\begin{aligned} \langle X_f^n \rangle &= H_n(X_f) \\ &= n! \int_{\Lambda_n} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(t_1, y_1) \cdots f(t_n, y_n) \eta(t_1, y_1) \cdots \eta(t_n, y_n) dy_1 \cdots dy_n dt_1 \cdots dt_n, \end{aligned}$$

其中, $\Lambda_n := \{(t_1, \dots, t_n) : 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$. 注意, 根据第 3.1 小节, 上式中的 $\eta(t_i, y_i) dt_i$ 可以理解为 $dW_{t_i}(y_i)$ (W 是柱 Wiener 过程). 由于 Wick 积满足多线性, 不难验证, 对于任意 $f \in \mathcal{S}$ (未必满足 $\|f\|_{L^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)} = 1$) 仍然具有上述表示 (注意, $\langle X_f^n \rangle = H_n(X_f)$ 不再成立了). 也就是说, 我们可以得到如下命题.

命题 C.1 [59] 对于任意 $f \in \mathcal{S}$, $X_f := \eta(f)$ 的 n 次 Wick 积满足如下表示:

$$\langle X_f^n \rangle = n! \int_{\Lambda_n} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(t_1, y_1) \cdots f(t_n, y_n) \eta(t_1, y_1) \cdots \eta(t_n, y_n) dy_1 \cdots dy_n dt_1 \cdots dt_n,$$

其中, $\Lambda_n := \{(t_1, \dots, t_n) : 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$.

注 C.2 需要指出的是,

$$\eta^{\otimes n}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) := \eta(t_1, y_1) \cdots \eta(t_n, y_n)$$

是作用在

$$\underbrace{\mathcal{S} \times \cdots \times \mathcal{S}}_n$$

上的广义函数, 但利用 Itô 等距的思想, 很容易将 $\eta^{\otimes n}$ 的作用函数空间推广到 $L^2(\Lambda_n \times (\mathbb{R}^d)^n)$.

下面来考虑 $\eta(t, x)$ 与 $\eta(t', x')$ 的 Wick 积. 由于时空白噪声 η 在第 3.1 小节被解释为广义函数, 因而有关 η 的运算需要作用到合适的测试函数之后才是可理解的 (例如, $E\eta(t, x) = 0$ 需要理解为对任意 $f \in \mathcal{S}$, 有 $E(\eta(f)) = 0$). 于是, Wick 积 $\langle \eta(t, x), \eta(t', x') \rangle$ 需要将两个 η 分别作用到某个测试函数后才能定义. 也就是说, $\langle \eta^{\otimes 2} \rangle := \langle \eta(t, x), \eta(t', x') \rangle \in (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})'$, 并且对 $f \otimes g \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$, 有

$$\langle \eta^{\otimes 2} \rangle(f \otimes g) := \langle X_f, X_g \rangle, \tag{C.4}$$

其中, $X_f = \eta(f)$, $X_g = \eta(g)$. 当然可以直接计算 $\langle X_f, X_g \rangle$, 但将 $f \otimes g$ 对称化之后, 我们可以给出 (C.4) 更简洁的表达式. 具体来说, 令 $S(f \otimes g) := (f \otimes g + g \otimes f)/2$, 那么由命题 C.1 可以得到

$$\langle \eta^{\otimes 2} \rangle(S(f \otimes g)) = 2 \int_{\Lambda_2} \int_{(\mathbb{R}^d)^2} S(f \otimes g)(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \eta^{\otimes 2}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) dy dt.$$

类似地, 利用 Itô 等距的思想, 可以将 (C.4) 中的测试函数类 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ 推广到 $L^2(\Lambda_2 \times (\mathbb{R}^d)^2)$. 一般地, 利用 Wiener-Itô 公式和 Itô 等距, 我们可以得到时空白噪声的 n 次 Wick 积的如下描述.

