中国科学: 数学　2015 年　第 45 卷　第 7 期: 873 ∼ 890
www.scichina.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
自然科学基金项目进展专栏　综　述

分解法在声波反散射问题中的最新进展

献给林群教授 80 华诞

刘晓东, 张波*

中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 北京 100190
E-mail: xdliu@amt.ac.cn, b.zhang@amt.ac.cn

收稿日期: 2014-11-05; 接受日期: 2015-03-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11101412, 61379093 和 91430102) 资助项目

摘要　本文旨在总结分解法在声波反散射问题中的最新进展, 其中包括经典的分解法如何应用于可穿透散射体和具有广义阻尼边界条件的复杂散射体情形, 以及分解法在处理混合型散射体、近场数据反演和避免内部特征值等情形的修正方法.

关键词　分解法　声波　反散射

MSC (2010) 主题分类　35P25, 35R30, 45Q05, 78A46

1　引言

声波反散射问题指的是利用测量数据反演散射体的位置和形状等信息. 这个问题在雷达和声呐探测、无损探伤、地球物理堪探以及医学成像等众多科学工程领域起着至关重要的作用. 然而, 声波反散射问题是一个典型的非线性不适定问题, 因此为其数值求解带来很多困难. 为了解决这个非线性问题, 一个经典的方法便是 (Newton 型) 迭代法. 由于其快速的收敛性, 该方法目前仍然是一种行之有效的数值算法. 但是, 迭代法的使用有很多制约因素, 如只有局部收敛性和对散射体物理性质 (联通分支数和边界条件等) 的先验依赖性. 更重要的是, 由于在每一次迭代过程中, 一般需要求解正问题, 因此, 迭代法一般都比较耗时. 为了避免不停地求解正问题, 数学家们提出了很多非迭代方法, 其中具有代表性的有两类: 分裂法 (decomposition methods) 和采样法 (sampling methods). 分裂法的代表有 Kirsch 和 Kress 的分裂法[1]、Colton 和 Monk 的对偶空间法 (dual space methods) [1] 和 Potthast 的点源法 (point source method) [2], 其主要思想是将原问题拆分为两步, 即首先利用测量数据构造散射场, 然后根据边界条件, 利用入射场和已构造的散射场寻找边界. 其中第一步是线性不适定的, 第二步是非线性适定的, 因此将原问题的两大难点 (非线性性和不适定性) 分裂开来. 值得注意的是, 分裂法在第二步中需要散射体的物理性质, 而这些信息往往在实际问题中是不可获知或很难给定的. 这一缺陷在采样法中得到了解决. 采样法的代表有 Ikehata 的探针法 (probe method) [3–5]、Potthast 的奇异源方法 (singular sources method) [2]、Colton 和 Kirsch 的线性采样方法 (linear sampling method) [6] 以及 Kirsch 的分解法 (factorization method) [7,8], 其基本想法是, 构造一个与测量数据相关的评价准则

英文引用格式: Liu X D, Zhang B. Recent progress on the factorization method for inverse acoustic scattering problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 873–890, doi: 10.1360/N012014-00238

来决定任一给定的点或线是否在未知散射体内, 因此不需要先验知道散射体的物理性质. 关于这些方法的具体内容和详细的比较可参见 Colton 和 Kress 的专著 [1], 或者一些综述性文献 [9–14].

分解法不仅在数值实现上具备了线性采样法的简单、快速、有效等特点, 而且在理论上同探针法一样给出了可作为充要条件的评价准则, 因此吸引了很多数学家的研究. 目前, 分解法已经推广应用到电磁波反散射、弹性波反散射和电阻抗断层成像 (electrical impedance tomography) 等很多重要的反问题中. 关于分解法的原始想法与直到 2008 年的研究状况, 我们推荐 Kirsch 和 Grinberg 在 2008 年的专著 [8]. 读者也可在综述性文献 [14, 15] 中分别了解直到 2011 年的关于分解法的研究状况和分解法在阻抗断层成像 (electric impedance tomography) 问题中的最新进展. 本文旨在总结分解法在声波反散射问题中的最新进展.

我们感兴趣的两类入射场 u^i 为平面波

$$u^i(x) = u^i(x,d) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad d \in S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

和点源

$$u^i(x) = \Phi(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{4} H_0^1(k|x-y|), & x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}, & x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y, \end{cases}$$

其中 $k = \omega/c$ 为波数, ω 表示入射频率, c 表示声波在背景介质中的速度, $d \in S^{n-1}$ 表示平面波的入射方向, y 表示点源的源点, H_0^1 是零阶的第一类 Hankel 函数. 记 D 为某个散射体, u^s 为入射场 u^i 被 D 散射而得到的散射场, 不妨假设背景介质是均匀的, 即波速 c 为常数, 那么, 散射场 u^s 在散射体外满足 Helmholtz 方程

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0, \quad 在\ \mathbb{R}^n \backslash \overline{D}\ 内. \tag{1.1}$$

为了获取满足物理意义的散射场, 我们一般假定散射场 u^s 在无穷远处满足 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - \mathrm{i}ku^s \right) = 0, \quad r = |x|, \tag{1.2}$$

这里, 极限对于所有方向 $\hat{x} = x/|x| \in S^{n-1}$ 一致成立,

$$\gamma_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}, & n = 3, \\ \dfrac{\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{4})}{\sqrt{8k\pi}}, & n = 2. \end{cases} \tag{1.3}$$

根据上述散射条件, 我们可以推出散射场 u^s 有如下形式的渐近表示:

$$u^s(x) = \gamma_n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r^{\frac{n-1}{2}}} \left\{ u^\infty(\hat{x}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right\}, \quad r = |x| \to \infty, \tag{1.4}$$

其中定义在单位球面 S^{n-1} 上的函数 $u^\infty(\hat{x})$ 称为散射场 u^s 的远场模式 (far-field pattern), $\hat{x} \in S^{n-1}$ 表示观察方向.

一般来讲, 对于平面波入射的情形, 我们把远场模式作为测量数据, 而对于点源入射的情形, 我们更多考虑近场作为测量数据. 记 M 为由测量数据定义的积分算子, 那么, 分解法这一名称便来源于如下形式的算子分解:

$$M = GTG^*, \tag{1.5}$$

其中两个算子 G 和 T 在不同的问题中有不同的定义, 这里 G^* 表示 G 的伴随算子. 对任意算子 $\mathcal{O}: U \to U$ (U 是一个 Hilbert 空间), 定义

$$\mathrm{Re}(\mathcal{O}) := \frac{\mathcal{O}+\mathcal{O}^*}{2}, \quad \mathrm{Im}(\mathcal{O}) := \frac{\mathcal{O}-\mathcal{O}^*}{2i}.$$

记 ϕ_z 为由采样点 z 和背景介质定义的试验函数. 分解法的第一个重要结果在于

$$\phi_z \in \mathscr{R}(G) \Leftrightarrow z \in D.$$

也就是说, 散射体的位置和形状可由算子 G 的值域来刻画. 然而, 算子 G 的定义往往与散射体的位置和形状有关, 因此, 算子 G 实际上也是未知的. 分解法的第二个重要结果在于借助于给定算子 M 来刻画算子 G 的值域. 下面的值域恒等 (rang identity) 定理 (参见文献 [8, 定理 2.15]) 在这个结果中起着极其重要的作用.

