决定性动力系统中的随机现象: 动力系统统计理论简介

献给钱敏教授 90 华诞

胡虎翼^{1,2}

1. 南方科技大学数学系, 深圳 518055;

2. Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA

E-mail: huhu@sustc.edu.cn, hhu@math.msu.edu

收稿日期: 2017-09-27; 接受日期: 2017-11-14; 网络出版日期: 2017-12-05

摘要 本文简要介绍动力系统的统计理论研究中所得到的概率定律. 考虑动力系统 (M, f) 相空间 M 上的函数 ϕ , 随着系统演化, 函数族 $\{\phi \circ f^n\}$ 可以看作一个过程. 虽然这个过程是确定性的, 但是当系统的运动具有一定的紊动性, 且函数 ϕ 具有一定的正则性时, 这个过程具有随机过程的很多性质, 例如, 服从大数定律、中心极限定理、重对数律、大偏差原理、局部极限定理和几乎确定不变性原理等.

关键词 动力系统统计性质 双曲性 物理测度 大数定律 中心极限定理 几乎确定不变原理

MSC (2010) 主题分类 37A50, 37C40

1 引言

世界是确定的, 还是随机的, 是一个长久困惑人们的话题. 一方面, 描述物理规律的定律, 包括描述力学系统的牛顿三定律和万有引力定律, 以及描述电磁现象的 Maxwell 方程组, 都是确定性的. 狭义相对论和广义相对论的语言, 也是确定性的. 描述量子状态的 Schrödinger 方程, 本身也不包含随机项. 但是关于它的解波函数的意义, 物理学界目前一般都采用概率的解释, 尽管这样的诠释难免会令人困惑甚至引起争论. 另一方面, 在很多现象中, 特别是对那些那些重复发生而又具有不确定性的事件中, 概率和统计的描述和预测也具有高度的准确性.

2 历史回顾: 从决定性到紊动

对于自然界的认识, 17–19 世纪是机械论占统治地位的时代. 牛顿力学以及其后的分析力学的产生和发展, 加上机械工业的发达, 使得机械唯物主义在哲学上盛行的同时, 人们倾向于用机械观去认识和解释世界. 例如, 为什么地球上的动物不能长得太大, 原因之一是生物的重量与其尺寸的立方成正

英文引用格式: Hu H Y. Stochastic phenomena in deterministic dynamical systems: Introduction to statistical properties of dynamical systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1665–1680, doi: 10.1360/N012017-00209

比, 而支撑身体的腿部力量是与截面积, 也就是其尺寸的平方, 成正比. 法国哲学家 La Mettrie 为宣传唯物论, 18 世纪写了一本非常有名的书“人是机器”, 其中就认为人是直立行走的机器. 机械观的盛行, 决定论自然占了统治地位. 这种看法, 以 Laplace 在他 1812 年的书 *Philosophical Essay on Probabilities* 的开头部分所说的最有代表性 (参见文献 [1, 第 4 页]): “我们可以将宇宙现在的状态看作它过去状态的结果和它今后状态的原因. 如果一个智者能够了解在某个给定的时刻激发自然的一切力量以及构成它的所有物体的相应情形, 进而, 如果他足够智慧能将所得数据进行分析, 那么他将用同样的公式得到从宇宙最大的物体到最轻的原子的运动. 对这样的智者, 没有事物是不确定的, 未来就像过去一样在他眼前洞开.”

然而, 这种也被称为 Laplace 信条 (Laplace demon) 的决定论, 在 19 和 20 世纪之交时, 就如同人们对物理学乐观时一样, 遇到了乌云. 在物理大厦上空的两朵乌云, 是 Michelson-Morley 实验与当时光传播的以太学说的矛盾, 以及 Maxwell-Boltzmann 能量分布理论解释黑体辐射实验结果时的困难. 二者分别导致了相对论和量子力学的产生. 而对于决定论, 则来自对三体问题里运动复杂性研究有过巨大贡献的 Poincaré 的异议. Poincaré^[2] 说: “如果我们精确地知道自然法则以及宇宙在初始时刻的状态, 我们就能精确地预测这一宇宙在后续时刻的状态. 但是, 即便自然法则对我们已毫无秘密, 我们也只能近似地知道初始状态. 如果这能使我们以同等精度预见后续状态, 那么这就是我们所需要的一切. 我们说这一由自然法则决定的现象已被预测. 但情形并不总是这样. 可能初始条件的微小差异会导致最终结果的巨大差别, 先前的小错误会导致后来的大错误. 预测变得不可能, 我们遇到偶然现象.”

决定性和随机性的分歧, 在量子力学出现后表现得更为直接. 与经典力学决定性的解释不同, 量子力学的解释是概率的. 例如, 粒子的状态可以用波函数 Ψ 来表示, 而波函数在空间某点的强度, 即 Ψ^2 的值, 是在该点发现该粒子的概率的度量. 测不准原理表明, 量子的位置和动量不可能同时被准确测定. 这种不确定性的概率表述不能给出确定的结果. 虽然量子力学理论能够完整地解释所有被观察到的物理现象, 但是这种概率描述, 由于影响了因果律, 使得决定论者疑虑重重. 这也导致了 Bohr 和 Einstein 关于量子力学理论基础在 20 世纪二三十年代的著名论战.

在数学上, 虽然 Poincaré 已经认识到初值的微小改变会使系统的行为产生巨大的差别, 并且敏感地猜测到了会导致偶然现象的出现, 但是 20 世纪上半叶动力系统的研究仍然以周期轨道的存在性与稳定性及曲面上的平移等较为规则的动力系统性质为主. 20 世纪 60 年代到 80 年代, 动力系统一系列关于运动紊动的发现, 使得这个领域有了彻底的改观.

Smale 在 1965 年提出的马蹄模型, 被认为是紊动的标志. 马蹄是一个平面系统的不变子集, 周期点在其中稠密. 这一系统是可扩的, 也就是说, 任何两条不同的轨道, 都会在某时刻相隔距离大于某个给定的常数. 这就是对初值的敏感依赖性. 更为重要的是, 它具有结构稳定性, 也就是说, 当系统受到小的扰动时, 所得到的系统与原有的系统拓扑共轭, 或者说, 在相差一个坐标变换下, 两个系统有相同的行为.

当时已经从事气象方程研究十余年的 Lorenz, 在计算机模拟中发现该方程有一个形似蝴蝶, 但其内部运动非常不规则的吸引子, 现在被称为 Lorenz 吸引子. 其中运动对初值的敏感依赖性更是引人注目. 因此, 他在 1972 年美国科学进步协会¹⁾ 第 139 次会议上临时把他的发言标题取为“可预测性: 巴西的蝴蝶扇动翅膀能否引起 Texas 的台风?²⁾”这个发现影响不仅在数学界, 也在社会上影响巨大, 而这句话也成了名言并且演化出多种版本.

1975 年, 还在攻读博士学位的李天岩和他的导师 Yorke 联名在美国数学月刊上发表文章“周期三

¹⁾American Association for the Advancement of Science.

²⁾Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?

