



结构随机响应计算的一种数值方法

张旭方^{①*}, PANDEY Mahesh D.^①, 张义民^②

① 滑铁卢大学土木与环境工程学院, 滑铁卢 N2L 3G1, 加拿大;

② 东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110815

* E-mail: xufangzhang@gmail.com

收稿日期: 2010-04-23; 接受日期: 2010-10-29

摘要 应用降维数值积分和 C 型 Gram-Charlier 级数展开方法, 基于有限元理论讨论了随机结构响应概率分布的计算问题. 首先依据正交多项式权函数与随机变量概率密度函数的关系, 给出了随机响应统计矩计算的降维数值积分公式; 进而应用 C 型 Gram-Charlier 级数逼近获得了随机响应的概率密度函数; 提出了基于有限元方法求取结构随机响应概率分布的计算流程. 数值算例中介绍了平面十杆桁架结构最大位移的概率分布、由随机参数表征的某型车架固有频率计算和弯管结构随机 Von Mises 应力分析问题, 所得结果同蒙特卡罗数值模拟结果进行了对比验证. 结果表明: 文中计算流程能够获得较为准确的随机响应概率分布, 特别是对概率分布尾部的估计精度达到 10^{-4} ~ 10^{-3} 数量级, 为机械结构安全性分析与设计打下基础; 同时, 算法的计算效率较高, 与传统的数值模拟方法相比通常能够节约计算资源消耗两个数量级以上; 第三, 算法流程实现简单, 不需要计算结构响应对基本随机参数的梯度和二阶灵敏度信息, 也不需要结构有限元矩阵的修改, 因此可以充分发挥现有成熟有限元程序的优点, 在个人计算机上实现工程随机问题的分析与计算.

关键词

随机有限元
降维数值积分
Gram-Charlier 级数
概率分布

随着机械设计方法的不断丰富与发展, 考虑随机因素对机械构件性能的影响在产品的设计过程中愈来愈受到重视. 对于机械结构来说, 随机性的来源大致可归结于三个方面: 尺寸参数的容许公差和加工误差; 材料属性的不确定性; 产品服役期内的外载荷. 产品的制造材料和工作环境(激励)受到生产条件和使用条件的制约而通常视为产品设计的约束. 机械产品概率设计的理论和方法能够合理选择几何尺寸的概率分布参数而获得理想的结构响应(应力、应变、位移等), 以改善和提高产品的工作性能. 因此, 应用现有的确定性力学分析方法, 结合概率论与数理统

计理论, 给出合理的结构参数统计特征, 以保证产品能够在特定的工作环境(包括外部载荷、温度、湿度等工况信息)下, 以规定寿命时限和概率水平达到规定的工作性能指标, 是对机械产品开展安全性分析与设计工作的基本目的.

结构随机响应分析的算法在随机结构分析与设计的发展过程中一直占有着十分重要的地位. 特别是随着有限元理论的不断成熟和大型商业有限元软件的广泛应用, 使得产品设计周期大幅缩短, 设计效率不断提高. 因此, 结合有限元理论开展随机问题的分析和设计是工程随机问题发展的必然趋势^[1].

关于随机有限元方法的探讨最早出现在 20 世纪 70 年代^[2], 直接将有限单元法与蒙特卡罗数值模拟技术相结合, 以考察随机参数的分散性对于结构整体性能的影响^[3, 4]. 蒙特卡罗方法是解决随机问题的通用方法, 思想简单, 而且数值模拟的结果随着抽样次数的增加而趋近于问题的理论解. 其主要缺点是需要不断的对原有问题进行重分析来获得随机响应的样本点, 因此通常需要样本空间内数量庞大的采样点(通常为 $10^4 \sim 10^6$ 数量级)来获得高精度的数值统计结果. 因此, 即使在计算机硬件技术高速发展的今天, 基于蒙特卡罗模拟技术的随机有限元程序也需要在大型计算集群上面才能完成. 通常, 一方面蒙特卡罗方法经常作为检验方法来验证其他算法的有效性和计算精度; 另一方面, 许多学者不断地改进抽样技术^[5-7], 提高样本空间内的抽样效率, 在保证计算精度前提下使得计算机模拟时间和资源的消耗不断降低.

由于蒙特卡罗数值模拟方法的局限性, 一种基于小参数思想的摄动随机有限元方法不断发展并逐渐成熟起来^[8-11]. 摄动有限元方法通过构造求解结构响应、响应一阶灵敏度方程和响应二阶灵敏度方程, 结合 Taylor 级数展开式, 可以获得随机响应的均值、标准差和协方差等前二阶统计矩. 因此, 摄动法对于工程中静、动态响应概率统计特性求解是一种简单、有效的方法. 特别是对线性或拟线性问题, 摄动随机有限元方法可以获得随机响应较为准确的均值和标准差估计量. 但同时, 摄动随机有限元方法的求解精度随着随机参数变异系数(COV, 标准差与均值之比)的增大和结构方程非线性程度的增加而变差. 此外, 由于摄动有限元方程建立过程中忽略了基本随机变量的概率分布信息, 因此当基本参数分布类型不同但具有相同的统计矩时, 获得的结构随机响应的矩估计也是相同的. 与蒙特卡罗随机有限元法相比较, 摄动随机有限元法不再需要通过数量巨大的结构重分析来获得随机响应的统计矩, 相比之下计算效率提高许多. 但摄动随机有限元方法对于随机响应的高阶统计矩估计精度不高; 并且在求解过程中需要计算结构刚度矩阵对基本随机变量的雅克比矩阵和海塞矩阵.

20 世纪 90 年代初期, 由 Spanos 等学者发展和讨论了谱随机有限元方法及其在工程问题中的应用^[12-14]. 根据函数正交展开思想, 谱随机有限元方法将随机

响应表示为随机函数空间基函数的级数展开形式, 然后根据基函数的正交性求取级数展开系数, 进而获得随机响应的统计矩. 随着正交展开的阶次的增加, 谱随机有限元方法求解精度也随之提高, 并且能够适应随机变量变异系数较大的情况. 但通常为满足计算精度要求, 正交级数展开的阶次需要 10 阶以上^[15]. 因此, 虽然谱随机有限元方法能够获得高精度的响应统计矩, 但是嵌套在求解过程中的确定性有限分析的计算量同样也是不容忽视的. 对比摄动随机有限元, 谱随机有限元方法能够保证高阶矩的求解精度, 而数值计算量则介于摄动随机有限元和蒙特卡罗随机有限元之间.

此外, 广义响应面方法也是解决随机工程问题的有效方法之一. 特别是结构响应由有限元程序表征时, 由广义响应面方程描述结构响应与基本随机参数间的隐式函数关系, 通过试验设计方法获得结构响应的典型值, 结合数值优化方法获得广义响应面的系数, 进而应用广义响应面方程替代原有随机有限元模型完成后续随机问题分析与计算. 因此, 广义响应面方法的特点是可以根据求解问题的非线性强弱方便的调整响应面方程的非线性项阶次, 进而可以获得精度满意的函数逼近. 同前面论述的随机有限元方法相比较, 广义响应面方法的确定性有限元程序计算量通常能够控制在百次之内, 因此对于一般随机问题的分析可以在个人计算机上面实现. 但是由于采用试验设计方法, 所求得的结构广义响应面方程通常仅在变量的局部定义域内成立, 在定义域以外的部分, 响应面函数的逼近精度迅速变差. 因此当结构设计参数改变时, 不断的重新进行试验设计和结构响应面方程的建立的是不可避免的.