定理 1.1 (值域恒等定理)　记 U 是一个 Hilbert 空间, X 是一个自反的 Banach 空间, 假设 $X \subset U \subset X^*$ 并且这些嵌入是稠密的. 记 Y 是另外一个 Hilbert 空间. 如果 $M: Y \to Y$, $G: X \to Y$ 和 $T: X^* \to X$ 是使得分解式 (1.5) 成立的线性有界算子且下列假设成立,

(1) G 是紧算子并且其值域在 Y 中稠密;

(2) 存在 $t \in [0, 2\pi]$ 使得 $\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}T] := [\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}T + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}T)^*]/2$ 满足 $\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}T] = C + K$, 这里 K 是某个紧算子, $C: X^* \to X$ 是自伴随的强制算子, 即存在常数 $c > 0$ 使得对一切 $\phi \in X^*$,

$$\langle \phi, C\phi \rangle \geqslant c\|\phi\|^2;$$

(3) $\mathrm{Im}(T) := (T - T^*)/(2\mathrm{i})$ 在 $\mathscr{R}(G^*) \subset X^*$ 上非负, 即对一切 $\phi \in \mathscr{R}(G^*)$, 我们有 $\mathrm{Im}\langle \phi, T\phi \rangle \geqslant 0$;

(4) $\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}T]$ 是单射或者 $\mathrm{Im}(T)$ 在值域 $\mathscr{R}(G^*)$ 的闭包 $\overline{\mathscr{R}(G^*)}$ 上是正的,

那么,

$$\mathscr{R}(G) = \mathscr{R}(M_\sharp^{1/2}),$$

其中算子 $M_\sharp := |\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}M]| + \mathrm{Im}(M)$.

本文的安排如下: 第 2 至 4 节, 根据散射体 D 的不同, 分别给出分解法在可穿透散射体、广义阻尼边界条件和混合型散射体中的应用. 第 5 节考虑利用近场测量数据的分解法. 第 6 节探讨一种避免特征值的分解法. 对于所有的模型, 我们只给出 (经过修正的) 测量算子的分解, 对于各个算子的性质不再证明, 读者可参考相关的文献. 最后, 第 7 节总结本文内容并讨论未来可能的工作.

2　可穿透散射体

经典的声波反散射问题有两类, 一类是不可穿透散射体的反散射, 另一类是可穿透散射体的反散射. 对于第一类模型, 根据散射体的物理性质, 有三种基本边界条件: Dirichlet 条件、Neumann 条件和阻尼 (impedance) 条件. 早在 1998 年, Kirsch [7] 就 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件对应的反散射模型进行了研究并首次提出了分解法. 2002 年, Grinberg 和 Kirsch [16] 给出了分解法对阻尼边界条件的理论证明和数值模拟. 读者也可在文献 [17] 中找到分解法对于阻尼边界条件的部分新证明. 本节考虑可穿透散射体的反散射.

2.1 数学模型

记 $u^i=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$ 为入射平面波. 假设散射体 D 内部是可穿透的非均匀介质, 具有 C^2 光滑的边界 ∂D, 那么, 在散射体 D 的外部 $\mathbb{R}^n\backslash\overline{D}$, 散射场 $u^s:=u-u^i$ 满足 (1.1) 和 (1.2), 其中 u 是总场; 同时, 在散射体 D 内部, 透射场 u 满足

$$\Delta u+k^2nu=0,\quad \text{在 } D \text{ 内}, \tag{2.1}$$

其中 n 表示 D 中介质对声波的折射指数 (refractive index). 此外, 在散射体的边界 ∂D 上, 如下传输边界条件 (transmission condition) 成立,

$$u_+-u_-=0,\quad \frac{\partial u_+}{\partial\nu}-\lambda\frac{\partial u_-}{\partial\nu}=0,\quad \text{在 } \partial D \text{ 上}, \tag{2.2}$$

其中 ν 是边界 ∂D 的单位外法向量, λ 是与背景介质和 D 中介质相关的系数, $u_\pm$ 和 $\partial u_\pm/\partial\nu$ 分别表示 u 和 $\partial u/\partial\nu$ 从散射体外部 (+) 和内部 (−) 的极限. 这里, 正问题指的是给定 D, 求解散射场 u^s, 而反问题指的是利用远场模式 u^∞ 重构散射体 D. 利用测量数据 u^∞, 我们可以定义远场算子 $M: L^2(S^{n-1})\to L^2(S^{n-1})$,

$$(Mg)(\hat{x}):=\int_{S^{n-1}}u^\infty(\hat{x},d)g(d)\,ds(d),\quad \hat{x}\in S^{n-1}. \tag{2.3}$$

2.2 分解法的应用

对于 $\lambda=1$ 的情形, Kirsch [18, 19] 讨论了分解法的应用. 然而, Kirsch 的证明对于反射指数有如下两个先验要求:

(1) $|n-1|$ 局部有下界;

(2) 存在 $t\in[0,\pi]$ 和常数 $c_0>0$ 使得 $\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\overline{n-1}]\geqslant c_0|n-1|$.

如何去掉这两个前提假设, 目前还是个开问题. 对于 $\lambda\neq1$ 的情形, 直到最近, 才由文献 [20–22] 等解决. 事实上, 三篇文献均讨论了比上小节给出模型更为复杂的情形. 其中, 文献 [20] 考虑了 D 中介质为各向异性的情形; 文献 [21] 研究了更为一般的传导 (conductive) 边界条件的情形; 而文献 [22] 分析了 D 中包含未知散射体的情形. 三篇文献的主要思想是相同的, 为方便我们的叙述, 这里只考虑上小节给出的模型. 定义 $w:=(u\,|_D,u^s\,|_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{D}})$, 则函数 w 是下列传输边值问题 (TBP) 在 $f_1=u^i$ 和 $f_2=\partial u^i/\partial\nu$ 的一个解.

传输边值问题 (TBP) 给定 $f_1\in H^{1/2}(\partial D)$ 和 $f_2\in H^{-1/2}(\partial D)$, 求解 $w\,|_D\in H^1(D)$, $w\,|_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{D}}\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{D})$ 使得 $w\,|_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{D}}$ 满足 (1.1) 和 (1.2), 而且 $w\,|_D$ 满足

$$\Delta w+k^2nw=0,\quad \text{在 } D \text{ 内}, \tag{2.4}$$

$$w_+-w_-=-f_1,\quad \frac{\partial w_+}{\partial\nu}-\lambda\frac{\partial w_-}{\partial\nu}=-f_2,\quad \text{在 } \partial D \text{ 上}. \tag{2.5}$$

假设 2.1 波数 k 满足如下条件:

(1) k^2 不是下列 Dirichlet 边值问题的特征值,

$$\Delta u+k^2nu=0,\quad \text{在 } D \text{ 内}, \tag{2.6}$$

$$u=f,\quad \text{在 } \partial D \text{ 上}. \tag{2.7}$$

因此, 我们可以通过 $\Lambda f = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}$ 定义内部 DtN 算子 $\Lambda : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$.

(2) k^2 不是下列 Neumann 边值问题的特征值,

$$\Delta u + k^2 nu = 0 \quad 在\ D\ 内, \tag{2.8}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad 在\ \partial D\ 上. \tag{2.9}$$

因此, 我们可以通过 $\Lambda^{-1} g = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}$ 定义内部 NtD 算子 $\Lambda^{-1} : H^{-1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D)$.

