



# 空间多闭环机构自由度计算的新概念和新理论

张一同, 牟德君\*

燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066004

\* E-mail: djmu@ysu.edu.cn

收稿日期: 2009-07-08; 接受日期: 2010-01-09

**摘要** 2005年法国学者 Gogu 分析了现有的 35 种不同形式的自由度公式, 指出其中的快速计算的公式有一定的局限性、不通用. 因此, 寻找更通用、更简单快捷的自由度公式, 仍是国际上机构学的热点, 也是完善机构学结构理论的一个重要课题. Gogu 在 2008 年提出了一种可以避免虚约束的新的算法, 但其通用性仍依然有限. 为了解决这一问题, 本文提出杆组自身的阶、广义运动副的阶、虚拟运动副、虚拟环路和虚拟环路阶的新概念, 给出了一种新的结构简单的通用公式. 这种方法是把多环路的自由度计算转换成若干个独立的虚拟环路单独计算, 使问题得到了简化, 避免了计算虚约束, 大大的降低了计算的难度. 通过多种不同类型机构的计算分析, 证明了新公式的简单性、通用性、有效性和实用性. 它的应用, 将为广大的工程技术人员掌握空间机构自由度的计算方法, 提供极大的方便.

**关键词**  
多闭环机构  
自由度  
广义运动副  
虚拟环路

近几年在 MMT 等刊物上, 发表了很多关于机构自由度的文章<sup>[1-7]</sup>, 也包括用李代数和群论<sup>[8-10]</sup>等现代数学探讨自由度的研究. 2005 年 Gogu 在法国国家科学研究委员会计划项目资助下, 对近 150 年有代表性的 35 种自由度公式和作者的贡献进行了介绍, 他把自由度算法分成两类: 一类是通过运动约束方程组求秩来计算的, 有通用性, 非常麻烦; 另一类是快速计算的方法, 简单、有局限性、不通用. 因此, 寻求更通用、更简单快捷的自由度公式, 仍是国际上机构学的热点.

人们发现公式不通用的原因是虚约束造成的, 就在特定的公式中增加了虚约束项  $v$ <sup>[11-14]</sup>, 对其修正. 文献[11]将(1)式修正为  $F = \sum_{i=1}^n f_i - \min \sum_{j=1}^m d_j + v$ . 文献[12]将“K-G”公式修正为  $M = d(n-g-1) + \sum_{i=1}^n f_i + v$ , 黄真用该式和螺旋理论, 解决了很多疑难机构的自由度问题<sup>[15]</sup>. 该方法是通过分析机构的运动螺旋系和反

螺旋系, 求出机构的公共约束. 再分析支链的运动螺旋系、反螺旋系和支链约束螺旋的相关性, 求出虚约束  $v$ .

2008 年 Gogu 又针对并联机构提出一种新的算法<sup>[16]</sup>, 这种方法是把联接动静平台的  $k$  个支链的运动参数  $R_{Gi}$  的数目  $S_{Gi}$  之和  $\sum_{i=1}^k S_{Gi}$  与  $R_{Gi}$  交集的维数  $\dim(R_{G1} \cap R_{G2} \cap \dots \cap R_{Gk})$  之差, 作为机构各环路阶之和  $r$ , 计算自由度. 优点是能避开虚约束的计算, 缺点是有一定的局限性, 仍然不能求解文献[2]的 4-UPU 机构和含虚约束的双环路平行四杆机构.

于是就产生了这样一个问题, 是否能够找到一种既不计算虚约束, 又能在各种机构中完全通用, 结构更简单的自由度公式呢? 经过分析我们得到了肯定的答案. 下面对现有的多环路自由度公式做一个简单的分析.

1978 年 Hunt 在文献[17]给出的多闭环自由度公

式的结构最简单, 即

$$F = \sum_{i=1}^P f_i - \sum_{j=1}^L d_j, \quad (1)$$

其中  $f_i$  为第  $i$  个运动副的自由度数,  $P$  为机构总的运动副数,  $L$  为独立环路数,  $d_j$  为第  $j$  个独立环路的阶. 这个公式早在 1954 年, 就被 Moroskine 以下面的形式<sup>[18]</sup> 给出过  $M = \sum_{i=1}^m f_i - r$ , 其中  $m$  相当于(1)式的  $P$ ,  $r$  相当于  $r = \sum_{j=1}^L d_j$ .