蕴含紊动”. 文中揭示, 即便是简单的区间上的映射, 轨道的行为也可以异常复杂. 映射具有以任何正整数为周期的周期轨道. 而且系统中存在势为不可数集合, 使得对集合中的任何两个点, 随系统演化, 它们距离的下极限为零、上极限大于某个给定的正数. 也就是说, 系统具有某种初值敏感性. 该文揭示出非常简单的系统的运动也可能具有高度复杂性, 从而引起了广泛的注意, 也使得用紊动 (chaos) 一词来表述运动的复杂性, 深入人心.

从 20 世纪六七十年代以来, 随着现代意义下的动力系统, 特别是微分动力系统的兴起, 由于系统运动的复杂性, 概率方法便成为有力的工具. 这类研究因为可以依概率的方法描述“多数”或者“几乎所有”点轨道的行为, 因此也被称为统计理论. SRB 测度的发现和物理测度概念的引进, 使得在 20 世纪 30 年代就已经知道的遍历定理, 对轨道行为的描述更为广泛. 同时, 中心极限定理和大偏差原理也在一些动力系统中得到证明. 此后, 大量的概率现象在决定性的动力系统中被发现, 动力系统的统计性质的研究也日趋活跃.

3 随机过程与动力系统

我们简单地介绍随机过程与动力系统之间的联系和差别.

概率空间常常被看成一个三元组 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, 其中 Ω 是基本事件所成的空间, $\mathcal{B}$ 是所有事件形成的集合, 而 P 是事件发生的概率. 更具体一些, $\mathcal{B}$ 是 Ω 上的 σ -代数, 而 $P: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ 则是一个具有可列可加性的函数. 随机变量 $X = X(\omega)$ 是定义于 Ω 上的一个实值可测函数. 随机过程则是指一族随机变量的集合 $\{X_t(\omega): \omega \in \Omega, t \in T\}$, 这里 T 是指标集, 常常被看作时间. 因此常取 $T = \mathbb{R}$ 或者 $T = \mathbb{Z}$.

动力系统源于对常微分方程中自治系统 $x' = F(x)$ 的解的研究. 如果 $x = f(t, x_0)$ 是该系统满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的解, 那么当 F 是可微函数时, 这个解对初值 x_0 是可微的. 记 $f^t(x) = f(t, x)$, 则由解对初值的唯一性和连续可微性可知, 对每个 t , f^t 是微分同胚, 而且 $\{f^t: t \in \mathbb{R}\}$ 满足群性质:

$$f^0 = \text{id}, \quad f^{t+s} = f^t \circ f^s.$$

在实际中, 为方便起见, 常把时间离散化, 即考虑 $\{f^n: n \in \mathbb{Z}\}$. 动力系统中对应于 Ω 的空间是相空间 M , 即系统所有可能状态所成的空间. M 常取为欧氏空间的一个子集或者一个微分流形. 其上的 σ -代数, 常取为 Borel 代数, 或者它的完备化, 有时称 Lebesgue 代数. 从而其上的测度分别称为 Borel 测度或者 Lebesgue 测度. 动力系统中考虑的测度通常为不变测度, 即对任意可测集 B 满足关系式 $\mu(B) = \mu(f^{-1}B)$ 的测度 μ . 记 $\mathcal{M}(M)$ 为所有 M 上不变概率测度的集合.

在动力系统的统计性质研究中, 常常考虑定义于相空间 M 上的函数 $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ 随系统的演化, 即函数系 $\{\phi \circ f^n\}$ 所具有的各种性质. 这时函数 ϕ 也常称为可观察量 (observable). 例如, 如果 M 表示某限定范围内 N 个气体分子的所有可能的位置和速度所形成的空间, 那么由分子的平均动能决定的该系统的温度, 就是这样一个量.

随机序列 $\{X_n\}$ 常常被假设为独立同分布的. 一个随机变量 X 的分布是指函数

$$F_X(x) := P(X < x),$$

它给出随机变量 X 取值小于 $x \in \mathbb{R}$ 的概率. 而两个随机变量 X 和 Y 的联合分布是指函数

$$F_{X,Y}(x, y) := P(X < x, Y < y).$$

如果对所有 n , F_{X_n} 都相同, 那么称这个随机序列 $\{X_n\}$ 是同分布的. 对两个随机变量 X 和 Y , 如果对所有的 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有 $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 那么称 X 和 Y 是独立的. 对于一个随机序列 $\{X_n\}$, 如果其中任意两个都是相互独立的, 则称这个随机序列是独立的.

概率论中最重要的分布是正态分布, 或者 Gauss 分布. 它的分布函数由下式给出:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(t-\bar{\mu})^2/2\sigma^2} dt,$$

这里 $\bar{\mu}$ 是期望, σ^2 是方差. 函数 $\rho(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-\bar{\mu})^2/2\sigma^2}$ 是密度函数.

对于动力系统相空间 M 上的一个可观察量 ϕ , 由系统的演化导出的函数系 $\{\phi \circ f^n\}$, 可以看成是一个过程. 如果在 M 上取不变测度 μ , 那么 μ 的不变性自然得到这个过程 $\{\phi \circ f^n\}$ 是同分布的. 但是由于动力系统映射 f 是确定的, 这个过程也是确定而非随机的, 当然也就不会是独立的. 可是, 如我们将要看到的, 当系统的运动足够混乱时, 随着时间 n 的增加, 函数 $\phi \circ f^n$ 将与原来的函数 ϕ 相关性越来越小, 进而这个序列有着随机序列的很多重要特征.

4 动力系统的遍历性质

本节介绍的是关于光滑动力系统的遍历性质, 有时也被看作属于光滑遍历理论的内容.

4.1 一致和非一致双曲系统及部分双曲系统

上节提到, 序列 $\{\phi \circ f^n\}$ 的随机性来源于系统的运动的紊动性. 这里介绍动力系统统计理论方面研究中涉及比较多的一些具有紊动性质的系统.

4.1.1 一致双曲系统

流形上的一个子集 $\Lambda \subset M$ 称为不变的, 如果 $f(\Lambda) = \Lambda$.

定义 1 设 Λ 为 f 的一个闭不变子集. 如果存在切空间中的一个分解

$$T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$$

以及常数 $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, 使得对所有 $x \in \Lambda$, $n > 0$, 有

$$(i) \|Df^n v\| \geq C\lambda^{-n}\|v\|, \forall v \in E_x^u;$$

$$(ii) \|Df^n v\| \leq C\lambda^n\|v\|, \forall v \in E_x^s,$$

那么称 f 在 Λ 上是双曲的. 这时对每个 $x \in \Lambda$, E_x^u 和 E_x^s 分别称为 x 处的不稳定和稳定子空间.

如果微分同胚 f 在整个流形 M 上都是双曲的, 则称 f 为 Anosov 微分同胚. 如果微分同胚 f 只是在它的非游荡集上都是双曲的, 且在非游荡集上 f 的周期点稠密, 则称 f 满足公理 A. 如果微分同胚 f 满足公理 A, 那么它的非游荡集可以分解为有限个互不相交的不变子集的并 $\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$, 而且 f 在每个 Λ_i 上都是拓扑传递的, 即 f 在 Λ_i 上有稠密轨道. 这些子集 Λ_i , 称为 f 的基本集.