(3) k^2 不是下列内部传输问题 (interior transmission problem) 的特征值,

$$\Delta u + k^2 nu = 0, \quad \Delta v + k^2 v = 0, \quad 在\ D\ 内, \tag{2.10}$$

$$u = v, \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad 在\ \partial D\ 上. \tag{2.11}$$

在上述条件下, 我们可以得到远场算子 M 如 (1.5) 形式的分解, 即 $M = GTG^*$, 其中 $G : H^{1/2}(\partial D) \times H^{-1/2}(\partial D) \to L^2(S^{n-1})$ 定义为

$$G \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = w^\infty,$$

这里 w^∞ 是传输边值问题 (TBP) 对应的散射问题的解 w 的远场模式. 中间算子 $T : H^{-1/2}(\partial D) \times H^{1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D) \times H^{-1/2}(\partial D)$ 定义为

$$T := \begin{pmatrix} -S & -K - \frac{1}{2}I \\ -K' + \frac{1}{2}I & -N \end{pmatrix}^*,$$

其中对一切 $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$, $\psi \in H^{1/2}(\partial D)$, 四个边界积分算子 $S : H^{-1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D)$, $K : H^{1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D)$, $K' : H^{-1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$ 和 $N : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$ 分别定义为

$$(S\varphi)(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y)\, ds(y), \quad x \in \partial D, \tag{2.12}$$

$$(K\psi)(x) := \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)}\, ds(y), \quad x \in \partial D, \tag{2.13}$$

$$(K'\varphi)(x) := \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)}\, ds(y), \quad x \in \partial D, \tag{2.14}$$

$$(N\psi)(x) := \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)}\, ds(y), \quad x \in \partial D. \tag{2.15}$$

众所周知 (参见文献 [8]), 算子 S 是正强制的, 而算子 N 是负强制的. 结合算子 T 的结构, 我们发现这将为后续分析带来极大的困难. 与不可穿透散射体的反散射问题不同的是, 这里对应的算子 G 不是单射. 事实上, 可以证明算子 G 的核空间 (kernel space) $\mathscr{N}(G)$ 可通过内部 DtN 算子 Λ 来刻画, 即

$$\mathscr{N}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \Lambda f \end{pmatrix} : f \in H^{1/2}(\partial D) \right\}.$$

基于这个结果, 我们可以得到远场算子 M 的一个新分解

$$M = G_1 T_1 G_1^*, \tag{2.16}$$

其中算子 $G_1 : H^{-1/2}(\partial D) \to L^2(S^{n-1})$ 定义为

$$G_1 = \frac{1}{2} G \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} \\ -I \end{pmatrix},$$

中间算子 $T_1 : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$ 定义为

$$T_1 = -\Lambda S^* \Lambda^* + K^* \Lambda^* + \frac{\Lambda^*}{2} + \Lambda (K')^* - N^* - \frac{\Lambda}{2}.$$

基于对新分解 (2.16) 中各个算子性质的研究, 借助值域恒等定理, 我们可以证明如下主要结果 (参见文献 [22]).

定理 2.1 对任意 $z \in \mathbb{R}^n$, 定义 $\phi_z \in L^2(S^{n-1})$ 为

$$\phi_z(\hat{x}) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{x}\cdot z}, \quad \hat{x} \in S^{n-1}. \tag{2.17}$$

如果 $\lambda \neq 1$ 且 k^2 满足假设 2.1, 则

$$z \in D \Leftrightarrow \phi_z \in \mathscr{R}(M_\sharp^{1/2}) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \phi_z, \psi_j \rangle_{L^2(S^{n-1})}|^2}{\lambda_j} < \infty \Leftrightarrow W(z) := \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \phi_z, \psi_j \rangle_{L^2(S^{n-1})}|^2}{\lambda_j} \right]^{-1} > 0,$$

其中 $M_\sharp = |\mathrm{Re}(M)| + |\mathrm{Im}(M)|$, (λ_j, ψ_j) 是其特征系统.

值得注意的是, 当 $\lambda \neq 1$ 时, 这里采用的方法并不需要对 n 的先验要求, 但是对于波数 k 提出了更高的要求. 尽管内部特征值是离散的, 但是, 内部特征值的存在对于分解法的反演效果是有影响的. 我们将在第 6 节中探讨避免特征值的一种技术.

3 广义阻尼边界条件

为了避免被敌方雷达探测到, 作战飞机的表面常常覆盖某种薄薄一层特殊材料. 在数学上, 我们一般采取阻尼边界来刻画这种模型. 为了更精确地刻画这种模型, 近年来, 数学家们开始研究一种广义的阻尼边界条件 (参见文献 [23–25]).

3.1 数学模型

假设有界区域 D 是一个 C^2 光滑的不可穿透散射体, 在其边界 ∂D 上满足广义阻尼边界条件. 假设入射场为平面波 $u^i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$, 那么, 散射场 u^s 满足 (1.1) 和 (1.2) 以及广义阻尼边界条件

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu} + \mathrm{Div}\,(\mu \mathrm{Grad}\, u^s) + \lambda u^s = f, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}, \tag{3.1}$$

其中 $h = -\partial u^i/\partial \nu - \mathrm{Div}\,(\mu \mathrm{Grad}\, u^i) - \lambda u^i$, Div 和 Grad 分别表示曲面散度和曲面梯度 (具体定义参见文献 [1, 第 6 章]), $\mu \in C^1(\partial D)$ 和 $\lambda \in C(\partial D)$ 是分别满足 $\mathrm{Im}(\mu) \leqslant 0$ 和 $\mathrm{Im}(\lambda) \geqslant 0$ 的复值函数, 称为阻尼函数. 特别地, 当 $\mu = 0$ 时, 广义阻尼边界条件 (3.1) 退化为经典的阻尼边界条件.

当 $f \in H^{-1}(\partial D)$ 时, 文献 [26] 利用变分法建立了散射问题 (1.1) 和 (1.2) 以及 (3.1) 的适定性, 而文献 [27] 证明了散射体 D、阻尼函数 μ 和 λ 可以被对应所有平面波入射方向和观测方向的远场模式唯一确定; 同时, 文献 [27] 还提出了利用远场数据来数值重构散射体 D、阻尼函数 μ 和 λ 的 Newton 迭代方法.

为了建立重构散射体 D 的分解法, 我们需要在 $f\in H^{-3/2}(\partial D)$ 时建立散射问题 (1.1) 和 (1.2) 以及 (3.1) 的适定性. 然而, 对于这种情形, 文献 [27] 中的变分法不再适用, 文献 [28] 提出了建立散射问题 (1.1) 和 (1.2) 以及 (3.1) 的适定性的边界积分方程法, 其中, 为了建立边界积分方程在所有波数情形的唯一可解性, 文献 [28] 借助了修改 Green 函数技术[29,30].

3.2 分解法的应用

建立了散射问题 (1.1) 和 (1.2) 以及 (3.1) 在 $f\in H^{-3/2}(\partial D)$ 时的适定性后, 我们可以定义算子 $G: H^{-3/2}(\partial D)\to L^2(S^{n-1})$ 为 $Gf=u^\infty$, 其中 u^∞ 表示散射问题 (1.1) 和 (1.2) 以及 (3.1) 的解对应的远场模式. 定义算子 $T: H^{3/2}(\partial D)\to H^{-3/2}(\partial D)$ 为 $Tf:=S_1f+K_1f+K_1'f+N_1f$, 其中辅助算子 $S_1,K_1,K_1',N_1: H^{3/2}(\partial D)\to H^{-3/2}(\partial D)$ 分别定义为

$$
\begin{aligned}
S_1f &:= \mathrm{Div}\,(\mu\mathrm{Grad}\,)S\mathrm{Div}\,(\overline{\mu}\mathrm{Grad}\,)+\lambda S\mathrm{Div}\,(\overline{\mu}\mathrm{Grad}\,)+\mathrm{Div}\,(\mu\mathrm{Grad}\,)S\overline{\lambda}+\lambda S\overline{\lambda},\\
K_1f &:= \lambda K+\mathrm{Div}\,(\mu\mathrm{Grad}\,)K,\\
K_1'f &:= K'\overline{\lambda}+K'\mathrm{Div}\,(\overline{\mu}\mathrm{Grad}\,),\\
N_1f &:= N+i\mathrm{Im}(\lambda)+i\mathrm{Div}\,[\mathrm{Im}(\mu)\mathrm{Grad}\,],
\end{aligned}
$$

这里算子 S,K,K' 和 N 由 (2.12)–(2.15) 给出. 我们可以证明远场算子 $M: L^2(S^{n-1})\to L^2(S^{n-1})$ 有如下分解 (参见文献 [28]):

$$
M=-\frac{1}{\overline{\gamma_n}}GT^*G^*,
$$

其中 γ_n 是依赖于维数的常系数, 见 (1.3).