综上所述, 各种随机有限元思想的实现和应用促进了工程随机问题分析与计算的发展. 然而方法各有利弊: 蒙特卡罗模拟方法简便易行, 可以获得随机响应统计矩、概率分布等信息, 但占用的计算资源巨大; 摄动随机有限元计算效率高, 但要求解响应对基本随机参数的一阶和二阶灵敏度, 并且对于高阶统计矩的估计精度不理想; 谱随机有限元方法能够获得较为准确的高阶矩估计, 但需要进行结构有限元表征矩阵的修改; 当结构设计参数改变时, 广义响应面法需要重新进行函数拟合. 因此, 对于随机有限元方法而言, 一方面在保证求解精度的前提下设法减少确定性有限元调用次数, 以节省计算资源消

耗和提高设计效率;另一方面是能够获得结构随机响应的高阶统计矩、概率分布的准确估计,满足结构安全性分析与设计的精度要求。

本文以结构随机响应概率分布(概率密度函数和概率分布函数)的求取为主要内容,应用降维数值积分法获得结构响应的各阶统计矩;应用C型Gram-Charlier (CGC)级数求取随机响应的概率分布.数值算例讨论了平面十杆桁架最大位移的概率分布、某型车架固有频率的随机分布、以及由随机参数表征的弯管结构随机Von Mises应力计算等工程问题。

为了便于阐述和分析,程序流程图如图1所示.图1所示的流程图中,结构有限元模型的建立(Finite Element (FE) model)由现有成熟的商业有限元软件实现;程序计算中所需的数值积分点(Numerical Integration (NI) points)将通过考察正交多项式权函数与随机变量概率密度函数关系给出计算公式;随机响应统计矩的估计(Moment computation)由降维积分方法求得;随机响应概率分布的求取则通过CGC级数逼近给出;最后,所有数值计算结果将应用蒙特卡罗数值模拟方法进行对比和验证。

1 随机响应统计矩

假设响应 $Y(X)$ 是由随机参数向量 $X=[X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ 表征的任意函数,则 $Y(X)$ 的 j 阶统计矩定义为

$$m_Y^{(j)} = \mathcal{E}[Y^j(X)] = \int Y^j(X) dF(X), \quad (1)$$

其中, $\mathcal{E}(\cdot)$ 为数学期望算子, $F(X)$ 为 X 的联合分布函数。

1.1 降维积分法

随机函数展开的降维法由学者Rahman等人^[16, 17]

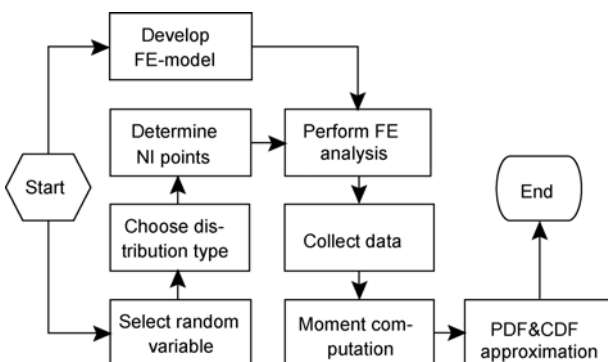


图1 结构随机响应计算流程图

提出,给出了方法的详细公式推导过程和误差定义.由降维法, n 维函数 $Y(X)$ 可表示为

$$Y(X) \equiv \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i(X) - (n-1)Y(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), \quad (2)$$

其中, $\hat{Y}_i(X) = Y(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)$.定义 $Y_0 = Y(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$,将方程(2)代入方程(1),并结合二项式定理有

$$m_Y^{(j)} = \mathcal{E}[Y^j(X)] \equiv \sum_{l=0}^j C_j^l \mathcal{E} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i(X) \right]^l - [(n-1)Y_0]^{j-l} \right\}, \quad (3)$$

其中, $C_j^l = \frac{j!}{l!(j-l)!}$ 为展开系数.进一步应用二项式定理,展开项 $\left[\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i(X) \right]^l$ 可写为

$$\left(\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \right)^l = \sum_{i_1=0}^l C_l^{i_1} \sum_{i_2=0}^{l-i_1} C_{l-i_1}^{i_2} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{l-\sum_{k=1}^{n-2} i_k} C_{l-\sum_{k=1}^{n-2} i_k}^{i_{n-1}} \times \hat{Y}_1^{i_1} \hat{Y}_2^{i_2} \cdots \hat{Y}_{n-1}^{i_{n-1}} \hat{Y}_n^{l-\sum_{k=1}^{n-1} i_k}. \quad (4)$$

由方程(3)和(4), $Y(X)$ 的 j 阶原点矩 $m_Y^{(j)}$ 可写为

$$m_Y^{(j)} = \mathcal{E}[Y^j(X)] \equiv \sum_{l=0}^j C_j^l \mathcal{E} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i(X) \right]^l - [(n-1)Y_0]^{j-l} \right\} \\ = \sum_{l=0}^j C_j^l \sum_{i_1=0}^l C_l^{i_1} \sum_{i_2=0}^{l-i_1} C_{l-i_1}^{i_2} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{l-\sum_{k=1}^{n-2} i_k} C_{l-\sum_{k=1}^{n-2} i_k}^{i_{n-1}} m_{\hat{Y}_1}^{(i_1)} m_{\hat{Y}_2}^{(i_2)} \cdots \\ \times m_{\hat{Y}_{n-1}}^{(i_{n-1})} m_{\hat{Y}_n}^{(l-\sum_{k=1}^{n-1} i_k)} - [(n-1)Y_0]^{j-l}, \quad (5)$$

其中, $m_{\hat{Y}_i}^{(q)} = \mathcal{E}[Y^q(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)]$.

1.2 数值积分公式

由(5)式所示结果可知:多维函数 $Y(X)$ 的统计矩可由一维函数矩 $m_{\hat{Y}_i}^{(q)}$ 来表示.换句话说,如果能够获得一维函数 $\hat{Y}_i(X) = Y(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)$ 的各阶原点矩,则 $Y(X)$ 的各阶原点矩即可求得。

当随机变量 X_i 的概率密度函数 $f(X_i)$ 存在时,函数 $\hat{Y}_i(X)$ 的原点矩定义为

$$m_{\hat{Y}_i}^{(q)} = \mathcal{E}[Y^q(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)] \\ = \int Y^q(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) f(X_i) dX_i. \quad (6)$$

应用数值积分法, 方程(6)可进一步离散为

$$m_{Y_i}^{(q)} = \int Y^q(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) f(X_i) dX_i \\ \cong \sum_{k=1}^N w_i^{(k)} Y^q(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i^{(k)}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n), \quad (7)$$

其中, $w_i^{(k)}$, $X_i^{(k)}$ 分别为第 k 个高斯型数值积分权值和积分点; N 为数值积分阶次. 当随机变量 X_i 为服从正态分布的随机变量时, $w_i^{(k)}$ 和 $X_i^{(k)}$ 分别为高斯-埃米特型数值积分权值和积分点.

对于非正态型随机变量, 可首先通过变换^[18]将其转换为当量正态变量, 然后应用埃米特积分点和权值与(7)式相结合来计算函数的原点矩. 非正态随机变量的当量正态化过程, 需要在离散的各个数值积分点进行; 并且变换函数通常为非线性函数, 增加计算量并降低求解精度^[19]. 通过考察正交多项式权函数同常用的概率分布密度函数的关系, 可推导针对不同分布类型的数值积分公式来避免当量正态化转换.