流形上的一个闭子集 $\Lambda \subset M$ 称为吸引子, 如果存在 Λ 的一个开邻域 U 使得 $\bigcup_{n>0} f^n U = \Lambda$. 流形上所有满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n x, \Lambda) = 0$ 的点 x 的集合, 称为 Λ 的盆. 显然, 根据定义 1, 集合 U 属于 Λ 的盆. 在吸引子的定义中, 有时也会放松对 U 开性的要求, 代之以条件 “ $U \setminus \Lambda$ 具有正的 Lebesgue 测度”. 已经知道, 对于公理 A 系统, 流形 M 上 Lebesgue 几乎每一点, 都趋向于某个吸引子 (参见文献 [3]).

在映射不可逆时, 相应的概念是双曲映射, 包括公理 A 映射和一致扩张映射. 钱敏先生和他的学生谢践生、朱澍对公理 A 映射的遍历性质有过系统的研究, 他们将公理 A 微分同胚遍历理论的一系列结果推广到了公理 A 映射, 其中包含 SRB 测度的存在性、熵公式、Ledrappier-Young 公式和 Eckmann-Ruelle 猜测的证明 (参见文献 [4]). 由于在映射情形, 不稳定流形不是唯一的, 而光滑系统的遍历性依赖于不稳定流形, 这些工作难度很高而且处理起来非常复杂. 扩张映射是双曲情形下压缩方向退化后的情况. 因为没有压缩方向, 这类映射的分析, 复杂度则会低一些.

4.1.2 非一致双曲系统

非一致双曲性的给出, 需要用到 Lyapunov 指数的概念. 其定义如下:

定义 2 设 f 为流形 M 上的 C^1 映射. 对 $x \in M, v \in T_x M$, 如果极限

$$\chi(v, x, f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n v\| \quad (4.1)$$

存在, 则称为向量 v 在 $x \in M$ 处的 Lyapunov 指数.

Lyapunov 指数给出了在导算子 Df 的迭代作用下向量长度的对数的“平均增长率”. 事实上, 如果向量 v 有 Lyapunov 指数 λ_x , 则向量 $Df^n v$ 的长度与 $e^{n\lambda_x}$ 同阶.

由 (4.1) 给出的量, 最先由 Liao [5] 于 1963 年在研究微分动力系统的遍历性质中定义并使用. Oseledec [6] 后来证明, 对任何不变测度 μ , 在流形 M 上几乎每一点 x 处, 对每个切向量 $v \in T_x M$, (4.1) 中的极限都存在. 这个极限被称为 Lyapunov 指数. 根据定义 2 可以容易地推得, 在每一点处, 切空间中向量的所有不同的 Lyapunov 指数的个数 $s(x)$, 不大于切空间的维数, 也即流形的维数.

设 Λ 是微分同胚 f 的一个不变集, μ 是 f 的一个不变测度使得 $\mu(\Lambda) = 1$. 如果对 μ 几乎每个 x 处都没有零 Lyapunov 指数, 则称 f 对于 (Λ, μ) 是非一致双曲的.

显然, 根据定义 2, 一致双曲的系统都是非一致双曲的.

一致双曲系统被认为是典型的混沌系统, 具有一切混沌方面的特征. 非一致双曲系统, 依情况不同, 具有程度不同的混沌性质.

4.1.3 部分双曲系统

部分双曲系统与双曲系统不同的是, 它还有中心方向. 这时, 切空间分解成三个子丛的直和: $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$, 其中 E^c 是中心方向. Df 在 E^c 上也容许压缩和扩张, 但是要弱于在 E^s 上的压缩性和在 E^u 上的扩张性. 这里的“弱于”, 可以是一致的, 也可以是逐点的 (参见文献 [7, 8]).

有时也将中心方向和稳定或者不稳定方向合并处理, 这时有 $TM = E^s \oplus E^{cu}$ 或者 $TM = E^{sc} \oplus E^u$. 这时的双曲条件也常常用控制分解, 或者用沿轨道平均压缩率或者扩张率为条件 (参见文献 [9, 10]).

4.1.4 稳定流形与不稳定流形

如果 f 在一个不变集 Λ 上是双曲的, 那么根据定义 1, 稳定子空间中的向量在 Df 的迭代作用下, 以及不稳定子空间中的向量在 Df^{-1} 的迭代作用下, 均以指数速度趋向于零. 这种现象在流形上也有反映, 起类似作用的是稳定和不稳定流形.

定义 3 如果 Λ 是 f 一个双曲不变集, 则对任何 $x \in \Lambda$, 集合

$$\begin{aligned} W_\epsilon^s(x) &:= \{y \in M : d(f^n x, f^n y) \leq \epsilon, \forall n > 0\}, \\ W_\epsilon^u(x) &:= \{y \in M : d(f^{-n} x, f^{-n} y) \leq \epsilon, \forall n > 0\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

分别称为点 x 处的局部稳定流形和局部不稳定流形, 这里 $\epsilon > 0$ 是一个小的正数.

对于非一致双曲系统, 几乎每一点也都有稳定和不稳定流形. 但是局部稳定流形的尺寸与该点处的双曲性有关, 从而不是一致的.

$W_\epsilon^s(x)$ 和 $W_\epsilon^u(x)$ 都是 M 的 C^r 嵌入子流形, 维数分别与 E_x^s 和 E_x^u 的维数相同. 而且, 如果 $y \in W_\epsilon^u(x)$, 则存在 $C > 0$ 使得对任何 $n > 0$, 有 $d(f^{-n}x, f^{-n}y) \leq C\lambda^n$. 对稳定流形, 将 f^{-n} 改为 f^n 后, 也有同样的结论. 以此可以看出, f 在不稳定流形上是扩张的. 当相空间紧致时, 这种扩张导致相空间挤压和折叠, 从而出现紊动.

集合 $W^s(x) := \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}W_\epsilon^s(f^n x)$ 和 $W^u(x) := \bigcup_{n \geq 0} f^n W_\epsilon^u(f^{-n}x)$ 分别称为点 x 处的 (整体) 稳定和不稳定流形. 它们是 M 的浸入子流形. 容易看出, 它们与 ϵ 的选取无关.

4.2 不变测度

研究动力系统的统计性质, 需要利用不变测度. 对于给定的动力系统, 是否存在“好的”不变测度, 是这一方向的重要问题之一.

4.2.1 物理上可观察的测度

用测度的方法研究动力系统所得到的结果只是在一个测度为 1 的集合中的点成立. 对于保守系统, 如 Hamilton 系统, 体积测度是不变测度. 在这种情况下, 所得结果对 Lebesgue 几乎每点都成立. 如果不变测度是对体积测度绝对连续的, 则所得结果对一个 Lebesgue 正测集上的点成立. 但是更为常见的是耗散系统. 这时不变测度往往与 Lebesgue 测度是相互奇异的. 例如, 如果这个测度是支撑在周期轨道上的, 那么所得到的结论可能只在这条周期轨道上的点上成立.

Sinai^[11] 于 1972 年发现, 对任何 Anosov 微分同胚 f , 存在一个 f 不变的测度 μ , 使得对定义于流形上的任何连续函数 ϕ , 集合

$$B = B_\phi := \left\{ x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i x) = \int \phi d\mu \right\} \quad (4.3)$$

具有正的 Lebesgue 测度. 因为连续函数所成的空间是可分的, 用逼近的方法容易知道, B 可以取得与函数 ϕ 无关.