定理 3.1 [28] 假设 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D 中关于广义阻尼边界条件的特征值, $\min_{x\in\partial D}|\mu(x)|>0$. 对一切 $z\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\phi_z\in L^2(S^{n-1})$ 如下:

$$
\phi_z(\hat{x}):=\gamma_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{x}\cdot z},\quad \hat{x}\in S^{n-1},
$$

那么,

$$
z\in D\Leftrightarrow \phi_z\in\mathscr{R}(M_\sharp^{1/2})\Leftrightarrow W(z):=\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|\langle\phi_z,\psi_j\rangle_{L^2(S^{n-1})}|^2}{\lambda_j}\right]^{-1}>0,
$$

其中 $M_\sharp=|\mathrm{Re}(M)|+|\mathrm{Im}(M)|$, (λ_j,ψ_j) 是其特征系统.

在二维情形 ($n=2$), 定理 3.1 的证明及其数值算例可参见文献 [28]; 三维 ($n=3$) 情形的证明类似.

4 混合型散射体

正如第 2 节指出, 经典的反散射问题考虑两种基本的散射体: 一类是不可穿透散射体 D_{imp}; 另一类是可穿透散射体 D_p. 然而, 在实际应用中, 这两类散射体可能同时存在. 本节考虑两种混合型散射体: 一种是不可穿透散射体紧嵌入到某种可穿透散射体中, 即 $\overline{D_{\mathrm{imp}}}\subset D_p$; 另一种是不可穿透散射体与可穿透散射体彼此孤立而同时存在, 即 $D_{\mathrm{imp}}\cap D_p=\emptyset$.

4.1 $\overline{D_{\mathrm{imp}}} \subset D_p$

本小节考虑 $\overline{D_{\mathrm{imp}}} \subset D_p$, 即不可穿透散射体 D_{imp} 紧嵌入到某种可穿透散射体 D_p 中的情形.

4.1.1 数学模型

为简便起见, 我们假定不可穿透散射体 D_{imp} 是声软 (sound-soft) 的, 即总场 u 在边界 $\partial D_{\mathrm{imp}}$ 上满足 Dirichlet 边界条件. 记 $u^i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$ 为入射平面波, 那么, 除了散射场 u^s 在 $\mathbb{R}^n\backslash\overline{D_p}$ 上满足 (1.1) 和 (1.2), 总场 $u = u^i + u^s$ 还需要满足

$$\Delta u + k_{D_p}^2 u = 0, \quad 在\ D_p\backslash\overline{D_{\mathrm{imp}}}\ 内, \tag{4.1}$$

$$u_+ - u_- = 0, \quad \frac{\partial u_+}{\partial \nu} - \lambda\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = 0, \quad 在\ \partial D_p\ 上, \tag{4.2}$$

$$u = 0, \quad 在\ \partial D_{\mathrm{imp}}\ 上, \tag{4.3}$$

其中 $k_{D_p} \neq k$ 是声波在 D_p 中不同于背景介质中的波数. 关于混合型边值问题 (1.1) 和 (1.2) 以及 (4.1)–(4.3) 的适定性可参见文献 [31,32]. 我们所关心的反问题是利用远场模式 u^∞ 重构混合型散射体的边界 ∂D_p 和 $\partial D_{\mathrm{imp}}$.

4.1.2 分解法的应用

对于分解法重构 ∂D_p 的理论分析和数值结果, 读者可参见文献 [22]. 其基本思想已在第 2 节中指出, 这里不再赘述. 我们假定 ∂D_p 已得到重构, 下面着重介绍如何利用分解法反演里层不可穿透散射体 $\partial D_{\mathrm{imp}}$. 记 u_0 和 u_0^∞ 分别表示 $D_{\mathrm{imp}} = \emptyset$ 时散射问题的全场和远场模式. 相应地, 令 $M_0 : L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1})$ 表示由 u_0^∞ 定义的远场算子, 即

$$(M_0 g)(\hat{x}) := \int_{S^{n-1}} u_0^\infty(\hat{x}, d) g(d)\, ds(d), \quad \hat{x} \in S^{n-1}. \tag{4.4}$$

定义散射算子 $\mathcal{S}_0 : L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1})$ 为

$$\mathcal{S}_0 = I + 2\mathrm{i}k|\gamma_n|^2 M_0, \tag{4.5}$$

其中 I 表示恒等算子. 假定 k_{D_p} 和 λ 均为实数, 则散射算子 $\mathcal{S}_0$ 将外出波 (outgoing wave) 和进入波 (incoming wave) 联系起来, 即对一切 $z \in \mathbb{R}^n\backslash\overline{D_{\mathrm{imp}}}$, $\widehat{x} \in S^{n-1}$, 我们有 (参见文献 [33])

$$u_0(z, -\widehat{x}) = (\mathcal{S}_0\overline{u_0(z,\cdot)})(\widehat{x}). \tag{4.6}$$

记 $G_0(x,z)$, $x \in \mathbb{R}^n$ 为 $D_{\mathrm{imp}} = \emptyset$ 时的散射问题对应的 Green 函数, $G_0^\infty(\widehat{x}, z)$ 表示 $G_0(x,z)$ 的远场模式. 为重构嵌入在可穿透散射体 D_p 中的散射体 D_{imp}, 根据分解法的基本想法, 我们需要采取试验函数 $\phi_z := G_0^\infty(\widehat{x}, z)$. 虽然 Green 函数 $G_0(x,z)$ 的求解往往是非常困难的, 但是其远场模式 $G_0^\infty(\widehat{x}, z)$ 与平面波入射对应的全场 $u_0(z, -\widehat{x})$ 有混合交互关系. 而 u_0 和 u_0^∞ 可同时求解, 所以, 我们只需采取 $\phi_z(\widehat{x}) := u_0(z, -\widehat{x})$.

混合交互关系 对一切 $\widehat{x} \in S^{n-1}$, 我们有 (参见文献 [33])

$$G_0^\infty(\widehat{x}, z) = \begin{cases} u_0(z, -\widehat{x}), & z \in \mathbb{R}^n\backslash\overline{D_p}, \\ \lambda u_0(z, -\widehat{x}), & z \in D_p. \end{cases} \tag{4.7}$$

考虑如下边值问题: 给定 $f \in H^{1/2}(\partial D_{\rm imp})$, 求解散射解 $v \in H^1(D_p \backslash \overline{D_{\rm imp}}) \cap H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{D_p})$ 使得

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad 在\ \mathbb{R}^n \backslash \overline{D_p}\ 内, \tag{4.8}$$

$$\Delta v + k^2_{D_p} v = 0, \quad 在\ D_p \backslash \overline{D_{\rm imp}}\ 内, \tag{4.9}$$

$$v_+ = v_-, \quad \frac{\partial v_+}{\partial \nu} - \lambda \frac{\partial v_-}{\partial \nu} = 0, \quad 在\ \partial D_p\ 上, \tag{4.10}$$

$$v = f, \quad 在\ \partial D_{\rm imp}\ 上, \tag{4.11}$$

$$v\ 满足辐射条件\ (1.2). \tag{4.12}$$

显然, $u - u_0$ 是上述边值问题 (4.8)–(4.12) 在 $f = -u_0$ 时的一个解. 定义 $G : H^{1/2}(S_1) \to L^2(S^{n-1})$ 为

$$Gf = v^\infty, \tag{4.13}$$

其中 v^∞ 是散射解 v 的远场模式. 定义 $T : H^{-1/2}(\partial D_{\rm imp}) \to H^{1/2}(\partial D_{\rm imp})$ 为

$$(T\varphi)(x) = \int_{\partial D_{\rm imp}} G_0(x,z)\varphi(z)ds(z), \quad x \in \partial D_{\rm imp}, \tag{4.14}$$

则可以证明 (参见文献 [33])

$$\lambda(M_0 - M)\mathcal{S}_0^* = G S_D^* G^*. \tag{4.15}$$

定理 4.1 [33] 假设 $k^2_{D_p}$ 不是 $-\Delta$ 在 $D_{\rm imp}$ 中的 Dirichlet 特征值, k_{D_p} 和 λ 均为实数. 对一切 $z \in D_p$, 定义 $\phi_z \in L^2(S^{n-1})$ 为

$$\phi_z(\widehat{x}) := u_0(z, -\widehat{x}), \quad \widehat{x} \in S^{n-1},$$

则

$$z \in D_{\rm imp} \Longleftrightarrow \phi_z \in \mathscr{R}(M_\sharp^{1/2}),$$

其中 $M_\sharp : L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1})$ 为 $M_\sharp := |{\rm Re}((M_0 - M)\mathcal{S}_0^*)| + |{\rm Im}((M_0 - M)\mathcal{S}_0^*)|$.