命题 C.2 对 $n \geq 1$, 记 $\langle \eta^{\otimes n} \rangle$ 是 η 的 n 次 Wick 幂, 则对于 $L^2(\Lambda_n \times (\mathbb{R}^d)^n)$ 中的对称函数 φ , 有

$$\langle \eta^{\otimes n} \rangle(\varphi) = n! \int_{\Lambda_n} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \eta^{\otimes n}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) dy dt.$$

最后, 我们来计算 CDRP 的配分函数 (4.18). 注意 Wick 指数函数按照通常意义定义, 即

$$\langle \exp \rangle \{X\} := \sum_{n \geq 0} \frac{\langle X^n \rangle}{n!}.$$

记 $\mathbf{p}_n(\mathbf{s}, \mathbf{y}) := p_{s_1, \dots, s_n}(y_1, \dots, y_n)$ 表示 Brown 桥的 n 步转移概率密度函数, 即

$$\mathbf{P}_{\text{bb}}(\omega_{\text{bb}}(s_1) \in dy_1, \dots, \omega_{\text{bb}}(s_n) \in dy_n) = p_{s_1, \dots, s_n}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n.$$

不难验证, $\mathbf{p}_n \in L^2(\Lambda_n(t) \times \mathbb{R}^n)$ 是对称函数, 并且 $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{p}_n\|_{L^2(\Lambda_n \times \mathbb{R}^n)}^2 < \infty$. 于是,

$$\begin{aligned} Z(t, x) &= \mathbb{E}_{\text{bb}} \left(\langle \exp \rangle \left\{ - \int_0^t \eta(s, b_s(\omega_{\text{bb}})) ds \right\} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathbb{E}_{\text{bb}} \left(\left\langle \left\{ \int_0^t \eta(s, b_s(\omega_{\text{bb}})) ds \right\}^n \right\rangle \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \int_0^t \eta(s_1, y_1) ds_1, \dots, \int_0^t \eta(s_n, y_n) ds_n \right\rangle \mathbf{p}_n(\mathbf{s}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle \eta^{\otimes n} \rangle (\mathbf{p}_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Lambda_n(t)} \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^n \mathbf{p}_n(\mathbf{s}, \mathbf{y}) \eta^{\otimes n}(\mathbf{s}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} ds. \end{aligned}$$

这实际上就是 $Z(t, x)$ 在 $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ 中的 Wiener-Chaos 展开 (Ω 是定义时空白噪声 η 的概率空间).

附录 C.3 白噪声分析

在白噪声分析中, 我们将概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 取作某个抽象 Wiener 空间 (B, H, μ) . 特别地, 文献 [32] 在白噪声框架下选取 $B = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, $B' = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 而文献 [31] 在时空白噪声的框架下选取 $B = \mathcal{S}'([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$, $H = L^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$, $B' = \mathcal{S}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$. 这里为了简便起见, 我们不详细说明抽象 Wiener 空间的具体形式, 但取定

$$\{\varphi_n : n \geq 1\} \subset B' \xrightarrow{\iota} H$$

使得 $\{u(\varphi_n) : n \geq 1\}$ 是 H 中的一族标准正交基. 特别地, $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ 是 (B, μ) 上相互独立的标准 Gauss 型随机变量族. 定义指标集

$$J := \{\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1} : \alpha_n \in \mathbb{N}, \text{ 最多有限个 } \alpha_n \neq 0\}.$$

根据引理 C.2, 对于 $\alpha \in J$, 有

$$\langle \varphi'^{\alpha} \rangle := \langle \varphi_1'^{\alpha_1}, \varphi_2'^{\alpha_2}, \dots \rangle = \langle \varphi_1'^{\alpha_1} \rangle \langle \varphi_2'^{\alpha_2} \rangle \cdots = \prod_{n \geq 1} H_{\alpha_n}(\varphi_n). \quad (\text{C.5})$$

令 $\mathbf{H}_{\alpha}(\omega) := \langle \varphi'^{\alpha} \rangle(\omega) = \prod_{n \geq 1} H_{\alpha_n}(\varphi_n(\omega))$, $\omega \in B$. 进而, $\{\sqrt{\alpha!}^{-1} \mathbf{H}_{\alpha} : \alpha \in J\}$ 构成了 $L^2(B, \mu)$ 的一组标准正交基.