考虑随机变量 x 为一服从两参数(形状参数 α 和尺度参数 β)威布尔分布的随机变量, 则 x 的概率密度函数为

$$f(x) = \alpha/\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp[-(x/\beta)^\alpha]. \quad (8)$$

则 x 的任意函数 $h(x)$ 的 q 阶原点矩可表示为

$$\mathcal{E}[h^q(x)] = \int_0^\infty h^q(x) \alpha/\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp[-(x/\beta)^\alpha] dx \\ = \int_0^\infty h^q(x) \exp[-(x/\beta)^\alpha] d[-(x/\beta)^\alpha]. \quad (9)$$

设 $y=(x/\beta)^\alpha$, 则方程(9)可进一步写为

$$\mathcal{E}[h^q(x)] = \int_0^\infty h^q(x) \alpha/\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp[-(x/\beta)^\alpha] dx \\ = \int_0^\infty h^q(\beta y^{1/\alpha}) \exp(-y) dy. \quad (10)$$

考察(10)式可知: 威布尔随机变量的函数统计矩求取问题可以转化为指数分布条件下 $h(\cdot)$ 的原点矩计算问题. 同时考虑拉盖尔正交多项式以函数 $\exp(-x)$ 为权函数, 因此由拉盖尔正交多项式求得的积分权值与积分点可以方便的求解由威布尔随机变量表征的随机函数概率统计矩的计算问题. (11)式可写为

$$\mathcal{E}[h^q(x)] = \int_\mu^\infty h^q(x) \alpha/\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp[-(x/\beta)^\alpha] dx \\ \cong \sum_{k=1}^N w^{(k)} h^q\left(\mu + \beta \sqrt[q]{y^{(k)}}\right), \quad (11)$$

其中, $y=(x/\beta)^\alpha$, $w_i^{(k)}$ 和 $X_i^{(k)}$ 分别为拉高斯-拉盖尔型数值积分权值和积分点. 根据(8)~(11)式的思想和推导方法, 可以获得包括均匀分布、对数正态分布等多种常用分布的数值积分公式, 总结列于表 1 中.

表 1 给出了几种常用分布类型所对应的正交多项式与数值积分公式. 以均匀分布为例, 对比考察勒让德正交多项式的权函数与均匀分布概率密度函数后, 通过积分变换可以得到当随机变量 X_i 为 $[a, b]$ 区间的均匀分布随机变量时, 其任意函数各阶统计矩的计算可通过积分公式 $\sum_{k=1}^N w_i^{(k)} \hat{Y}_i\left(\frac{b-a}{2} X_i^{(k)} + \frac{a+b}{2}\right)$ 来实现, 其中 $w_i^{(k)}$ 和 $X_i^{(k)}$ 分别为高斯-勒让德型积分权值和积分点. 特别的, 当积分公式中并且包含有 N (通常 N 取为 3~5) 个数值积分点时, 表 1 中给出的高斯型数值积分公式具有 $2N-1$ 阶代数精度^[20].

1.3 讨论

由以上内容讨论可知: 降维数值积分法的核心思想是将多维积分问题转化为一维积分的叠加形式, 进而提高计算效率. 文中的“数值积分公式”部分, 给出了针对不同分布类型的高斯型数值积分公式的推导过程, 避免了非正态分布随机变量的当量正态化变换. 对于随机函数统计矩的计算效率问题, 特别是当结构随机响应通过有限元程序实现时, 减少有限元程序的调用次数是提高计算效率的关键.

对于由(6)式所描述的一维数值积分, 借助表 1 给出的高斯型数值积分公式, 需调用有限元分析 N_i 次. 因此由 n 维随机向量 $\mathbf{X}$ 表征的结构响应 $Y(\mathbf{X})$ 的统计矩计算则需要有限元调用次数为

表 1 正交多项式与高斯型数值积分公式

Distribution	Polynomial	Integration formula
Uniform	Legendre	$\sum_{k=1}^N w_i^k \hat{\eta}_i\left(\frac{b-a}{2} X_i^k + \frac{a+b}{2}\right)$
Normal	Hermite	$\sum_{k=1}^N w_i^k \hat{\eta}_i(\mu + \sigma X_i^k)$
Lognormal ^{a)}		$\sum_{k=1}^N w_i^k \hat{\eta}_i(\exp(\tilde{\mu} + \tilde{\sigma} X_i^k))$
Exponential	Laguerre	$\sum_{k=1}^N w_i^k \hat{\eta}_i(x_i^k/\lambda)$
Rayleigh		$\sum_{k=1}^N w_i^k \hat{\eta}_i(\sigma \sqrt{2} x_i^k)$
Weibull		$\sum_{k=1}^N w_i^k \hat{\eta}_i(\beta \sqrt[q]{x_i^k})$

a) $\tilde{\sigma} = \ln\left[1 + \frac{\sigma^2}{\mu}\right]$, $\tilde{\mu} = \ln(\mu) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2$.

$$N_{FE} = 1 + \sum_{i=1}^n N_i. \quad (12)$$

特别地, 当基本随机变量的密度函数为对称分布时, 即高斯型数值积分点中包含有零点时 (例如正态分布和均匀分布等), 有限元调用次数可减少为

$$N_{FE} = 1 + \sum_{i=1}^n (N_i - 1). \quad (13)$$

对每个随机变量采用 N_i 个高斯数值积分点, 则直接数值积分法重分析次数为 N_i^n 次; 而由降维数值积分法, 包含在原问题中的结构重分析次数最少为 $1 + \sum_{i=1}^n (N_i - 1)$ 次. 对比之下, 计算效率提高许多, 特别是当随机向量维数较大时计算量的减少更为明显. 例如以含有 6 个随机变量的工程问题为例, 每个随机变量采用 5 个数值积分点, 则直接数值积分法需要的结构重分析次数为 $6^5 (=7776)$ 次, 而降维数值积分方法最多为 $31 (=5 \times 6 + 1)$ 次, 计算量仅为直接数值积分法的千分之四.

2 随机响应的概率分布

工程随机结构可靠性计算的核心问题就是求取结构安全裕度函数的概率分布^[21, 22]. 对于结构响应 $Y(\mathbf{X})$ 的概率密度函数的逼近问题, A 型 Gram-Charlier 级数由于其简便可行而通常被采用. 其定义为^[23, 24]:

$$f_Y(Y) = f_0(Y) \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa_j H_j(Y^*) \right], \quad (14)$$

其中, κ_j 为级数展开系数; $H_j(\cdot)$ 为第 j 阶埃米特正交多项式; Y^* 为响应 $Y(\mathbf{X})$ 的等价标准化变量; $f_0(Y)$ 为标准正态概率密度函数.

由埃米特正交多项式的定义可求得前六阶级数展开系数 κ_j ($j=1, 2, \dots, 6$) 为

$$\begin{cases} \kappa_1 = \kappa_2 = 0, \\ \kappa_3 = \mu_Y^{(3)} / \sigma_Y^3, \\ \kappa_4 = \mu_Y^{(4)} / \sigma_Y^4 - 3, \\ \kappa_5 = \mu_Y^{(5)} / \sigma_Y^5 - 10\mu_Y^{(3)} / \sigma_Y^3, \\ \kappa_6 = \mu_Y^{(6)} / \sigma_Y^6 - 15\mu_Y^{(4)} / \sigma_Y^4 + 30, \end{cases} \quad (15)$$

其中, σ_Y 为 $Y(\mathbf{X})$ 的标准差; $\mu_Y^{(i)}$ 为响应的 i 阶中心矩.