一个测度 μ 可由它对连续函数的积分, 也即对所有连续函数 ϕ 的空间平均 $\{\int \phi d\mu : \phi \in \mathcal{C}(M)\}$ 给出. 因为 $\int \phi d\mu$ 也难以观察, 所以在实验中常借助于它的时间平均 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i x)$. 如果测度是遍历的, 那么时间平均就等于空间平均. 理论上, 如果集合 B 有正的 Lebesgue 测度, 那么就有一个正的概率 $\mu(B)$ 取到一个点 x , 使得沿着这个点, 函数 ϕ 的时间平均等于它的空间平均. 在这个意义上, μ 称为物理上可观察的测度, 或者简称物理测度.

4.2.2 SRB 测度

Sinai 于 1972 年发现, 上述意义下的物理测度在 Anosov 微分同胚中存在. 这个结果后来由 Ruelle 和 Bowen 推广到公理 A 微分同胚和流 (参见文献 [12,13]). 这样的测度也因之称为 Sinai-Ruelle-Bowen 测度, 或者 SRB 测度. 其特征是, 它具有关于不稳定流形上的绝对连续条件测度. 下面给出 SRB 测度的定义.

我们提到, 经过一点的不稳定流形是一个浸入子流形. 假设 μ 是一个不变测度, 且关于这个测度几乎每点都有正的 Lyapunov 指数. 从而几乎每点都有不稳定流形. 我们称流形 M 上的一个可测分割 η

是从属于不稳定流形的, 如果这个分割是可测的, 且对 μ 几乎每一个 x , 分割 η 中包含 x 的元素 $\eta(x)$ 是 $W^u(x)$ 的子集且 $\eta(x)$ 包含 x 在 $W^u(x)$ 中的一个小邻域.

由概率论知, 给定一个分割 η , 测度 μ 决定一族条件测度 $\{\mu_x^\eta\}$, 使得对几乎每一个 x , $(\eta(x), \mathcal{B} \cap \eta(x), \mu_x^\eta)$ 成为一个概率空间.

定义 4 设 μ 为流形 M 上的 f 不变测度. 如果

(i) μ 几乎每点处都有正的 Lyapunov 指数;

(ii) μ 在不稳定流形上有关于其上的 Lebesgue 测度绝对连续的条件测度,

则称 μ 为 Sinai-Ruelle-Bowen 测度, 或者 SRB 测度.

由定义 4(i) 可知, 系统有正的 Lyapunov 指数, 从而有不稳定流形. 定义的关键部分在定义 4(ii). 如果我们以 m_x^u 表示限制于不稳定流形 W_x^u 上的 Lebesgue 测度, 那么定义 4(ii) 表明, 对几乎每一个 x , $\mu_x^\eta \ll m_x^u$.

可以证明, 当 $r > 1$ 时, C^r 一致或者非一致双曲微分同胚所成系统中的 SRB 测度, 都是物理测度.

非一致双曲系统中是否存在 SRB 测度, 或其他物理测度, 往往是一个困难的问题. Hu 和 Young^[14] 曾经构造出不存在 SRB 测度的非一致双曲系统. 直到 20 世纪 90 年代, 才出现第一个正面的非平凡例子. Benedicks 和 Young^[15] 证明了某些 Hénon 映射容许 SRB 测度. 接着, 在几乎双曲映射, 有控制分解的部分双曲映射中 SRB 测度的存在性也得到证明 (参见文献 [9, 16]). 20 世纪 90 年代末, Young^[17, 18] 提出了构造 SRB 测度和研究相关衰减的塔形方法. 以此为工具, 可以得到更多的具有 SRB 测度的非一致双曲系统.

不可逆系统中 SRB 测度的存在性及其性质, 钱敏先生和他的学生朱澍、蒋达权等进行过系统的研究. 由于不稳定流形的不唯一性, 他们将 SRB 测度定义在逆极限空间上. 这样定义的 SRB 测度, 仍然具有与同胚情形下相应的性质. 例如, 熵公式成立的充要条件是, 该测度为在这种意义下的 SRB 测度 (参见文献 [4, 19, 20]).

4.2.3 平衡态

平衡态是比 SRB 测度更广泛的一类测度.

对定义于 M 上的实值函数 ψ , 它的平衡态是指所有取得如下上确界的测度:

$$P(\psi, f) = \sup \left\{ h_\nu(f) + \int \psi d\nu : \nu \in \mathcal{M}(M) \right\},$$

这里 $P(\psi, f)$ 是函数 ψ 的拓扑压, $h_\nu(f)$ 是映射 f 关于测度 ν 的测度熵 (关于它们的定义, 参见文献 [21] 的相关章节). 这时函数 ψ 常称为位势函数.

因为映射 $\nu \rightarrow \int \psi d\nu$ 对 ν 是连续的, 所以, 如果映射 $\nu \rightarrow h_\nu(f)$ 是上半连续的, 则对任意连续位势函数 ψ , 平衡态存在. f 是一致双曲时就属于这种情况.

通常, SRB 测度是函数 $\psi = -\log |\det Df|_{E^u}|$ 的平衡态.

本文余下部分, 如无特别说明, 我们所说的平衡态都是位势函数为 Hölder 连续函数时的平衡态.

4.3 紊动性

本节介绍有关运动混乱的一些概念.

4.3.1 遍历与混合

设 $(S, \mathcal{B}, \nu)$ 为测度空间, T 是其上的保测变换, 就是说, 对任何可测集 $A \in \mathcal{B}$, 有 $T^{-1}A \in \mathcal{B}$ 且 $\nu(T^{-1}A) = \nu(A)$. 如果对任何可测集 A , 条件 $\nu(A \Delta T^{-1}A) = 0$ 蕴含 $\mu A = 0$ 或者 $\mu A = 1$, 那么称 T 关于 ν 是遍历的, 或者 ν 是 T 的遍历测度, 这里 Δ 表示对称差. 遍历性表示系统的在测度意义下的不可分割性. 也就是说, 这个系统不能分解成两个具有正测度的不变子系统.

设 T 是测度空间 $(S, \mathcal{B}, \nu)$ 上的一个保测变换. 如果对任意可测集 $A, B \in \mathcal{B}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\nu(T^{-n}A \cap B) \rightarrow \nu(A)\nu(B),$$

则称 T 是混合的, 或者说 ν 是 T 的混合测度. 不难看出, 混合测度一定是遍历的. 也容易证明, ν 是 T 的遍历测度, 当且仅当对 S 上的任何可测函数 $\phi, \phi \circ T = \phi$ 几乎处处成立蕴含 ϕ 几乎处处等于常数. 这也等价于对任何 $\phi, \psi \in L^2(\nu)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int (\phi \circ T^i) \psi d\nu = \int \phi d\nu \int \psi d\nu.$$

而 ν 是 T 的混合测度, 则等价于对任何 $\phi, \psi \in L^2(\nu)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi \circ T^n) \psi d\nu = \int \phi d\nu \int \psi d\nu. \quad (4.4)$$

4.3.2 相关衰减

对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上的两个随机变量 X 和 Y , 它们的相关系数定义为

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\mu[(X - \mu(X))(Y - \mu(Y))]}{\sqrt{\mu[(X - \mu(X))^2]} \sqrt{\mu[(Y - \mu(Y))^2]}}.$$

它的取值介于 -1 与 1 之间. 当 $|\text{Cor}(X, Y)| = 1$ 时, X 和 Y 为完全相关, 这时一个可以表为另一个的线性函数. 当 $\text{Cor}(X, Y) = 0$ 时, X 和 Y 不相关. 特别地, 当 X 和 Y 为相互独立的随机变量时, 它们不相关.