4.2 $D_{\rm imp} \cap D_p = \emptyset$

本小节探讨具有不同物理性质的多个散射体的联合散射体 D. 为简便起见, 假设 $D = D_{\rm imp} \cup D_p$, $D_{\rm imp} \cap D_p = \emptyset$, 其中 $D_{\rm imp}$ 是不可穿透的散射体, D_p 表示可穿透的散射体. 在 $\partial D_{\rm imp}$ 上, 我们要求声波满足 Dirichlet 边界条件, 而 D_p 内是某种非均匀介质.

4.2.1 数学模型

考虑如下边值问题: 给定 $f_1 \in H^{1/2}(\partial D_{\rm imp})$ 和 $f_2 \in L^2(D_p)$, 求解散射场 $v \in H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{D_{\rm imp}})$ 使得

$$\Delta v + k^2(1+q)v = -k^2 \frac{q}{\sqrt{|q|}} f_2, \quad 在\ \mathbb{R}^n \backslash \overline{D_{\rm imp}}\ 内, \tag{4.16}$$

$$v = -f_1, \quad 在\ \partial D_{\rm imp}\ 上, \tag{4.17}$$

$$v\ 满足辐射条件\ (1.2), \tag{4.18}$$

其中 $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\overline{D_{\rm imp}})$ 满足如下条件:

(1) $\mathrm{Im}(q) \geqslant 0$ 且在 $\mathbb{R}^n\backslash\overline{D}$ 中, $q=0$;

(2) 存在 $c_0 \in (0,1)$ 使得在 D_p 中, $1+\mathrm{Re}(q) \geqslant c_0$;

(3) $|q|$ 局部有下界, 即对任意紧集 $D_0 \subset D_p$, 存在依赖于 D_0 的常数 $c_1 \in (0, 1-c_0)$ 使得在 D_0 中 $|q| \geqslant c_1$.

我们研究的散射问题是上述模型的一个特殊情形, 即 $f_1 = u^i$, $f_2 = \sqrt{|q|}u^i$, 其中 u^i 是平面入射波. 边值问题 (4.16)–(4.18) 的适定性可参见文献 [34].

4.2.2 分解法的应用

定义 $G: H^{\frac{1}{2}}(\partial D_{\rm imp}) \times L^2(D_p) \to L^2(S^{n-1})$ 为

$$G\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = v^\infty,$$

其中 v^∞ 为边值问题 (4.16)–(4.18) 的解 v 对应的远场模式. 对任意 $(\phi,\psi) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D_{\rm imp}) \times L^2(D_p)$, 定义

$$w(x) = \int_{\partial D_{\rm imp}} \phi(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int_{D_p} \psi(y)\Phi(x,y)\sqrt{|q(y)|}dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

设

$$\begin{aligned} f_1 &:= -w\,|_{\partial D_1} = -\int_{D_2}\psi(y)\Phi(x,y)\sqrt{|q(y)|}dy\,\Big|_{\partial D_1} - S_1\phi, \\ f_2 &:= -\sqrt{|q|}w + \frac{|q|}{k^2 q}\psi. \end{aligned}$$

定义 $T: H^{-\frac{1}{2}}(\partial D_{\rm imp}) \times L^2(D_p) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial D_{\rm imp}) \times L^2(D_p)$ 为

$$T\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

那么, (2.3) 中定义的远场算子有如下分解 (参见文献 [34, 35]):

$$M = GT^*G^*. \tag{4.19}$$

定理 4.2 [34, 35] 假设 k^2 不是 $-\Delta$ 在 $D_{\rm imp}$ 中的 Dirichlet 特征值, 存在 $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ 和 $c_2 > 0$ 使得 q 满足

$$\Re\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}q}{|q|}\right) \leqslant -c_2, \quad \text{a.e. 在 } D_p \text{ 内}. \tag{4.20}$$

对任意 $z \in \mathbb{R}^n$, 同 (3.2) 定义 $\phi_z \in L^2(S^{n-1})$, 则

$$z \in D \Leftrightarrow \phi_z \in \mathscr{R}(M_\sharp^{1/2}),$$

其中算子 $M_\sharp: L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1})$ 为 $M_\sharp := |\Re(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}M)| + |\Im(M)|$.

上述定理表明, 分解法的有效性需要条件 (4.20) 成立, 特别是需要给定参数 t. 然而在数值上, 只需取 $t=0$ 即可, 但是理论证明尚未建立. 需要指出地是, 条件 (4.20) 在验证中间算子 T 的性质时也起到了非常关键的作用. 如果 (4.20) 不成立, 我们也可以假定存在 $t\in(\pi,2\pi)$ 和 $c>0$ 使得

$$\Re\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}q}{|q|}\right)\geqslant c,\quad \text{a.e. 在 } D_p \text{ 内}. \tag{4.21}$$

值得注意的是, (4.21) 对于满足 $\Re(q)$ 不换号的 q 总是成立的. 实际上, 因为 $|\mathrm{Re}(q)|+\mathrm{Im}(q)\geqslant|q|$ 成立, 我们只需取 $c=\sqrt{2}/2$,

$$t=\begin{cases}\dfrac{7\pi}{4}, & \text{如果 } \Re(q)\geqslant 0,\\ \dfrac{5\pi}{4}, & \text{如果 } \Re(q)<0\end{cases}$$

即可. 同时, 我们还需要对未知散射体的位置信息作一定假设, 即存在两个不相交的区域 Ω_1 和 Ω_2 使得

$$\overline{D_{\mathrm{imp}}}\subset\Omega_1,\quad \overline{D_p}\subset\Omega_2. \tag{4.22}$$

适当选择 Ω_2 使得 k^2 不是 $-\Delta$ 在 Ω_2 中的 Dirichlet 特征值. 对任意 $\rho>0$, 引入两个新的算子 M_o 和 M_m 如下:

$$M_o=M-\rho M_2,\quad M_m=M+\rho M_1, \tag{4.23}$$

其中 M_1 表示以

$$q_1=\begin{cases}\mathrm{i}, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 内},\\ 0, & \text{在 } \mathbb{R}^n\backslash\Omega_1 \text{ 内}\end{cases} \tag{4.24}$$

对应的可穿透散射体 Ω_1 所得到的散射解的远场模式, 而 M_2 表示声软障碍 Ω_2 对应的散射解的远场模式.

定理 4.3 假定 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D_1 中的 Dirichlet 特征值, q 满足 (4.21), D_{imp} 和 D_p 满足 (4.22). 对任意 $z\in\mathbb{R}^n$, 同样利用 (3.2) 定义 $\phi_z\in L^2(S^{n-1})$.

(1) 对任意点 $z\notin\overline{\Omega_2}$, 我们有

$$z\in D_{\mathrm{imp}}\Leftrightarrow\phi_z\in\mathscr{R}(M_{o\sharp}^{1/2}),$$

其中

$$M_{o\sharp}=|\mathrm{Re}(M_o)|+|\mathrm{Im}(M_o)|;$$

(2) 对任意点 $z\notin\overline{\Omega_1}$, 我们有

$$z\in D_p\Leftrightarrow\phi_z\in\mathscr{R}(M_{m\sharp}^{1/2}),$$

其中

$$M_{m\sharp}=|\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}M_m)|+|\mathrm{Im}(M_m)|.$$

在数值模拟中, 参数 ρ 的变化对于反演效果几乎没有影响, 特别地, 当 $\rho=0$ 时分解法依然有效, 然而, 理论证明还是一个开问题.