由此, 可应用上文阐述的方法求取随机应 $Y(\mathbf{X})$ 各阶统计矩, 然后将方程(14)中级数进行 k 阶截断, 由(15)式计算级数展开系数后, 可方便求得 $Y(\mathbf{X})$ 的概

率密度函数. 虽然 A 型 Gram-Charlier 级数简便易行, 但当随机变量的三阶矩和四阶矩超出一定范围时, 其逼近所得的概率密度函数就会出现负值, 导致级数结果不满足基本的概率公理. 因此鉴于 A 型 Gram-Charlier 级数的不足, 文中应用 CGC 级数求取响应的概率密度函数. CGC 级数定义为

$$f_Y(Y) = \frac{\exp \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \gamma_j H_j(Y^*) \right]}{\int \exp \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \gamma_j H_j(Y^*) \right] dY}, \quad (16)$$

其中, γ_j 为级数展开系数. 同 A 型 Gram-Charlier 级数相比较, CGC 级数为指数形式, 保证其概率密度值恒为正值; 同时通过归一化处理, 亦保证了概率密度在函数定义域内积分恒为 1. 此外 CGC 级数的优势还在于其不但对于拟正态分布能够获得高精度的数值结果, 而且对于偏离正态分布的分布类型亦能获得满意结果.

当 CGC 级数的展开次数为 k 阶时, 其逼近系数向量 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k]^T$ 的求取可通过求解下面的线性方程组获得

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}, \quad (17)$$

其中, $\mathbf{B}$ 为 k 维列向量, $b_1=0$, $b_m = -(m-1) \psi_{m-2}$ ($m=2, 3, \dots, k$); $\mathbf{A}$ 为 $k \times k$ 维对称矩阵:

$$a_{ij} = \sum_{m=0}^{i+j-2} \frac{1}{m!} \Delta_{i-1, j-1, m} \psi_m, \quad (18)$$

其中, $\Delta_{i-1, j-1, m}$ 定义为

$$\Delta_{i-1, j-1, m} = \begin{cases} \prod_{p=i, j, m} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q-p+1)} & i+j+m \text{ 为偶数, 且 } q = \frac{i+j+m}{2} \geq i, j, m, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad (19)$$

ψ_m 为埃米特矩, 可应用下面公式求得

$$\psi_m = \int H_m(Y) f_Y(Y) dY = \mathcal{E}[H_m(Y)]. \quad (20)$$

当 $k=4$ 时, 对称阵 $\mathbf{A}$ 的上半角元素和向量 $\mathbf{B}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_Y & m_Y^{(2)} - 1 & m_Y^{(3)} - 3\mu_Y \\ m_Y^{(2)} & m_Y^{(3)} - \mu_Y & m_Y^{(4)} - 3m_Y^{(2)} & \\ m_Y^{(4)} - 2m_Y^{(2)} + 1 & m_Y^{(5)} - 4m_Y^{(3)} + 3\mu_Y & & \\ m_Y^{(6)} - 6m_Y^{(4)} + 9m_Y^{(2)} & & & \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2\mu_Y & -3(m_Y^{(2)} - 1) \end{bmatrix}_{4 \times 1}^T. \quad (22)$$

对(16)式积分, 即可获得随机响应 $Y(\mathbf{X})$ 的概率分布函数:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \frac{\int_{-\infty}^y \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \gamma_j H_j(Y^*)\right] dY}{\int \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \gamma_j H_j(Y^*)\right] dY}. \quad (23)$$

3 数值算例

为阐述方法的有效性和计算精度, 选取三个工程随机问题的实例进行分析和说明, 蒙特卡罗随机模拟方法用来验证计算结果的准确性.

3.1 平面十杆桁架结构

首先考察基本随机变量的不同分布状态对方法求解精度的影响. 考虑某平面十杆桁架结构如图2所示, 所有杆件假设均匀且横截面积相同. 节点1和2处施加平面约束, 在节点3处施加竖直向上载荷 F_{3Y} 、节点5处同时施加竖直方向载荷 F_{5X} 和水平方向载荷 F_{5Y} . 结构随机性来源于材料弹性模量 $E(\text{GPa})$ 、杆件横截面积 $A(\text{mm}^2)$ 以及结构的外激励 $F_{3Y}(\text{N})$ 、 $F_{5X}(\text{N})$ 和 $F_{5Y}(\text{N})$. 为考察分布类型对求解精度的影响, 假设 E 和 A 为服从正态分布随机变量, 外激励 $F_{\bullet}$ 分别为服从对数正态和威布尔分布的随机变量, 参数列于表2中.

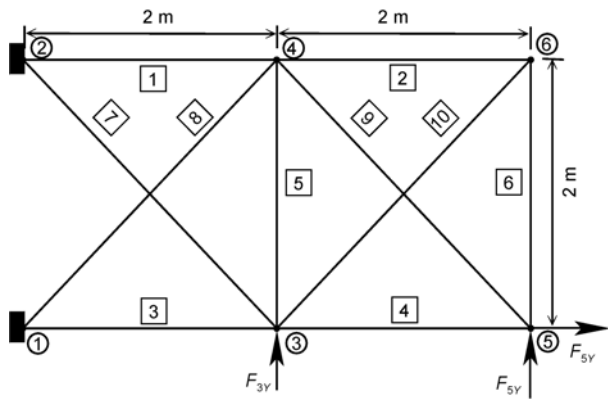


图2 平面十杆桁架结构

表2 十杆桁架结构随机参数统计特征

Distribution	Normal	Normal	Case 1			Case 2		
			Lognormal			Weibull		
Variable	E	A	F_{3Y}	F_{5X}	F_{5Y}	F_{3Y}	F_{5X}	F_{5Y}
Mean	210	100	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Std. D	10.5	5	50	50	50	50	50	50

当激励 $F_{\bullet}$ 为威布尔分布随机变量时(均值=1000 N, 标准差=50 N), 威布尔分布密度函数的参数 $\alpha=24.950$, $\beta=1022.1$. 每个随机参数选用5个数值积分点, 根据随机参数分布类型并结合表1中数值积分公式选取高斯型数值积分点列于表3中.

如表3所示, 当每个随机参数选用5个高斯型数值积分点时, 所需结构重分析(有限元程序调用)次数为 $24(=4+4+5+5+5+1)$ 次. 因此, 由图1中所示的算法流程, 首先根据表3中所给的数值积分网格点, 调用桁架结构的有限元求解程序即可获得结构最大位移响应的24个样本点; 将获得的随机响应样本点和高斯型数值积分权值代入(7)式中, 可求得一维函数 $\hat{Y}_i(\mathbf{X}) = Y(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, X_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)$ 各阶原点矩; 然后将各阶一维函数原点矩汇总代入(5)式后求得结构最大位移响应的概率统计矩. 对于CGC级数展开阶次 k 的选取, 当 $k=4$ 时, 由(21)式中矩阵 $\mathbf{A}$ 的表达式将包含有随机响应前六阶概率统计矩, 这将会很好的适应随机响应密度函数逼近问题, 因此文中所用CGC级数展开系数为4阶. 由(21)和(22)式计算矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 后解得CGC级数展开系数 γ . 最终求得该桁架结构位移响应峰值的概率密度函数和分布函数如图3所示. 为了便于对比说明, 计算结果同样本量为 10^4 次的蒙特卡罗数值模拟(MCS)结果进行对比验证.