我们的讨论将在 Kondratiev 分布空间 (\mathcal{S}^{-1}) 上进行展开, 它包含 $L^2(B, \mu)$, 其中的分布函数可以写作 $\{\sqrt{\alpha!}^{-1} \mathbf{H}_\alpha : \alpha \in J\}$ 的线性组合:

$$L^2(B, \mu) \subset (\mathcal{S}^{-1}) \subset \left\{ \sum_{\alpha \in J} a_\alpha \mathbf{H}_\alpha : a_\alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(\mathcal{S}^{-1}) 的具体形式参见文献 [31, 32], 引入它的意义在于 Kondratiev 分布空间关于下面要定义的 (由 Wick 积诱导的) 乘法是封闭的, 而且时空白噪声 $\eta(t, x) \in (\mathcal{S}^{-1})$.

注 C.3 在考察时空白噪声 $\eta(t, x)$ 时, 概率空间是定义时空白噪声的概率空间, 故而 (B, H, μ) 的选取与文献 [31] 一致. 此时, 记 $f_n := \iota(\varphi_n)$, $n \geq 1$. 它们构成了 $L^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ 的一组标准正交基. 反过来,

$$\varphi_n = \eta(f_n) = X_{f_n}.$$

于是, η 可以写作 (参见文献 [31])

$$\eta(t, x) = \sum_{n \geq 1} f_n(t, x) \varphi_n = \sum_{n \geq 1} f_n(t, x) \mathbf{H}_{e_n} \in (\mathcal{S}^{-1}), \tag{C.6}$$

其中, $e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$. 显然, 由于

$$\left\| \sum_{n \geq 1} f_n(t, x) \mathbf{H}_{e_n} \right\|_{L^2(B, \mu)}^2 = \sum_{n \geq 1} f_n(t, x)^2,$$

而后者并不收敛, 故 $\eta(t, x) \notin L^2(B, \mu)$.

在 (\mathcal{S}^{-1}) 上, 我们可以按照如下方式定义一种乘法 “ \diamond ”, 它实际上是由 Wick 积 $\langle \cdot \rangle$ 诱导的, 在有些文献中 (如文献 [31, 32] 等) 也直接称 “ \diamond ” 为 Wick 积或 Wick 乘法.

定义 C.2 映射

$$\begin{aligned} \diamond : (\mathcal{S}^{-1}) \times (\mathcal{S}^{-1}) &\rightarrow (\mathcal{S}^{-1}), \\ \left(\sum_{\alpha \in J} a_\alpha \mathbf{H}_\alpha, \sum_{\beta \in J} b_\beta \mathbf{H}_\beta \right) &\mapsto \left(\sum_{\alpha \in J} a_\alpha \mathbf{H}_\alpha \right) \diamond \left(\sum_{\beta \in J} b_\beta \mathbf{H}_\beta \right) =: \sum_{\alpha, \beta \in J} a_\alpha b_\beta \mathbf{H}_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

定义了 (\mathcal{S}^{-1}) 上的一种乘法. 在不引起混淆时, 我们也称运算 \diamond 为 Wick 积或 Wick 乘法.

根据文献 [32, 引理 1.4], (\mathcal{S}^{-1}) 关于上述运算 \diamond 封闭, 换句话说, 上述定义是良定的. 另外, 下面的性质显然成立.