动力系统的相空间 M 上任意函数 ϕ 随系统演化时, 它成为 $\phi \circ f$. 因为系统的运动是决定性的, 所以, 一般 ϕ 与 $\phi \circ f$ 相关系数不会为 0. 但是, 如果我们让函数随系统继续演化, 而且系统的运动足够混乱, 那么当时间 n 趋于无穷时, ϕ 和 $\phi \circ f^n$ 的相关系数就会趋于零. 相关衰减问题所关心的就是它们趋于零的速度, 通常以考虑它的分子趋于零的速度代替. 也就是说, 相关衰减问题关心的是, 在两个特定函数空间 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 中, 取 $\phi \in \mathcal{F}, \psi \in \mathcal{G}$, 下述协方差趋于零的速度:

$$\text{Cov}(\phi \circ f^n, \psi) = \int (\phi \circ f^n - \mu(\phi))(\psi - \mu(\psi)) d\mu = \int (\phi \circ f^n) \psi d\mu - \int \phi d\mu \int \psi d\mu.$$

对比 (4.4) 可知, 这个量趋于零, 当且仅当对于 μ, f 是混合的. 因此, 相关衰减趋于零的速度, 可以看作是系统混合的速度.

不过, 已经知道, 对于一般的 $L^2(\mu)$ 函数, 即便在双曲系统中, 相关衰减的速度也可以任意慢. 因此, 在动力系统统计性质的研究中, 常常对可观察函数加上一定的正则性条件, 如可微, 或者 Hölder 连续等.

对动力系统 (f, μ) 及定义于相空间上的函数空间 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$, 如果存在常数 $\tau \in (0, 1)$ 使得对任何函数 $\phi \in \mathcal{F}$ 和 $\psi \in \mathcal{G}$, 存在常数 $C = C(\phi, \psi)$ 满足

$$|\text{Cov}(\phi \circ f^n, \psi)| \leq C\tau^n, \quad \forall n > 0,$$

则称这个系统有指数的相关衰减. 注意这里常数 τ 只与系统和函数空间有关, 而与函数的选取无关.

如果流形 M 上的微分同胚 f 是双曲的, μ 是它的平衡态, 如 SRB 测度, 则对所有定义于 M 上的 Hölder 连续函数, 相关衰减是指数的. 这个结果为 Ruelle 所证明 (参见文献 [12]). 后来, 指数相关衰减也在一些非一致双曲系统中被证明, 例如, 区间上的二次映射、平面上的 Hénon 映射等 (参见文献 [22, 23]).

是否存在收敛速度慢于指数的相关衰减, 曾经也是一个问题. 这个问题后来得到肯定的回答. 20 世纪 90 年代后期已经知道, 分段光滑且除一中性不动点之外处处扩张的区间映射有多项式的相关衰减 (参见文献 [17, 24, 25]). 某些高维上的类似映射也有相同的结果 (参见文献 [26]). 对于可逆情形, 多项式的相关衰减也在一些台球 (billiard) 系统和几乎 Anosov 系统中得到证明 (参见文献 [27]). 后者是可逆且光滑, 无奇点的系统.

相关衰减速度的研究至今仍然是动力系统统计理论这一领域里非常活跃的研究课题. 有很多新的方法被提出来. 但是也有很多未解决的问题. 特别地, 混合的 Anosov 流是否有指数相关衰减是一个有近 40 年历史的重要问题. 目前有了一些漂亮的部分结果 (参见文献 [28–30]), 但是这个问题仍然没有得到最后解决.

5 动力系统中的概率定理

5.1 大数定理与遍历定理

大数定理是概率论里最为基本的定理, 它有多种不同的陈述. 最常见的是, 如果 $\{X_n\}$ 是概率空间 $(X, \mathcal{B}, \nu)$ 上的一个独立同分布的随机变量序列, 那么,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{\mu},$$

这里 $\bar{\mu} := \mu(X_i)$ 是 X_i 的期望, 且对任意 i 这一值相同. 弱大数定理说这一收敛是依概率的, 而强大数定理则说这一收敛也是几乎处处收敛的. 因为同分布和独立的条件都可以适当放松, 大数定律也就有各种不同的版本.

在动力系统中, 相应的结果称为遍历定理. 这时只需要系统中的不变测度 μ 是遍历的.

当测度 μ 关于系统的映射 f 是遍历的时, 由遍历定理知, 对任何 $L^1(\mu)$ 函数 ϕ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i x) = \mu(\phi),$$

上述收敛为几乎处处或者在 $L^p(\mu)$ 中, 这里 $\mu(\phi) := \int \phi d\mu$ 是函数 ϕ 的平均值. 几乎处处收敛的情形称为 Birkhoff 遍历定理, L^p 收敛的情形称为 Von Neumann 遍历定理. 这两个定理在 20 世纪 30 年代初就已得到 (参见文献 [21] 及其所附的文献).

当 μ 不是遍历测度时, 把 $\mu(\phi)$ 换成序列的几乎处处收敛的极限值

$$\phi^*(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i x),$$

这两个定理也成立. 而在遍历情形, $\phi^*(x) = \mu(\phi)$ 几乎处处成立. 我们可以看出, 前者实际上就是关于函数列 $\{\phi(f^n x)\}$ 的强大数定理. 因为当此函数列为同分布时, 不难证明依测度收敛与 $L^p(\mu)$ 收敛等价, 所以, 后一定理给出了弱大数定理.

5.2 中心极限定理

中心极限定理在概率论中可以说是仅次于大数定律的基本定理. 比起大数定律, 中心极限定理则更为精细, 它给出部分和 $\sum_{i=1}^n X_i$ 与 $n\bar{\mu}$ 的差的分布. 下面介绍的结果称为 Lindeberg-Levy 中心极限定理.

定理 1 设 $\{X_i\}$ 为独立同分布的随机变量序列, 且具有有限的数学期望 $\bar{\mu} := E(X_1)$ 和方差 $\sigma^2 := D(X_1) \neq 0$, 则在依分布的意义下,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\bar{\mu} \right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (5.1)$$

这里 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 表示期望为 0、方差为 σ^2 的正态分布. 这个式子也可以表达为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\bar{\mu} \right) < x \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

定理 1 中独立和同分布的条件可以适当放宽, 从而可以得到各种不同条件下的中心极限定理. 也因为如此, 在动力系统中, 对于一般的可观察函数 ϕ , 虽然序列 $\{\phi \circ f^n\}$ 不是独立的, 对一些具有紊动性的系统, 中心极限定理仍然可能成立.