由图3可知: 应用文中给出的算法流程获得结构最大位移的概率分布同蒙特卡罗数值模拟结果吻合较好, 表明算法不但对于正态分布随机变量, 对于对数正态、威布尔分布等非正态随机变量, 都能给出较为准确的随机响应概率分布. 此外, 图3给出了半对数坐标下结构最大位移响应的分布函数(CDF)曲线, 目的是为了能够更好地考察算法对响应概率分布尾部的估计能力. 对于机械结构安全性分析和设计而言, 对响应分布函数的尾部状态估计的好坏是衡量和评价算法求解精度的重要指标. 由图3可知, 同 10^4 次蒙特卡罗相比较, 算法亦能够对小概率事件, $P \in [10^{-4}, 10^{-3}]$, 给出可靠估计.

表 3 高斯型数值积分网格点

Variable	No.	Numerical integration points				
		E	A	F_{3Y}	F_{5X}	F_{5Y}
E	1	180.00	100.00	1000.0	1000.0	1000.0
	2	240.00	100.00	1000.0	1000.0	1000.0
	3	195.77	100.00	1000.0	1000.0	1000.0
	4	224.23	100.00	1000.0	1000.0	1000.0
A	5	210.00	85.715	1000.0	1000.0	1000.0
	6	210.00	114.28	1000.0	1000.0	1000.0
	7	210.00	93.222	1000.0	1000.0	1000.0
	8	210.00	106.78	1000.0	1000.0	1000.0
Case 1	F_{3Y}	9	210.00	100.00	998.75	1000.0
		10	210.00	100.00	865.88	1000.0
		11	210.00	100.00	1152.0	1000.0
		12	210.00	100.00	933.34	1000.0
		13	210.00	100.00	1068.8	1000.0
	F_{5X}	14	210.00	100.00	1000.0	998.75
		15	210.00	100.00	1000.0	865.88
		16	210.00	100.00	1000.0	1152.0
		17	210.00	100.00	1000.0	933.34
		18	210.00	100.00	1000.0	1068.8
	F_{5Y}	19	210.00	100.00	1000.0	1000.0
		20	210.00	100.00	1000.0	865.88
		21	210.00	100.00	1000.0	1152.0
		22	210.00	100.00	1000.0	933.34
		23	210.00	100.00	1000.0	1068.8
Case 2	F_{3Y}	9'	210.00	100.00	968.89	1000.0
		10'	210.00	100.00	1036.4	1000.0
		11'	210.00	100.00	1075.9	1000.0
		12'	210.00	100.00	1105.5	1000.0
		13'	210.00	100.00	1131.5	1000.0
	F_{5X}	14'	210.00	100.00	1000.0	968.89
		15'	210.00	100.00	1000.0	1036.4
		16'	210.00	100.00	1000.0	1075.9
		17'	210.00	100.00	1000.0	1105.5
		18'	210.00	100.00	1000.0	1131.5
	F_{5Y}	19'	210.00	100.00	1000.0	1000.0
		20'	210.00	100.00	1000.0	1036.4
		21'	210.00	100.00	1000.0	1075.9
		22'	210.00	100.00	1000.0	1105.5
		23'	210.00	100.00	1000.0	1131.5
Mean Value	24	210.00	100.00	1000.0	1000.0	1000.0

3.2 某车架固有频率的随机分布

算例 3.1 考察了不同分布类型对结果计算精度的影响. 算例 3.2 将考察算法在求解结构固有频率方面的应用. 某车架如图 4 所示, 结构有限元模型如图 5 所示. 车架采用壳单元建模并假设各个部件具有相同厚度 $t(\text{mm})$. 车架主梁长为 $L(\text{mm})$, 各个横梁等间

距, 即 $l=L/6$; 材料密度为 $7.89\times10^3\text{ kg/m}^3$. 有限元模型共包含 2820 个四边形单元. 结构随机因素参数的考虑包括几何尺寸(主梁长 L 、主梁高 $H(\text{mm})$ 、车架宽 $W(\text{mm})$ 、横梁高 $h(\text{mm})$ 、腹板宽 $w(\text{mm})$ 、钢板厚度 t)和材料属性(如弹性模量 $E(\text{GPa})$ 、泊松比 ν)等;随机变量的分布参数列于表 4 中.