5 近场数据

对于点源入射的情形, 我们一般采集近场作为测量数据. 假设 Γ 是测量曲面, 那么, 近场数据 u^s 就定义了近场测量算子 $M: L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$:

$$Mg(x) = \int_\Gamma u^s(x,y)g(y)ds(y), \quad x \in \Gamma. \tag{5.1}$$

本节考虑两类不同的散射模型, 第一类是内部腔体反散射问题, 第二类是经典的外部反散射问题.

5.1 内部腔体反散射问题

内部腔体反散射问题是一类相对新型的反问题, 入射源点和测量曲面均在区域 D 内. 分解法是求解这类问题的一个快速而有效的算法.

5.1.1 数学模型

入射场为点源 $u^i = \Phi(\cdot, y)$, $y \in D$. 为简便起见, 这里只考虑 Dirichlet 边界条件. 假设 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D 中的 Dirichlet 特征值. 给定 $f \in H^{1/2}(\partial D)$, 求解 $v \in H^1(D)$ 使得 v 满足

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \text{在 } D \text{ 内}, \tag{5.2}$$

以及 Dirichlet 边界条件

$$v = f, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}. \tag{5.3}$$

在我们的散射模型中, $f = -u^i$, $v = u^s$. 记测量曲面为 $\Gamma \subset D$, 曲面 Γ 所包围的有界区域记为 D_0. 选取 Γ 使得 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D_0 中的 Dirichlet 特征值. 我们关心的反问题是利用测量数据 $u^s(x,y)$, $x, y \in \Gamma$ 反演 ∂D.

5.1.2 分解法的应用

定义算子 $G: H^{1/2}(\partial D) \to L^2(C)$ 为 $Gf = v\mid_C$, 这里 v 是边值问题 (5.2) 和 (5.3) 的解, 则 (5.1) 定义的近场测量算子 $M: L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ 有如下分解 (参见文献 [36]):

$$M = -GSG^*,$$

其中 S 是单层边界积分算子 (2.12).

定理 5.1 [36] 假设 k^2 既不是 $-\Delta$ 在 D 的 Dirichlet 特征值也不是 $-\Delta$ 在 D_0 中的 Dirichlet 特征值. 对任意 $z \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{D_0}$, 定义 $\phi_z \in L^2(\Gamma)$ 为

$$\phi_z(x) = \Phi(x,z), \quad x \in \Gamma,$$

则

$$z \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{D} \Leftrightarrow \phi_z \in \mathscr{R}(M_\sharp^{1/2}),$$

其中 $M_\sharp = |\mathrm{Re}(M)| + |\mathrm{Im}(M)|$.

因为 Γ 的选择有一定随意性, 所以, k^2 不是 $-\Delta$ 在 D_0 中的 Dirichlet 特征值总能满足. 然而, k^2 不是 $-\Delta$ 在 D 的 Dirichlet 特征值这一要求不仅是分解法在求解反问题需要的前提条件, 也是原散射问题的适定性所要求的. Qin 和 Liu [37] 通过引入一个具有阻尼边界条件的人工障碍来保证原散射问题的适定性和分解法的有效性.

5.2　外部反散射问题

我们再回到经典的外部反散射问题. 同样, 为了简便起见, 我们只考虑 Dirichlet 边界条件. 对于其他边界条件, 结果同样成立 (参见文献 [38]). 不同于内部腔体反散射问题和利用远场数据反演的外部反散射问题, 对于基于近场测量数据的外部反散射问题, 如何构造形如 (1.5) 的分解从而建立数值上快速、可行的分解法一直是个开问题. 原因是, 在建立远场算子的分解法中起决定作用的值域恒等定理中, 远场算子 M 的分解式 (1.5) 中 G 的伴随算子 G^* 是由拟线性形式 (sesquilinear form) 定义的, 而近场算子 M 的分解式中导出的伴随算子是由双线性形式 (bilinear form) 定义的 (参见专著 [8, 第 1.7 节]). 为了解决这个困难, 人们提出了许多方法, 但数值上都很难实现或计算效率低 (参见专著 [8,38,39]). 最近, 我们基于球调和函数展开构造了一个 "外出 - 进入算子" (outgoing-to-incoming operator) T_1, 从而成功地建立了基于 T_1M 的分解法. 由于算子 T_1 可以快速计算, 因此, 我们的分解法快速、可行; 此外, 算子 T_1 的构造不依赖于散射体的物理性质, 从而, 我们建立的分解法也不依赖于散射体的物理性质, 详见文献 [38], 其中包括大量数值实验结果.

5.2.1　数学模型

假设入射场为点源 $u^i = \Phi(\cdot, y)$, $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{D}$. 散射场 u^s 除了满足 (1.1) 和 (1.2) 外, 还满足 Dirichlet 边界条件

$$u^s = f, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}. \tag{5.4}$$

在我们的散射模型中, $f = -u^i$. 记测量曲面为 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{D}$, 曲面 Γ 所包围的有界区域记为 D_0. 不同于内部腔体散射问题, 这里 $\overline{D} \subset D_0$. 选取 Γ 使得 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D_0 中的 Dirichlet 特征值. 我们关心的反问题是利用测量数据 $u^s(x, y)$, $x, y \in \Gamma$ 反演 ∂D.

5.2.2　分解法的应用

选取 D_0 为某个以原点为球心、半径为 R 的圆 B_R, 则 $\Gamma = \partial B_R$. 为叙述简便, 下面只考虑三维情形, 对于二维情形可类似推导. 对一切 $f \in H^{1/2}(\partial D)$, 记 u^s 为边值问题 (1.1) 和 (1.2) 及 (5.4) 的解. 我们知道球调和函数 $\{Y_n^m \mid n \in \mathbb{Z}, m = -n, \ldots, n\}$ 是 $L^2(S^2)$ 上的一组正交基, 所以, 对一切 $g \in L^2(\partial B_R)$, 我们有

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} g_n^m Y_n^m(\widehat{x}), \quad x \in \partial B_R,$$

其中 g_n^m 是函数 g 关于球调和函数的 Fourier 系数. 不妨设当 $|x| = R$ 时, u^s 有如下级数表示:

$$u^s(x)\,|_{\partial B_R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} b_n^m h_n^{(1)}(kR) Y_n^m(\widehat{x}).$$

由此定义算子 $G_0 : H^{1/2}(\partial D) \to l^2$ 为

$$G_0 f = \{b_n^m h_n^{(1)}(kR) \mid n \in \mathbb{Z}, m = -n, \ldots, n\}.$$

记 $\mathrm{g} := \{g_{n,m} \mid n \in \mathbb{Z}, m = -n, \ldots, n\} \in l^2$, 则我们可以定义算子 $F_R : L^2(\partial B_R) \to l^2$ 及其逆算子 $F_R^{-1} : l^2 \to L^2(\partial B_R)$:

$$F_R g = \mathrm{g}, \quad F_R^{-1} \mathrm{g} = g.$$

对一切 $\mathrm{g} := \{g_{n,m} \mid n \in \mathbb{Z}, m = -n, \ldots, n\} \in l^2$, 定义算子 $T_0 : l^2 \to l^2$ 为

$$T_0\mathrm{g} = \left\{ -\frac{\overline{h_n^{(1)}(kR)}}{h_n^{(1)}(kR)} g_{n,m} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}, m = -n, \ldots, n \right\}.$$

利用上面定义的辅助算子, 我们定义算子 $G : H^{1/2}(\partial D) \to L^2(\partial B_R)$ 和 $T_1 : L^2(\partial B_R) \to L^2(\partial B_R)$ 分别为

$$G := F_R^{-1} T_0 G_0, \quad T_1 := F_R^{-1} T_0 F_R,$$

其中 $T_1 : L^2(\partial B_R) \to L^2(\partial B_R)$ 可以由下面的积分形式给出,

$$(T_1 g)(x) = \int_{\partial B_R} K(x, y) g(y) ds(y), \quad g \in L^2(\partial B_R),$$

其中积分核函数

$$K(x, y) := -\frac{1}{4\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\overline{h_n^{(1)}(kR)}}{h_n^{(1)}(kR)} \right) (2n+1) P_n(\cos\theta),$$

这里 P_n 是 Legendre 多项式, θ 表示 $x \in \partial B_R$ 与 $y \in \partial B_R$ 之间的夹角.