Gogu 近期的多篇文章, 都是把(1)式作为不通用的例子<sup>[5,16]</sup>. 文献[5]中 Gogu 分析了图 1 的 PCM 机构, 它有 12 个一类副, 2 个独立环路的阶均为 5, 由(1)式得出  $F=12-(5+5)=2$  的错误结果. 他还利用运动约束方程组求秩, 通过求解  $12 \times 12$  的矩阵, 得出各环路阶之和为 9, 自由度为  $F=12-9=3$  的正确结果. 因此, Gogu 说: 只能认为这些公式有缺陷还不完善, 应当检查这些公式.

在文献[14]中, 根据把杆组依次添加到前一环路上形成多环路机构的过程, 对(1)式进行过详细的推导, 多次检查这一推导过程并没有错误. 这个公式用在单环路和不含虚约束的多环路机构中应用, 都不会出现错误, 为什么用在含有虚约束的机构中会出现错误呢? 仔细分析后发现, 用环路阶  $d_j$  计算含虚约束的自由度时, 会引起运动参数的重复计算.

为了克服(1)式的这个缺点, 我们提出用虚拟环路法对(1)式进行修正, 使其能在任意空间机构中通用. 为此, 提出杆组自身的阶、广义副的阶、虚拟运动副、虚拟环路、虚拟环路阶的新概念, 并利用这些新概念推导出一个用虚拟环路阶表示的通用公式.

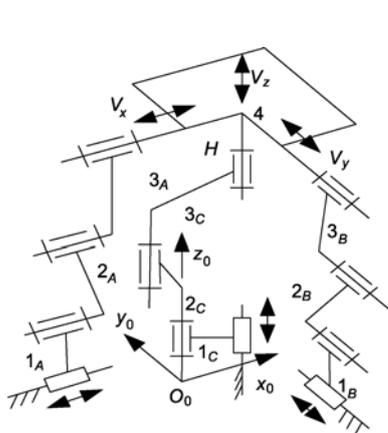


图 1 PCM 机构

完成了 150 多年来人们寻求建立一个通用自由度公式的愿望.

## 1 机构自由度分析的新概念和新理论

为了便于分析, 在空间多闭环机构中, 每个独立环路与其相邻环路不重复的独立杆件的组合我们称之为杆组, 杆组的自由度可以小于零、等于零和大于零, 杆组的构件可以是动件, 也可以是原动件. 这里定义的杆组是广义的杆组, 不是自由度为零的阿苏尔杆组. 例如图 2 的九杆机构有四个独立环路, 它含有图 3 中的  $ABCD, EFG, HK, PRM$  四个杆组.

为了把相邻两个环路不同的运动传递方式用统一的术语来描述, 我们引入虚拟运动副的概念. 设相邻两个环路传递运动的构件为  $A$  和  $B$ , 无论它们是否相邻, 都假想地看成是由一个运动副连接的, 这个假想的运动副称之为虚拟运动副, 简称为虚拟副. 当组成虚拟副的两个构件  $A$  和  $B$  相邻时, 虚拟副是一个真实的运动副; 当组成虚拟副的两个构件  $A$  和  $B$  不相邻时, 虚拟副是一个广义副, 即广义运动副<sup>[12,19]</sup>. 任意两个相邻的独立环路之间的运动传递, 都是通过虚拟副完成的. 第  $j$  个杆组与所其连接的前一个环路的虚拟副组成的环路称之为虚拟环路.

利用虚拟副的概念, 可以这样来描述多环路机构的组成: 具有  $L$  个独立环路的机构, 是用  $L-1$  个杆组依次添加到前一环路组成虚拟副的两个构件  $A$  和  $B$  上形成的.

这样就可以把具有  $L$  个独立环路的机构, 看成是由  $L$  个独立的虚拟环路组成的. 前一虚拟环路的运动

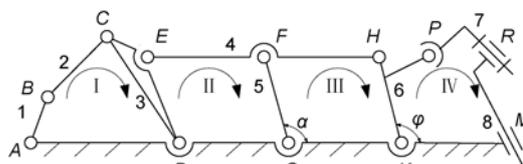


图 2  $ED=FG=HK, ED//FG//HK$

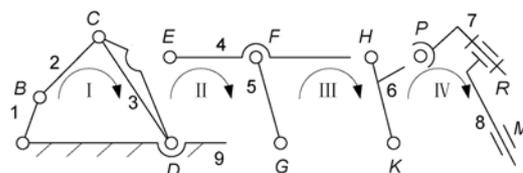


图 3 各环路杆件不重复的独立部分

输出构件  $A$  和  $B$ , 也是后一虚拟环路的运动输入构件. 依此类推, 直到把运动传递到最后一个环路.