定义 5 在系统 (f, μ) 中, 如果序列 $\{\phi \circ f^n\}$ 满足中心极限定理, 即当以 $\phi \circ f^{i-1}$ 代替 X_i 时, (5.1) 成立, 则称函数 ϕ 满足中心极限定理.

因为毕竟函数列 $\{\phi \circ f^n\}$ 是由一个决定性的映射生成的, 我们需要排除一类特殊情况.

定义 6 对相空间上定义的函数 ϕ , 如果存在相空间上的可测函数 u 和常数 c 使得

$$\phi(x) = c + u(x) - u(f(x))$$

几乎处处成立, 则称 ϕ 是关于系统 (f, μ) 的上边缘.

显然, 如果 ϕ 是上边缘, 则 $\sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x)) = nc + u(x) - u(f^n(x))$, 从而中心极限定理不可能成立. 动力系统中心极限定理最早的结果是关于双曲系统的平衡态的 (参见文献 [3, 31]).

定理 2 设 Λ 为 f 的双曲不变集, μ 为某 Hölder 连续函数为位势的平衡态, 则对任何 M 上的 Hölder 连续函数 ϕ , 只要不是关于该系统的上边缘, 就会满足中心极限定理.

而中心极限定理对于动力系统成立的更为一般的条件由 Liverani [30] 于 1996 年提出 (也可参见文献 [18]), 其中最重要的一个条件就是函数 ϕ 满足 $\sum_{n=0}^{\infty} |\text{Cov}(\phi \circ f^n, \phi)| < \infty$, 也就是说, 系统要有较快的相关衰减速度. 因此, 第 4.3.2 小节中提到的相应的一致或非一致双曲系统, 如果相关系数衰减的速度是指数的, 或者是多项式且速度快于 $1/n^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, 那么相空间上的 Hölder 连续函数, 若不是上边缘, 则满足中心极限定理.

5.3 重对数律

如果随机变量列 $\{X_n\}$ 满足中心极限定理, 则 $\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{i=1}^n X_i - n\bar{\mu})$ 趋于方差为 σ^2 的正态分布. 重对数律则是指 $\{X_n\}$ 的部分和满足如下的上下极限关系:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\bar{\mu}}{\sqrt{2n\sigma^2 \log \log(\sigma n)}} = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\bar{\mu}}{\sqrt{2n\sigma^2 \log \log(\sigma n)}} = -1.$$

自然地, 独立同分布的随机变量列满足重对数律. 如同中心极限定理一样, 独立和同分布的条件也是可以适当放宽的.

重对数律可以从第 5.6 小节中将要介绍的几乎确定不变性原理得到. 因此, 定义于动力系统相空间上的可观察函数 ϕ 所生成的序列 $\{\phi \circ f^n\}$, 如果满足几乎确定不变性原理, 则也满足重对数律.

5.4 大偏差原理

大偏差有多种不同的提法, 这里采用文献 [32] 中的定义.

设 $\mathcal{S}$ 为度量空间, $I: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ 为下半连续函数, $\{r_n\}$ 为趋于无穷的实数序列, $\{\nu_n\}$ 为 $\mathcal{S}$ 上的概率测度序列. 如果

(i) 对任意闭集 $F \subset \mathcal{S}$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \nu_n(F) \leq - \inf_{s \in F} I(s);$$

(ii) 对任意开集 $G \subset \mathcal{S}$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \nu_n(G) \geq - \inf_{s \in G} I(s),$$

则称 $\{\nu_n\}$ 服从具有速率函数 I 和正规化因子 r_n 的大偏差原理.

考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 上随机变量序列 $\{X_n\}$ 的部分和的平均值的大偏差时, 常取 $S = \mathbb{R}$, $r_n = n$. 这时, 对任意可测集 $F \subset \mathbb{R}$, 可定义

$$\nu_n(F) = \mu\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \in F\right).$$

也就是说, ν_n 由 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 关于测度 μ 的分布给出. 这时, 如果 $\{\nu_n\}$ 服从大偏差原理, 那么我们也称 μ 服从大偏差原理. 已经知道, 在对 $\{X_n\}$ 较为宽松的条件下, μ 服从大偏差原理. 特别地, 当 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列时, 由 Cramér 定理可以得到速率函数 $I(s) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta s - \log E[e^{\theta X}]\}$, 这里 X 是与 X_i 同分布的任意随机变量.

在动力系统中, 对于连续函数 ϕ , 如果取 $\{\phi \circ f^n\}$ 为函数列, 考虑其前 n 项的平均 $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^{i-1}$. Young^[33] 证明了公理 A 映射的吸引子上的 SRB 测度 μ 服从大偏差原理, 且速率函数可由

$$I(s) = - \sup \left\{ h_\nu(f) - \lambda_\nu : \nu \in \mathcal{M}(M), \int \phi d\nu = s \right\}$$

给出, 这里 $h_\nu(f)$ 是 f 关于测度 ν 的测度熵, λ_ν 为正 Lyapunov 指数的积分. 钱先生及其弟子刘培东、赵阳证明了关于公理 A 映射的大偏差原理, 得到了类似的结果 (参见文献 [34]). 一些非一致扩张系统和非一致双曲系统中的 SRB 测度和平衡态也服从大偏差原理, 有关参考文献, 可在引用过文献 [33] 的诸多文献中查到. 国内学者 Qian 等^[35] 得到了非一致双曲系统中周期轨道上测度的大偏差性质.

大数定律给出的是, 随机变量序列 $\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n\}$ 几乎处处收敛于它们的公共期望 $\bar{\mu}$. 大偏差原理则给出, 在任意不包含 $\bar{\mu}$ 的闭区间 I 上, 测度 $\mu\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n \in I\}$ 依指数速度趋于零. 而当 I 是开区间时, 这一收敛于零的速度也不快于某个指数函数.

5.5 局部极限定理

大偏差原理给出的是随机变量列 X_n 部分和的平均 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n$ 取值于任何给定的不包含 X_n 的期望值的闭集的概率, 依指数速度趋于零. 局部极限定理则是描述部分和 $\sum_{i=1}^n X_n$ 取值于某些特定区间上的概率测度. 这里采用文献 [36] 中所使用的表述:

对于随机过程 $\{X_n\}$, 如果存在实数序列 $\{a_n\}$ 和趋于无穷的正数序列 $\{b_n\}$, 使得对任何实数序列 $\{k_n\}$, 对任何有界区间 $I \subset \mathbb{R}$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n - a_n}{b_n} =: \kappa$ 存在蕴含

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n P\left(\sum_{i=1}^n X_n \in k_n + I\right) = g(\kappa)|I|,$$

则称 x_n 满足局部极限定理, 这里 $|I|$ 表示区间 I 的长度, 而 g 是某个分布的密度函数.