现在, 对于近场测量算子 $M : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ (其定义如同 (5.1), 但是 Γ 取为 ∂B_R) 有如下分解 (参见文献 [38]):

$$T_1 M = G S^* G^*,$$

其中 S 是定义在边界 ∂D 上的单层边界积分算子 (见 (2.12)).

定理 5.2 [38] 假设 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D 的 Dirichlet 特征值. 对一切 $z \in B_R$, 定义 $\phi_z \in L^2(\partial B_R)$ 为

$$\phi_z(x) = \overline{\Phi(x, z)}, \quad x \in \partial B_R,$$

则

$$z \in D \Leftrightarrow \phi_z \in \mathscr{R}[(T_1 M)_\sharp^{1/2}] \Leftrightarrow W(z) := \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \phi_z, \psi_j \rangle_{L^2(\partial B_R)}|^2}{\lambda_j} \right]^{-1} > 0,$$

其中 $(T_1 M)_\sharp = |\mathrm{Re}(T_1 M)| + |\mathrm{Im}(T_1 M)|$, (λ_j, ψ_j) 是其特征系统.

6 避免内部特征值

分解法作为求解反散射问题的一个快速有效算法, 一个共同的前提条件是排除内部特征值. 一般来讲, 排除内部特征值是为了保证中间算子满足值域恒等定理中的条件 (4). 这一点从前面几节的最终定理中也可发现. 然而, 一般来讲, 反散射问题本身与内部特征值没有任何关系, 因此, 分解法对波数的要求显得有些多余. 尽管内部特征值是离散的, 在特定的区间内至多有有限个这样的特征值. 然而, 当波数靠近这些特征值时, 分解法的数值效果也会随之变差. 我们有必要探讨如何在分解法的数值实现中有效避免内部特征值的影响. 对于一般情形, Kirsch 和 Liu [17] 于 2014 年首次提出了一种修正方法来处理声波反散射模型.

6.1 数学模型

同样, 为了叙述简便, 我们只考虑声软散射体的反散射模型. 假设入射场为平面波 $u^i(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$, 那么, 声软散射体的散射模型为, 求解 $v\in H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{D})$ 使其满足 (1.1) 和 (1.2) 以及 Dirichlet 边界条件

$$v=f,\quad \text{在 } \partial D \text{ 上}. \tag{6.1}$$

在我们的散射模型中, $f=-u^i$, $v=u^s$. 散射问题的适定性可参见文献 [1]. 这里的反问题指的是利用散射场的远场模式 u^∞ 来重构散射体 D.

6.2 分解法的应用

同 (2.3) 定义远场算子 $M_D: L^2(S^{n-1})\to L^2(S^{n-1})$, 则我们有如下分解 (参见文献 [8]):

$$M_D=-G_DS^*G_D^*, \tag{6.2}$$

其中中间算子 $S: H^{-1/2}(\partial D)\to H^{1/2}(\partial D)$ 为定义在 ∂D 上的单层边界积分算子 (2.12), 算子 $G_D: H^{1/2}(\partial D)\to L^2(S^{n-1})$ 定义为 $G_Df=v^\infty$, 这里 v^∞ 为边值问题 (1.1) 和 (1.2) 及 (6.1) 的解 v 对应的远场模式. 为了保证中间算子 $S: H^{-1/2}(\partial D)\to H^{1/2}(\partial D)$ 的单射性质, 我们需要假设 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D 内的 Dirichlet 特征值.

我们引入如下阻尼边值问题: 给定 $g\in H^{-1/2}(\partial B)$, 求解 $w\in H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B})$ 使其满足 (1.1) 和 (1.2) 及阻尼边界条件

$$\frac{\partial w}{\partial\nu}+\mathrm{i}\lambda w=g,\quad \text{在 } \partial B \text{ 上}, \tag{6.3}$$

其中 λ 是一个正常数. 记 M_λ 为上述阻尼边值问题对应的远场算子, 那么, M_λ 有如下分解 (参见文献 [17]):

$$M_\lambda \;=\; -G_\lambda T_\lambda^*G_\lambda^*, \tag{6.4}$$

其中 $G_\lambda: H^{-1/2}(\partial B)\to L^2(S^{n-1})$ 定义为 $G_\lambda g=w^\infty$, w^∞ 为边值问题 (1.1) 和 (1.2) 及 (6.3) 的解 w 对应的远场模式, $T_\lambda: H^{1/2}(\partial B)\to H^{-1/2}(\partial B)$ 定义为

$$(T_\lambda\phi)=\mathrm{i}\lambda\phi+N\phi+\lambda^2S\phi(y)+\mathrm{i}\lambda(K-K')\phi,\quad \text{在 } \partial B \text{ 上}, \tag{6.5}$$

这里, S,K,K' 和 N 分别为 (2.12)–(2.15) 中定义在 ∂B 上的边界积分算子. 值得注意的是, 因为 $\lambda>0$, 所以, 分解法在处理这种模型时没有内部特征值的影响.

假定 B 是紧嵌入 D 中的一个小区域, 即 $\overline{B}\subset\Omega$. 定义 $R_1: H^{-1/2}(\partial B)\to H^{1/2}(\partial\Omega)$ 为 $R_1g=w\,|_{\partial D}$. 结合 (6.2) 和 (6.4), 我们有

$$M:=M_D+M_\lambda=-G_D[S^*+R_1T_\lambda^*R_1^*]G_D^*. \tag{6.6}$$

定理 6.1 [17] 对任意 $z\in\mathbb{R}^n$, 同样利用 (3.2) 定义 $\phi_z\in L^2(S^{n-1})$, 则我们有

$$z\in D\Leftrightarrow \phi_z\in\mathscr{R}(M_\sharp^{1/2}).$$

7 总结

本文考虑了分解法在声波反散射问题中的最新进展. 经典的分解法被应用到可穿透散射体和带有广义阻尼边界条件的散射体. 对于混合型散射体、基于近场测量数据的情形和如何避免内部特征值等, 我们给出了可计算的修正方法.

分解法作为一种非迭代方法, 不依赖于散射体的物理性质, 因此是一种快速有效的数值算法. 近些年来, 除了声波反散射问题, 分解法最近也被应用到弹性波反散射[40,41]、电阻抗断层成像[14,15] 和电磁反散射[8,14] 等问题中. 从数学理论上讲, 分解法是非常优美的, 但其证明往往也是非常困难的. 从数值模拟角度看, 分解法尽管是快速有效的, 但从实际应用的角度出发还是存在一些问题, 例如,

(1) 测量数据偏多. 在实际应用中, 有些数据是很难采集到或不可能采集到的.

(2) 对误差敏感. 因为分解法需要求解算子的特征值和特征向量, 而这些过程对于误差是非常敏感的.

近些年来, 一类更为直接的成像方法被提出, 如直接采样法 (direct sampling method) [42,43] 和单波探测法 (single-shot method) [44,45]. 其主要思想是, 通过一个测量数据直接构造基于采样点 z 的指示函数 (参考本文中的指示函数 $W(z)$), 从而抗误差干扰性强. 文献 [42–45] 所考虑的都是以远场作为测量数据. 对于点源入射而且近场测量的情形, 读者可参见文献 [46] 提出的逆时偏移算法 (reverse time migration algorithm). 对于平面波入射而且近场测量的情形, 请参见文献 [47]. 关于这类方法在电磁反散射问题中的应用, 读者可参见文献 [48–51].