在多环路机构中, 第  $j$  个环路不相邻的两个构件  $A$  和  $B$  组成的广义副用  $G_j^{A,B}$  表示, 它的相对运动参数称之为广义副的阶, 用  $d_j^{A,B}$  表示, 虚拟环路的阶用  $d_j^x$  表示, 杆组自身的阶用  $d_j^s$  表示, 自由度为  $F_j$ , 杆组的构件数为  $n_j$ , 总的运动副数  $P_j$ , 第  $i$  个运动副的自由度数  $f_i$ , 按我们在文献[14]给出的推导方法, 可以得出第  $j$  个虚拟环路杆组的自由度公式, 即

$$F_j = \sum_{i=1}^{P_j} f_i - d_j^x, \quad (2)$$

其中  $\sum_{i=1}^{P_j} f_i$  是第  $j$  个杆组的运动副自由度之和,  $d_j^x$  是杆组与广义副闭合后所失去的自由度, 两者之差  $F_j$ , 就是第  $j$  个杆组添加后机构自由度的变化, 它可以小于零、等于零和大于零.

多闭环机构的自由度计算, 就是根据机构组成的先后联接顺序, 依次求出第  $j$  个环路杆组的自由度  $F_j$ ,  $L$  个独立环路杆组的自由度之和就是机构总的自由度  $F$ , 即

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_L = \sum_{j=1}^L F_j. \quad (3)$$

把(2)式代入(3)式, 经推导得到虚拟环路法的机构自由度公式, 即

$$F = \sum_{i=1}^P f_i - \sum_{j=1}^L d_j^x, \quad (4)$$

其中  $f_i$  为第  $i$  个运动副的自由度数,  $P$  为机构总的运动副数目. 需要强调说明的是,  $F$  是包括局部自由度  $F^r$  在内的自由度,  $F-F^r$  是机构从动件具有确定运动所需的原动件数目.

设机构各环路虚拟阶之和为  $d^x$ , 则

$$d^x = \sum_{j=1}^L d_j^x. \quad (5)$$

对于一个确定的机构, 在非奇异位形的位置, 它的虚拟环路阶之和  $d^x$  是个确定的值, 该值与“运动的方程组”求秩的值相等.

## 2 虚拟环路阶的表示方法和运算规则

### 2.1 虚拟环路阶的表示方法和运算规则

为了能反映出第  $j$  个虚拟环路运动参数的多少和

类型, 用  $d_j^x(\alpha \beta \gamma, x y z)$  表示, 括弧中的  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$  是形式参数, 分别代表含有绕  $x, y, z$  轴的转动和移动. 为了讨论方便, 也可以把  $\alpha, \beta, \gamma$  所代表的实际转角符号写入对应的位置, 例如  $\alpha=\varphi, \beta=\theta, \gamma=\psi$ , 则写成  $d_j^x(\varphi \theta \psi, x y z)$ . 形式参数的值只有 0 和 1 两种. 0 表示没有参数对应的运动, 直接写入 0; 1 表示有对应参数的运动, 写入对应的形式参数符号.  $d_j^x$  的值为各参数值之和,  $d_j^x=\alpha+\beta+\gamma+x+y+z$ . 例如  $d_j^x(0 0 \gamma, x y 0)$  是第  $j$  个虚拟环路的阶, 代表环路中含有绕  $z$  轴的转动  $\gamma$  和沿  $x$  和  $y$  轴的移动, 没有绕  $x$  和  $y$  的转动和沿  $z$  轴的移动, 其值为  $d_j^x=3$ .

$d_j^x$  的计算方法为:  $d_j^x$  等于广义副的阶  $d_j^{A,B}$  与杆组自身的阶  $d_j^s$  之和, 即

$$d_j^x = d_j^{A,B} + d_j^s, \quad (6)$$

该式为第  $j$  个虚拟环路阶的约束方程, 简称为阶约束方程.

在  $d_{j-1}^{A,B} + d_j^s$  相加的运算中, 代表对应参数的因子相加, 运算法则为

$$x_i + x_i = x_i, \quad x_i + 0 = x_i, \quad 0 + 0 = 0, \quad x_i = 0, 1. \quad (7)$$

值得强调的是, 计算机构自由度时, 对于任意选定的独立环路  $I$ , 因为它没有前一环路, 所以环路  $I$  的虚拟环路阶  $d_i^x$  总是等于实际环路的阶  $d_i$ , 或者说环路  $I$  仅仅是一个名义上的虚拟环路, 即  $d_i^x=d_i$ .