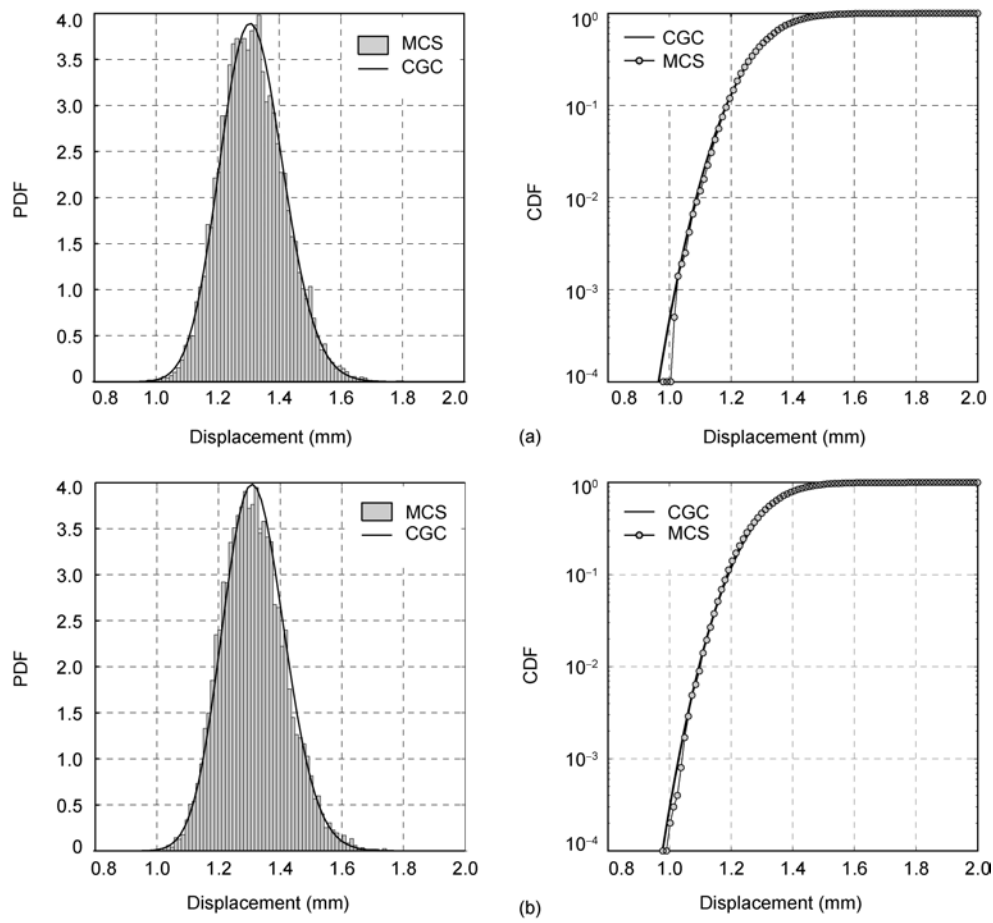


图 3 结构最大位移的概率分布
(a) 对数正态分布; (b) 威布尔分布

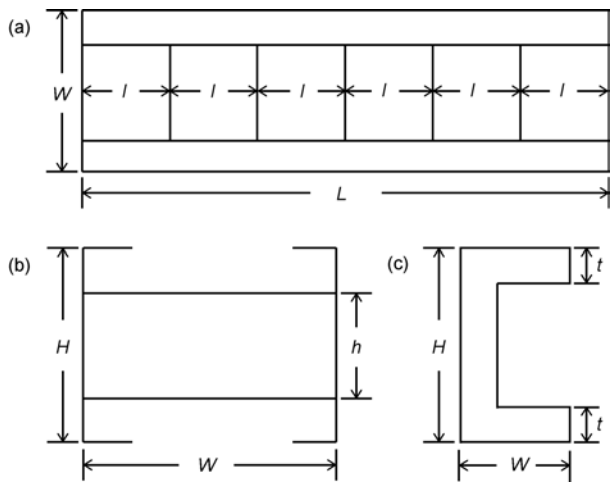


图 4 车架结构俯
(a) 视图; (b) 侧视图; (c) 主梁截面

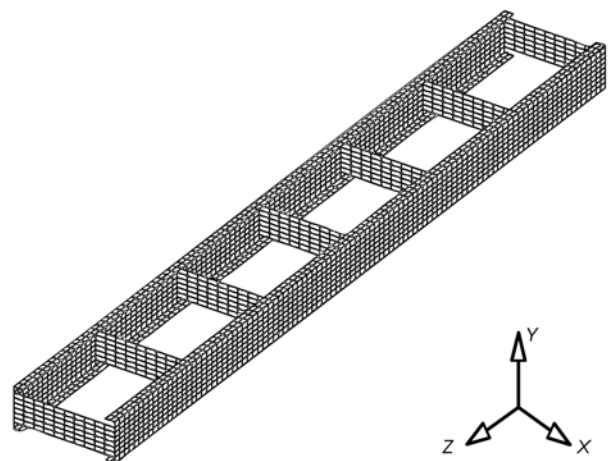


图 5 车架有限元网格图

表 4 车架结构随机参数统计特征

Variable		Distribution	Mean	Std. D	COV
Material properties	ν	Normal	0.3	0.345	0.115
	E	Normal	210	7.350	0.035
Geometrical dimensions	t	Normal	5	0.150	0.030
	w	Normal	45	4.725	0.105
	h	Normal	100	6.500	0.065
	H	Normal	140	11.90	0.085
	W	Normal	500	17.50	0.035
	L	Normal	3600	90.00	0.025

图 6 中给出了略去前六阶刚体模态后车架一阶和二阶固有频率的概率分布, 并将数值结果同蒙特卡罗方数值模拟结果进行了对比. 算例中, 蒙特卡罗方数值模拟次数为 10^4 次, 以 5 s/次的速度可估算蒙特卡罗方模拟需时大约 14 h. 同时, 由于所有随机参数均服从正态分布, 采用 5 点数值积分, 则由(13)式可知本文方法所需的有限元重分析次数为 33 ($=8 \times 4 + 1$)次, 需时约为 165 s.

由图 6 可知: CGC 法和蒙特卡罗方数值模拟结果吻合较好, 即 CGC 法具有较好的计算精度; 而就计算效率而言, 蒙特卡罗方法需要的机时约为本文算法的 $300(10^4/33)$ 倍. 同时工程计算中为保证对小概率事件的估计精度, 蒙特卡罗方方法的模拟次数通常为 $10^5 \sim 10^6$ 数量级, 甚至更多; 而 CGC 法所需的重分析次数仅为 33 次 (以本算例为例), 相比较之下, 本文方法通常能够节省计算资源消耗两个数量级以上.

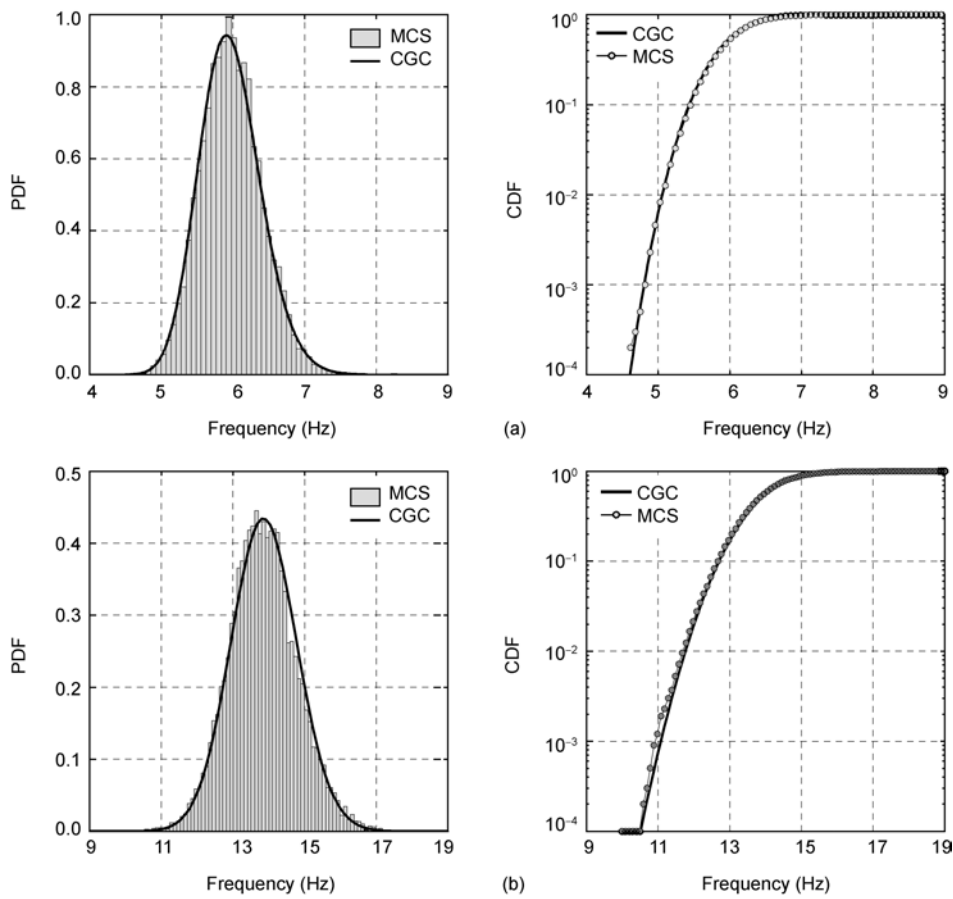


图 6 结构固有频率的概率分布
(a) 一阶固有频率; (b) 二阶固有频率

3.3 弯管应力的随机分布

算例 3.2 考察了算法在求取随机结构固有频率概率分布中的应用. 诚然固有频率是考察机械结构、特别是遭受动态激励的工程结构响应的重要指标. 但对于算法与有限元程序结合的讨论还局限于总体层次, 即针对有限元模型内部节点层次随机响应的考察还有欠缺. 因为大量的工程实践表明, 结构的破坏多由于结构局部应力水平高或者动载荷作用下局部应力幅变化大等因素引起构件的拉伸、剪切或者疲劳破坏. 因此结构内部关键部位节点或单元的应力随机分布状态是算例 3.3 的考察重点.