当 $\{X_n\}$ 为独立同分布随机变量列时, 对任何实数序列 $\{k_n\}$, 如果它满足关系式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n - n\bar{\mu}}{\sqrt{n}} =: \kappa,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma \sqrt{2\pi n} P\left(\sum_{i=1}^n X_n \in k_n + I\right) = |I|e^{-\kappa^2/2\sigma^2}.$$

对于一致双曲系统, 如果 μ 是 Hölder 函数的平衡态, 则对 Hölder 连续的可观察函数 ϕ , 将 X_n 换成 $\phi \circ f^{n-1}$ 时, 同样的结果仍然成立. 这个结果也被推广到一些非一致扩张系统以及由驱动为非一致扩张、纤维上为圆周上旋转的斜积系统 (参见文献 [37, 38]).

5.6 几乎确定不变性原理

几乎确定不变性原理, 也称为 Brown 运动逼近, 指独立同分布的随机变量列的部分和, 可以用 Brown 运动依分布逼近.

对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上的随机变量序列 $\{X_n\}$, 如果存在概率空间 $(\Omega', \mathcal{B}', P')$ 上的随机过程 $\{Y_n\}$ 和 Brown 运动 $\{W_t\}$, 以及实数序列 $\{r_n\}$, 满足如下条件:

- (i) $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 有相同的分布;
- (ii) $|\sum_{i=1}^n Y_i - W_n| = r_n$ 几乎处处成立;
- (iii) 存在 $\gamma \in (0, 1/2]$ 使得 $r_n = o(n^\gamma)$,

则称 $\{X_n\}$ 满足几乎确定不变原理.

独立同分布的随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足几乎确定不变原理, 且 $r_n = O((n \log \log n)^{1/4} (\log n)^{1/2})$ (参见文献 [39]).

在动力系统中, 如果 f 是双曲的, μ 是某 Hölder 连续函数的平衡态, 则对 Hölder 连续的可观察函数 ϕ , 序列 $\{\phi \circ f^n\}$ 服从几乎确定不变原理, 且存在 $\delta > 0$ 使得误差项 $r(n)$ 的阶为 $O(n^{\frac{1}{2}-\delta})$ (参见文献 [40]). 这个结果对某些具有绝对连续不变测度的非一致扩展系统, 以及某些弹球系统也都成立, 且误差项的阶也是 $O(n^{\frac{1}{2}-\delta})$ (参见文献 [41]).

不难推出, 几乎确定不变原理蕴含中心极限定理和重对数律.

5.7 其他概率现象

5.7.1 Borel-Cantelli 引理

对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, Borel-Cantelli 引理的陈述分为两部分. 前一部分为, 若一系列集合 $\{B_n\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty,$$

则 $P(\omega \in B_n \text{ i.o.}) = 0$, 这里 i.o. 是 infinitely often 的缩写, 表示 ω 属于无穷多个 B_n . 后一部分需要加上集合 $\{B_n\}$ 互相独立的条件. 这时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$$

蕴含

$$P(\omega \in B_n \text{ i.o.}) = 1.$$

在动力系统中, Borel-Cantelli 引理的研究考虑的是集合 $\{x \in M : f^n(x) \in B_n \text{ i.o.}\}$ 的测度. 如果集合序列 $\{B_n\}$ 满足

$$\mu\{x \in M : f^n(x) \in B_n \text{ i.o.}\} = 1,$$

则称 $\{B_n\}$ 为 BC (Borel-Cantelli) 列. 对一维的扩张和一些非一致扩张的系统, 以及二维一致双曲系统, 只要 $\{\mu(B_n)\}$ 不可和, $\{B_n\}$ 就是 BC 列 (参见文献 [42, 43]). 在高维情形, 则常有集合 B_n 的形状接近于球的要求. 特别地, 在一致部分双曲系统中, 如果不变测度具有光滑密度函数, 那么体积不可和的球所成的序列 $\{B_n\}$ 都为 BC 列 (参见文献 [44]).

5.7.2 进入与返回时间的 Poisson 分布

设动力系统 (M, f) 上有概率测度 μ . 取 $B \subset M$. 令 $\zeta_B^r(x)$ 表示点 x 的轨道第 r 次进入集合 B 的时间, 或者从集合 B 出发的点 x 的轨道第 r 次返回集合 B 的时间. 当 $r = 1$ 时, 这个时间也称为首次进入时间或者击中时间.

因为 f 是确定的, 分布 $F_B^k(t) := \mu\{\zeta_B^k < t\}$ 似乎不应显示出随机性来. 注意到当 B 的测度趋于零时, $\zeta_B^k(x)$ 的均值会趋于无穷. 如果系统的长期行为更能体现出概率规律, 那么对参数 t 重整后, 极限分布也应表现出随机性.

事实上, 对于一些具有较快相关衰减速度的动力系统, 如果选取适当的测度趋于零的单调下降集合序列 B_n , 且将 t 用 $t/\mu(B_n)$ 代替, 则其分布趋于 Poisson 分布. 更具体地, 如果取 $\mathcal{N}_n^r(t)$ 为在时间 $[1, t/\mu(B_n)]$ 内其轨道进入 B_n 恰好 r 次的点的集合, 则我们可以期望当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\mu(\mathcal{N}_n^r(t)) \rightarrow \frac{t^r}{r!} e^{-t}.$$

例如, 对公理 A 系统的基本集, 当测度 μ 为某 Hölder 连续函数的平衡态时, 如果 $B_n = B_n(x)$ 取为由对应的符号系统决定的长为 n 的包含点 x 的柱集, 那么这个结论对几乎所有 x 成立 (参见文献 [45]). 如果取 $B_n(x)$ 为 Bowen 球, 那么在对时间的重整稍加调整后也有类似结论.

5.7.3 极值理论

极值理论与首次进入问题紧密相关. 对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上的随机变量序列 $\{X_n\}$, 取

$$M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

极值理论关心的是, 在对 $\{M_n\}$ 用系数 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ ($a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$) 作适当的缩放和平移之后, 所得到的分布序列的极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n(M_n - b_n) \leq x) =: G(x).$$

当 $\{X_n\}$ 为独立同分布序列时, 已知在非退化情形下, 极限分布 $G(x)$ 有三种类型.

考虑动力系统中由相空间上的可观察量 ϕ 生成的序列 $\{\phi \circ f^n\}$. 假设 ϕ 具有一定的正则性, 如 Lipschitz 连续, 那么在很多动力系统中上述分布序列的极限存在并且也具有三种对应的类型. 这些系统包括公理 A 系统、一些非一致双曲系统, 特别是扩张系统 (参见文献 [46]).

6 结论

从以上的现象可以看出, 确定性的动力系统, 如果具有一定的混乱性, 那么当系统演化的时间足够长时, 具有随机系统的各种特征. 在物理上, 很多系统的演变速度非常快. 例如, 在标准状况, 即一个大气压和摄氏零度的条件下, 一立方厘米体积中气体分子每秒中大约碰撞 10^{29} 次. 因此, 即便在微观上决定基本粒子以致原子和分子的运动规律是确定性的, 在人们经验所能感知的宏观尺度上, 所能观察到的现象也有可能服从概率和统计规律.

另一方面, 上面所说的数学结论, 大多都是对一致双曲系统和少数比较易于分析的非一致双曲系统, 以及极少数部分双曲系统做出的. 现实中的系统可能大多是部分双曲且双曲性是非一致的, 甚至常常会发生稳定方向和不稳定方向相切的情况, 如 Henon 映射. 对这些系统的分析非常困难. 它们的统计性质, 目前知道得很少. 因此, 要证明对更为一般的动力系统, 其长期行为也都具有概率性质, 还有很长的路要走.