引理 C.3^[32] 对于 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \in (\mathcal{S}^{-1})$, $c \in \mathbb{R}$, 下述性质成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \diamond \mathbf{F}_2 &= \mathbf{F}_2 \diamond \mathbf{F}_1, \quad (c\mathbf{F}_1) \diamond \mathbf{F}_2 = c(\mathbf{F}_1 \diamond \mathbf{F}_2), \\ (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \diamond \mathbf{F}_3 &= \mathbf{F}_1 \diamond \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_2 \diamond \mathbf{F}_3, \\ (\mathbf{F}_1 \diamond \mathbf{F}_2) \diamond \mathbf{F}_3 &= \mathbf{F}_1 \diamond (\mathbf{F}_2 \diamond \mathbf{F}_3). \end{aligned}$$

不难看出, 定义 C.2 最本质的设定在于

$$\mathbf{H}_\alpha \diamond \mathbf{H}_\beta := \mathbf{H}_{\alpha+\beta}.$$

根据 (C.5), 它可以写作

$$\langle \varphi'^\alpha \rangle \diamond \langle \varphi'^\beta \rangle = \langle \varphi'^{\alpha+\beta} \rangle.$$

特别地 (注意 $\varphi_1 = \langle \varphi_1 \rangle$),

$$\langle \varphi_1^k \rangle \diamond \langle \varphi_1^m \rangle = \langle \varphi_1^{(k+m)} \rangle = \underbrace{\varphi_1 \diamond \cdots \diamond \varphi_1}_{k+m \uparrow} =: \varphi_1^{\diamond(k+m)}.$$

另一方面, 对于任意 $f \in \mathcal{S}$, 有

$$X_f = \eta(f) = \eta\left(\sum_{n \geq 1} (f_n, f)_{L^2} \cdot f_n\right) = \sum_{n \geq 1} (f_n, f)_{L^2} \cdot X_{f_n} = \sum_{n \geq 1} (f_n, f)_{L^2} \cdot \varphi_n.$$

进而, 对 $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{S}$, 有

$$\begin{aligned} \langle X_{g_1}, \dots, X_{g_m} \rangle &= \left\langle \sum_{n \geq 1} (f_n, g_1)_{L^2} \cdot \varphi_n, \dots, \sum_{n \geq 1} (f_n, g_m)_{L^2} \cdot \varphi_n \right\rangle \\ &= \left(\sum_{n \geq 1} (f_n, g_1)_{L^2} \cdot \varphi_n \right) \diamond \cdots \diamond \left(\sum_{n \geq 1} (f_n, g_m)_{L^2} \cdot \varphi_n \right) \\ &= X_{g_1} \diamond \cdots \diamond X_{g_m}. \end{aligned}$$

这说明, (\mathcal{S}^{-1}) 上的 Wick 乘法运算 \diamond 与附录 C.2 中的 Wick 积在某种意义上是一致的. 这同时意味着对于任意 $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{S}$, 有

$$\langle \eta^{\otimes m} \rangle (g_1 \otimes \cdots \otimes g_m) = (\eta(t_1, x_1) \diamond \cdots \diamond \eta(t_m, x_m))(g_1 \otimes \cdots \otimes g_m). \quad (\text{C.7})$$

也就是说, 附录 C.2 中定义的时空白噪声间的 Wick 积与用 \diamond 运算定义的时空白噪声之间的乘积在广义函数意义下是一致的.

注 C.4 取上述的 f_1 及 $\varphi_1 = X_{f_1}$. 注意,

$$\langle X_{f_1}, X_{f_1} \rangle = X_{f_1} \diamond X_{f_1} = H_2(X_{f_1}),$$

但

$$\langle H_2(X_{f_1}), X_{f_1} \rangle \neq \langle X_{f_1}, X_{f_1}, X_{f_1} \rangle = X_{f_1} \diamond X_{f_1} \diamond X_{f_1} = H_2(X_{f_1}) \diamond X_{f_1}.$$

这说明, 并非所有随机变量之间的 Wick 积都与 \diamond 运算一致.

A brief introduction to KPZ equation and KPZ universality

Zhao Dong & Liping Li

Abstract In this survey, we shall first introduce the physical background of KPZ universality class. The Eden model, sticky block model and KPZ equation will be mentioned. Then we shall focus on the Cole-Hopf solution to 1-dimensional KPZ equation and present some discrete models like the corner growth model and directed polymer model, which could converge to the KPZ equation in some sense.

Keywords KPZ equation, KPZ universality class, fluctuation, dynamical scaling law

MSC(2010) 82C22, 60H15

doi: 10.1360/N012018-00053