考虑某内压作用下的 90°弯管结构如图 7(a)所示, 该弯管结构多见于压力管道或压力容器的连接部. 其破坏多表现为由于内部介质腐蚀而造成局部应力集中, 或者由于输送介质压力的波动而引发裂纹导致管壁泄露.

为提高计算效率, 选取二分之一结构体建模, 并应用六面体单元划分网格后, 结构有限元模型中共含有 5355 个节点. 为便于说明, 划分网格后将结构单元编号如图 7(b)所示. 即, 沿管壁内部曲线 AE 上共分布有单元号为 No.1~No.50 的 50 个单元; 沿内壁弧线 CF 上分布着单元号为 No.26, No.76, ..., No.976 的共 20 个单元; 而在管壁厚度 t 上划分了 4 层单元; 则结构有限元模型中共包含有 4000 ($50 \times 20 \times 4$) 个六面体单元. 由于 Von Mises 应力在工程结构失效判断中应用较为广泛, 因此选取结构的 Von Mises 应力为考察对象进行随机应力计算.

根据确定性结构受力状态分析可知: 在管壁厚度方向上, 管壁内部单元的 Von Mises 值大于与之相邻的外层单元 (在管壁厚度方向上共划分了 4 层单元); 在图 7(b)所示的单元号分布图中, 弧 BD 段上 C 点 Von Mises 值最高, 然后向端点 A 和 E 点依次降低; 在 CF 弧段上 Von Mises 应力由 C 点向 F 点依次降低. 因此 C 点为结构上 Von Mises 应力的峰值点, 为危险区域的核心. 算例中随机因素的考察包括结构的几何尺寸(管道直径 $D(\text{mm})$ 、管壁厚 $t(\text{mm})$ 和弯管半径 $R(\text{mm})$), 材料属性(材料弹性模量 $E(\text{GPa})$ 和泊松比 ν), 以及管道内部介质压力 $P(\text{MPa})$. 随机参数的概率统计特征列于表 5 中.

根据表 5 基本随机参数分布信息, 由表 1 中给定的正态随机变量数值积分公式, 生成类似表 3 中给出

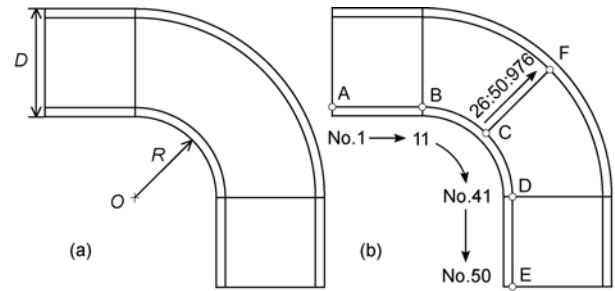


图 7 弯管结构
(a) 结构示意图; (b) 单元号分布图

表 5 内压弯管结构的随机参数统计特征

Variable		Distribution	Mean	Std. D	COV
Material properties	ν	Normal	0.3	0.315	0.105
	E	Normal	210	24.15	0.115
Geometrical dimensions	t	Normal	10	0.35	0.035
	D	Normal	160	4.00	0.025
	R	Normal	100	5.50	0.055
Pressure	P	Normal	15	0.48	0.032

的高斯-埃米特型数值积分网格点, 调用有限元程序进行 $25(=4 \times 6 + 1)$ 次确定性有限元分析, 收集整理响应样本点, 应用文中计算方法考察了图 7(b)中的弯管内壁 A、B 和 C 点在恒定内压作用下的随机 Von Mises 应力的概率分布, 并应用蒙特卡罗数值模拟方法对所得的随机应力概率分布进行了对比验证, 结果如图 8 所示.

由图 8 中随机有限元程序计算结果可知: 在弯管内壁沿弧线 AC 方向, C 点的随机 Von Mises 应力均值最高, 然后向端点 A 处降低. 又由确定性受力分析可知: 管壁内部沿弧 AE 上 Von Mises 应力呈现以 C 点为中心的对称分布状态. 当考虑随机因素影响后, 随机 Von Mises 应力亦保持了分布的对称性, 其结果可通过观察由图 9 给出的结构随机 Von Mises 应力分布的整体概率密度曲面得出.

类似方法可以考察结构体上其他部位的应力分布状态. 算例中蒙特卡罗方抽样次数为 10^4 次, 每次模拟有限元程序需时 7.5 s, 因此整个模拟过程共约需要机时 21 小时. 而根据文中给出的算法流程, 考虑所有随机参数均服从为正态分布, 采用 5 点降维数值积分, 计算随机响应的概率分布共需有限元重分析次数为 $25(=4 \times 6 + 1)$ 次, 需时机时约为 200 s. 对比图 8 中计算结果和模拟结果可知: 本文算法能够获得