参考文献

- 1 Laplace P S. Philosophical Essay on Probabilities. London: Chapman & Hall, 1902
- 2 Poincaré H J. The Foundations of Science: Science and Hypothesis, the Value of science, Science and Method. Lancaster: Science Press, 1946
- 3 Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lecture Notes in Mathematics, vol. 470. Berlin: Springer-Verlag, 1975
- 4 Qian M, Xie J S, Zhu S. Smooth Ergodic Theory for Endomorphisms. Lecture Notes in Mathematics, vol. 178. Berlin: Springer-Verlag, 2009
- 5 廖山涛. 紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质. 北京大学学报 (自然科学), 1963, 9: 241–265; 309–326, also in Qualitative Theory of Differentiable Dynamical Systems. Beijing: Science Press, 1996, 1–55
- 6 Oseledec I. A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Tr Mosk Mat Obs, 1968, 19: 179–210
- 7 Grayson M, Pugh C, Shub M. Stably ergodic diffeomorphisms. Ann of Math (2), 1994, 140: 295–329
- 8 Burns K, Wilkinson A. On the ergodicity of partially hyperbolic systems. Ann of Math (2), 2010, 171: 451–489
- 9 Alves J, Bonatti C, Viana M. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. Invent Math, 2000, 140: 351–398
- 10 Bonatti C, Viana M. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. Israel J Math, 2000, 115: 157–193

- 11 Sinai Y G. Gibbs measure in ergodic theory. *Russian Math Surveys*, 1972, 27: 21–69
- 12 Ruelle D. A measure associated with axiom-A attractors. *Amer J Math*, 1976, 98: 619–654
- 13 Bowen R, Ruelle D. The ergodic theory of Axiom A flows. *Invent Math*, 1975, 29: 181–202
- 14 Hu H, Young L S. Nonexistence of SBR measures for some diffeomorphisms that are “almost Anosov”. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1995, 15: 67–76
- 15 Benedicks M, Young L S. Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Henon maps. *Invent Math*, 1993, 112: 541–576
- 16 Hu H. Conditions for the existence of SBR measures for “almost Anosov” diffeomorphisms. *Trans Amer Math Soc*, 2000, 352: 2331–2367
- 17 Young L S. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. *Ann of Math (2)*, 1998, 147: 585–650
- 18 Young L S. Recurrence times and rates of mixing. *Israel J Math*, 1999, 110: 153–188
- 19 Jiang D Q, Qian M. Ergodic hyperbolic attractors of endomorphisms. *J Dyn Control Syst*, 2006, 12: 465–488
- 20 Qian M, Zhu S. SRB measures and Pesin’s entropy formula for endomorphisms. *Trans Amer Math Soc*, 2002, 354: 1453–1471
- 21 Walters P. *An Introduction to Ergodic Theory*. New York: Springer, 2000
- 22 Young L S. Decay of correlations for certain quadratic maps. *Comm Math Phys*, 1992, 146: 123–138
- 23 Benedicks M, Young L S. Markov extensions and decay of correlations for certain Henon maps. *Asterisque*, 2000, 261: 13–56
- 24 Hu H. Decay of correlations for piecewise smooth maps with indifferent fixed points. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2004, 24: 495–524
- 25 Sarig O. Subexponential decay of correlations. *Invent Math*, 2002, 150: 629–653
- 26 Hu H, Vaienti S. Lower bounds for the decay of correlations in non-uniformly expanding maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2017, doi: 10.1017/etds.2017.107
- 27 Hu H, Zhang X. Polynomial decay of correlations for almost Anosov diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2017, doi: 10.1017/etds.2017.45
- 28 Chernov N. Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows. *Ann of Math (2)*, 1998, 147: 269–324
- 29 Dolgopyat D. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann of Math (2)*, 1998, 147: 357–390
- 30 Liverani C. On contact Anosov flows. *Ann of Math (2)*, 2004, 159: 1275–1312
- 31 Ratner M. The central limit theorem for geodesic flows on n -dimensional manifolds of negative curvature. *Israel J Math*, 1973, 16: 181–197
- 32 Rassoul-Agha F, Seppäläinen T. *A Course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 162. Providence: Amer Math Soc, 2015
- 33 Young L S. Some large deviation results for dynamical systems. *Trans Amer Math Soc*, 1990, 318: 525–543
- 34 Liu P D, Qian M, Zhao Y. Large deviations in Axiom A endomorphisms. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2003, 133: 1379–1388
- 35 Qian S, Sun W, Tian X. Deviation property of periodic measures in C^1 non-uniformly hyperbolic systems with limit domination. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2012, 28: 1727–1740
- 36 Denker M, Koch S. Almost sure local limit theorems. *Statist Neerlandica*, 2002, 56: 143–151
- 37 Gouëzel S. Berry-Esseen theorem and local limit theorem for non uniformly expanding maps. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 2005, 41: 997–1024
- 38 Gouëzel S. Local limit theorem for nonuniformly partially hyperbolic skew-products and Farey sequences. *Duke Math J*, 2009, 147: 193–284
- 39 Strassen V. Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales. In: *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Contributions to Probability Theory, Part 1*. Berkeley: University of California Press, 1967, 315–343
- 40 Denker M, Philipp W. Approximation by Brownian motion for Gibbs measures and flows under a function. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1984, 4: 541–552
- 41 Melbourne I, Nicol M. Almost sure invariance principle for nonuniformly hyperbolic systems. *Comm Math Phys*, 2005, 260: 131–146
- 42 Gupta C, Nicol M, Ott W. A Borel-Cantelli lemma for nonuniformly expanding dynamical systems. *Nonlinearity*, 2010, 23: 1991–2008
- 43 Chernov N, Kleinbock, D. Dynamical Borel-Cantelli lemmas for Gibbs measures. *Israel J Math*, 2001, 122: 1–27
- 44 Dolgopyat D. Limit theorems for partially hyperbolic systems. *Trans Amer Math Soc*, 2004, 356: 1637–1689
- 45 Haydn N, Vaienti S. The limiting distribution and error terms for return times of dynamical systems. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2004, 10: 589–616
- 46 Freitas J. Extremal behaviour of chaotic dynamics. *Dyn Syst*, 2013, 28: 302–332

Stochastic phenomena in deterministic dynamical systems: Introduction to statistical properties of dynamical systems

HU Huyi

Abstract In this paper, we introduce some probability results in the study of statistical properties of dynamical systems. With the evolution of a dynamical system (M, f) , a function ϕ defined on the phase space M generates a process $\{\phi \circ f^n\}$. Even though it is given by a deterministic system, the process can exhibit many stochastic properties whenever the system is of certain chaotic behavior and the function ϕ is of some regularity. Such properties include the law of large number, the central limit theorem, the law of iterated logarithm, the principle of large deviations, local limit theorems, almost sure invariant principle, etc.

Keywords statistical properties of dynamical systems, hyperbolicity, physical measures, law of large number, central limit theorem, almost sure invariant principle

MSC(2010) 37A50, 37C40

doi: 10.1360/N012017-00209