参考文献

1 Colton D, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 3rd ed. New York: Springer, 2013

2 Potthast R. Point Sources and Multipoles in Inverse Scattering Theory. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2001

3 Ikehata M. Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements. Comm Partial Differential Equations, 1998, 23: 1459–1474

4 Cheng J, Liu J, Nakamura G. The numerical realization of the probe method for the inverse scattering problems from the near-field data. Inverse Problems, 2005, 21: 839–855

5 Erhard K, Potthast R. A numerical study of the probe method. SIAM J Sci Comput, 2006, 28: 1597–1612

6 Colton D, Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. Inverse Problems, 1996, 12: 383–393

7 Kirsch A. Charaterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator. Inverse Problems, 1998, 14: 1489–1512

8 Kirsch A, Grinberg N. The Factorization Method for Inverse Problems. Oxford: Oxford Univercity Press, 2008

9 Colton D, Kress R. Inverse scattering. In: Handbook of Mathematical Methods in Imaging. New York: Springer, 2011: 551–598

10 Potthast R. Sampling and probe methods-an algorithmical view. Computing, 2005, 75: 215–235

11 Potthast R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems. Inverse Problem, 2006, 22: 1–47

12 Yaman F, Yakhno V G, Potthast R. A survey on inverse problems for applied sciences. Math Probl Eng, 2013, 2013: 976837

13 Honda N, Nakamura R, Potthast R, et al. The no-response approach and its relation to non-iterative methods in inverse scattering. Ann Mat Pura Appl, 2007, 187: 7–37

14 Hanke M, Kirsch A. Sampling methods. In: Handbook of Mathematical Methods in Imaging. New York: Springer, 2011, 502–550

15 Harrach B. Recent progress on the factorization method for electrical impedance tomography. Comput Math Methods Med, 2013, 2013: 425184

16 Grinberg N, Kirsch A. The linear sampling method in inverse obstacle scattering for impedance boundary conditions. J Inverse Ill-Posed Probl, 2002, 10: 171–185

17 Kirsch A, Liu X. A modification of the factorization method for the classical acoustic inverse scattering problems. Inverse Problems, 2014, 30: 035013
18 Kirsch A. Factorization of the far field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory. Inverse Problems, 1999, 15: 413–429
19 Kirsch A. The MUSIC-algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media. Inverse Problems, 2002, 18: 1025–1040
20 Kirsch A, Liu X. The factorization method for inverse acoustic scattering by a penetrable anisotropic obstacle. Math Methods Appl Sci, 2014, 37: 1159–1170
21 Bondarenko O, Liu X. The factorization method for inverse obstacle scattering with conductive boundary condition. Inverse problems, 2013, 29: 095021
22 Yang J, Zhang B, Zhang H. The factorization method for reconstructing a penetrable obstacle with unknown buried objects. SIAM J Appl Math, 2013, 73: 617–635
23 Haddar H, Joly P, Nguyen H M. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles: The scalar case. Math Models Methods Appl Sci, 2005, 15: 1273–1300
24 Aslanyrek B, Haddar H, Sahintrk H. Generalized impedance boundary conditions for thin dielectric coatings with variable thickness. Wave Motion, 2011, 48: 680–699
25 Bendali A, Lemrabet K. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. SIAM J Appl Math, 1996, 56: 1664–1693
26 Bourgeois L, Chaulet N, Haddar H. Identification of Generalized Impedance Boundary Conditions: Some Numerical Issues. Tech Report RR-7449. Paris: INRIA, 2010
27 Bourgeois L, Chaulet N, Haddar H. On simultaneous identification of the shape and generalized impedance boundary condition in obstacle scattering. SIAM J Sci Comput, 2012, 34: 1824–1848
28 Yang J, Zhang B, Zhang H. Reconstruction of complex obstacles with generalized impedance boundary conditions from far-field data. SIAM J Appl Math, 2014, 74: 106–124
29 Kleinman R E, Roach G F. On modified Green functions in exterior problems for the Helmholtz equation. Proc R Soc Lond Ser A, 1982, 383: 313–332
30 Martin P A. Integral-equation methods for multiple-scattering problems I: Acoustics. Quart J Mech Appl Math, 1985, 38: 105–118
31 Liu X, Zhang B, Hu G. Uniqueness in the inverse scattering problem in a piecewise homogeneous medium. Inverse Problems, 2010, 26: 015002
32 Liu X, Zhang B. Direct and inverse scattering problem in a piecewise homogeneous medium. SIAM J Appl Math, 2010, 70: 3105–3120
33 Bondarenko O, Kirsch A, Liu X. The factorization method for inverse acoustic scattering in a layered medium. Inverse problems, 2013, 29: 045010
34 Kirsch A, Liu X. Direct and inverse acoustic scattering by a mixed-type scatterer. Inverse Problems, 2013, 29: 065005
35 Liu X. The factorization method for scatterers with different physical properties. Discrete Contin Dyn Syst Ser S, 2015, 8: 563–577
36 Liu X. The factorization method for cavities. Inverse Problems, 2014, 30: 015006
37 Qin H H, Liu X. The interior inverse scattering problem for cavities with an artificial obstacle. Appl Numer Math, 2015, 88: 18–30
38 Hu G, Yang J, Zhang B, et al. Near-field imaging of scattering obstacles with the factorization method. Inverse Problems, 2014, 30: 095005
39 Orispää M. On point sources and near field measurements in inverse acoustic obstacle scattering. PhD Thesis. Finland: University of Oulu, 2002
40 Hu G, Kirsch A, Sini M. Some inverse problems arising from elastic scattering by rigid obstacles. Inverse Problems, 2013, 29: 015009
41 Hu G, Lu Y, Zhang B. The factorization method for inverse elastic scattering from periodic structures. Inverse Problems, 2013, 29: 115005
42 Potthast R. A study on orthogonality sampling. Inverse Problems, 2010, 26: 074015
43 Ito K, Jin B, Zou J. A direct sampling method to an inverse medium scattering problem. Inverse Problems, 2012, 28: 025003
44 Li J, Liu H, Zou J. Locating multiple multiscale acoustic scatterers. SIAM Multiscale Model Simul, 2014, 12: 927–952
45 Li J, Li P, Liu H, et al. Recovering multiscale buried anomalies in a two-layered medium. Inverse Problems, 2015, 31:
46 Chen J, Chen Z, Huang G. Reverse time migration for extended obstacles: Acoustic waves. Inverse Problems, 2013,

29: 085005
47 Liu K, Zou J. A multilevel sampling algorithm for locating inhomogeneous media. Inverse Problems, 2013, 29: 095003
48 Ito K, Jin B, Zou J. A direct sampling method for inverse electromagnetic medium scattering. Inverse Problems, 2013, 29: 095018
49 Chen J, Chen Z, Huang G. Reverse time migration for extended obstacles: Electromagnetic waves. Inverse Problems, 2013, 29: 085006
50 Li J, Liu H, Shang Z, et al. Two single-shot methods for locating multiple electromagnetic scatterers. SIAM J Appl Math, 2013, 73: 1721–1746
51 Li J, Liu H, Wang Q. Locating multiple multiscale electromagnetic scatterers by a single far-field measurement. SIAM J Imaging Sci, 2013, 6: 2285–2309

Recent progress on the factorization method for inverse acoustic scattering problems

LIU XiaoDong & ZHANG Bo

Abstract In this paper, we review recent progress on the factorization method for inverse acoustic scattering problems. Included are the classical factorization method for penetrable scatterers and generalized impedance boundary conditions, some modifications for mixed-typed scatterers, near-field measurements and avoiding interior eigenvalues.

Keywords **factorization method, acoustic, inverse scattering**

MSC(2010) **35P25, 35R30, 45Q05, 78A46**

doi: 10.1360/N012014-00238