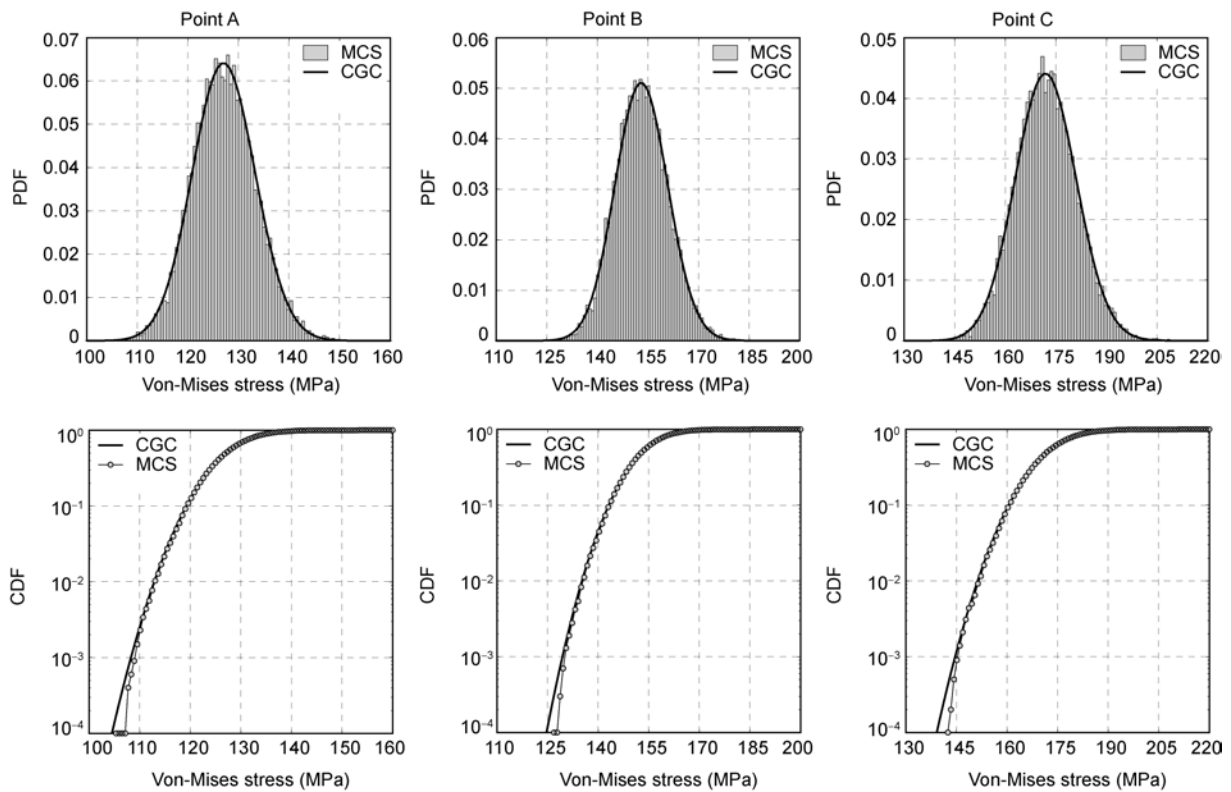


图 8 弯管内壁 A, B, C 点 Von Mises 应力的概率分布

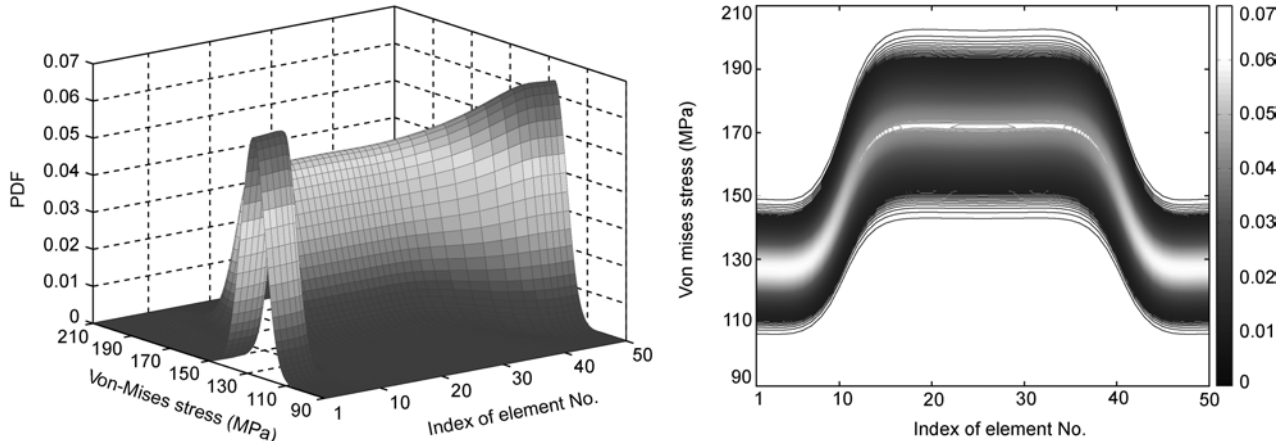


图 9 弯管内壁沿弧 AE 方向 Von Mises 应力的整体概率分布: 概率密度曲面及其等值线

较为准确的响应概率分布, 而两种方法的机时消耗比约为 378:1 (3600×21:200). 由此可知文中算法能够以较小的计算资源消耗获得较高精度的数值解.

4 结论

文中应用降维数值积分法与 C 型 Gram-Charlier

级数相结合, 讨论了结构随机响应概率密度求取的数值方法. 数值算例中介绍了平面十杆桁架的位移响应计算、车架的固有频率分析和弯管结构 Von Mises 应力计算等工程应用问题, 探讨了有限程序与随机响应数值算法的结合. 数值算例表明如下内容.

(i) 本文算法计算精度与蒙特卡罗方模拟结果吻合较好, 特别是对随机响应概率分布的尾部($P \in$

$[10^{-4}, 10^{-3})$ 亦能给出准确估计, 为结构可靠性分析与设计打下良好基础.

(ii) 算法就精度而言, 可以与 10^4 数量级的蒙特卡罗方法相比拟, 而效率较传统方法提高许多. 数值算例表明文中算法较传统方法节省计算资源消耗两个数量级以上, 有限元重分析次数可限制在几十次或百次之内. 由此可在个人计算机上实现工程随机

问题的分析和计算, 提高产品的设计质量和效率.

(iii) 算法流程简便易行, 不需要计算结构随机响应对于基本参数的梯度和二阶灵敏度和信息; 亦不需要对结构有限元模型中刚度矩阵等信息的修改. 因此可以充分发挥现有成熟有限元程序的优点, 依据文中给出的算法流程进行少量的确定性有限元计算后即可获得随机响应的概率分布.

参考文献

- 1 Stefanou G. The stochastic finite element method: Past, present and future. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 2009, 198: 1031–1051
- 2 Kiureghian A D, Ke J B. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probab Eng Mech*, 1988, 3: 83–91
- 3 Vanmarcke E, Shinozuka M, Nakagiri S, et al. Random fields and stochastic finite elements. *Struct Saf*, 1986, 3: 143–166
- 4 Wu Y T, Millwater H R, Cruse T A. Advanced probabilistic structural analysis method for implicit performance functions. *AIAA J*, 1990, 28: 1663–1669
- 5 Schuëller G I. Efficient Monte Carlo simulation procedures in structural uncertainty and reliability analysis recent advances. *Struct Eng Mech*, 2009, 32: 1–20
- 6 Pradlwarter H J, Schuëller G I, Koutsourelakis P S, et al. Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems. *Struct Saf*, 2007, 29: 208–221
- 7 Au S K, Beck J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probab Eng Mech*, 2001, 16: 263–277
- 8 Liu W K, Belytschko T, Mani A. Probabilistic finite elements for non-linear structural dynamics. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1986, 56: 61–86
- 9 Zhang Y M, Chen S H, Liu Q L, et al. Stochastic perturbation finite elements. *Comput Struct*, 1996, 59: 425–429
- 10 亢战, 程耿东. 基于随机有限元的非线性结构稳健性优化设计. *计算力学学报*, 2006, 23: 129–135
- 11 Qiu Z P, Elishakoff I. Antioptimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1998, 24: 361–372
- 12 Ghanem R G, Spanos P D. *Stochastic Finite Elements—A Spectral Approach*. Berlin: Springer, 1991
- 13 Ghanem R G, Spanos P D. Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis. *J Eng Mech*, 1991, 117: 2351–2372
- 14 Ghosh D, Farhat C. Strain and stress computations in stochastic finite element methods. *Int J Numer Methods Eng*, 2008, 74: 1219–1239
- 15 Sudret B, Kiureghian A D. *Stochastic Finite Element Methods and Reliability*. Technical Report UCB/SEMM-2000/08. 2000
- 16 Rahman S, Xu H. A univariate dimension reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics. *Probab Eng Mech*, 2004, 19: 393–408
- 17 Xu H, Rahman S. A generalized dimension reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics. *Int J Numer Methods Eng*, 2004, 61: 1992–2019
- 18 Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation. *Ann Math Stat*, 1952, 23: 470–472
- 19 秦权, 林道锦, 梅刚. 结构可靠度随机有限元—理论与工程应用. 北京: 清华大学出版社, 2006
- 20 张铁, 闫家斌. 数值分析. 北京: 冶金工业出版社, 2001
- 21 张义民, 黄贤振, 张旭方, 等. 平面机构运动性能系统可靠性分析. *科学通报*, 2009, 54: 668–672
- 22 安伟光, 赵维涛, 安海. 随机结构系统综合考虑静强度、刚度和疲劳的多失效模式的可靠性分析. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2006, 37: 516–526
- 23 Cramer H. On the composition of elementary errors. *Stat Appl*, 1928, 11: 13–74, 141–180
- 24 Durand D, Greenwood J A. Usefulness of Gram-Charlier and related series in approximating distributions. *Ann Math Stat*, 1957, 28: 978–986