### 2.2 虚拟环路阶与实际环路阶的关系

虚拟环路阶  $d_j^x$  与实际环路阶  $d_j$  的关系为

$$d_j^x \leq d_j, \quad j = 1, \dots, L, \quad (8)$$

$d_j$  值可以直接用观察法求得, 也可以用观察法或螺旋理论, 求环路的公共约束  $m_j$ , 再求  $d_j=6-m_j$ . 使用(4)式时, 首先要根据虚拟副的  $A$  和  $B$  是否邻接, 判定哪些环路的  $d_j^x$  与  $d_j$  相等, 这个判断法则称之为阶的判定定理: 1) 任选的第  $I$  环路  $d_i^x=d_i$ ; 2) 虚拟副的  $A$  和  $B$  相邻  $d_j^x=d_j$  (添加第  $j$  个杆组时, 如果前一环路虚拟副的  $A$  和  $B$  构件相邻, 则第  $j$  个虚拟环路与机构的真实环路相同, 两种环路的构件数和运动副数完全相同, 所以  $d_j^x=d_j$ ); 3) 虚拟副的  $A$  和  $B$  不相邻, 由(8)式确定  $d_j^x$  值, 可能  $d_j^x=d_j$ , 也可能  $d_j^x \neq d_j$  (如果前一环路虚拟副的  $A$  和  $B$  不相邻, 添加后得到的虚拟环路与真实环路不同, 虚拟环路的构件数目和运动副数目都少于实际环路的,  $d_j^x < d_j$ ). 设各独立环路阶之和为  $d^L$ , 则  $d^L = \sum_{j=1}^L d_j$ , 机构的虚约束数  $v$  为  $v=d^L-d^x$ .

### 3 虚拟环路法的应用算例

使用虚拟环路法时, 首先要用阶的判定定理 1 和 2, 确定出  $d_j^x=d_j$  的环路, 再用阶的判定定理 3 根据(8)式确定其余环路的  $d_j^x, d_j^y$  的确定关键在于正确地求出  $d_{i-1}^{A,B}$ . 所以正确地确定  $d_j$  和  $d_{i-1}^{A,B}$  是自由度计算的关键.

$d_j$  的确定可以使用观察法: 1) 如果有两个方向不同的回转运动, 它们都与某一平面平行, 另外还有一个与该平面不平行的回转运动, 那么在三个坐标轴上就都有回转分量; 2) 除了移动副产生的沿三个坐标轴的位移之外, 要充分注意由于转动引起的位移<sup>[20]</sup>.

另外, 也可以用观察法或者螺旋理论, 先确定环路  $j$  的公共约束  $m_j$ , 再求  $d_j=6-m_j$ . 下面通过几个实例, 介绍虚拟环路法的应用. 像本文的几个例子一样, 多数情况下  $d_{i-1}^{A,B}$  可以用上述的观察法确定. 但是由于机构结构的复杂性, 以及  $d_{i-1}^{A,B} \leq d_j$  的关系, 在一些情况下  $d_{i-1}^{A,B}$  的确定比  $d_j$  的要简单, 少数情况下比  $d_j$  的要复杂, 更通用的  $d_{i-1}^{A,B}$  确定方法, 还有待于系统地研究后给出, 这并不影响本文的结论.

**例 1.** 图 4 是 3-RPS 机构, 每个杆组的  $R$  轴线都与移动副  $P$  垂直, 三个杆组均布. 环路 I 中, 没有公共约束  $d_i^x=6, F_1=\sum_{i=1}^n f_i-d_i^x=10-6=4$ . 动平台有三个移动和三个转动, 以及一个沿  $CD$  轴回转的局部自由度, 所以  $d_i^{A,B}(\alpha\beta\gamma, x y z)=6$ . 环路 II 中, 杆组  $GHK$  没有  $x$  轴方向的位移, 它自身的阶  $d_{ii}^z(\alpha\beta\gamma, 0 y z)=5$ , 所以  $d_{ii}^x=d_{i-1}^{A,B}(\alpha\beta\gamma, x y z)+d_{ii}^z(\alpha\beta\gamma, 0 y z)=d_i^x(\alpha\beta\gamma, x y z)=6, F_{ii}=\sum_{i=1}^n f_i-d_{ii}^x=5-6=-1, F=F_1+F_{ii}=4+(-1)=3$ . 由(4)式得  $F=15-(6+6)=3$ .

把杆组  $GHK$  添加到动平台上时, 它给第 I 环路施加了一个约束, 机构的自由度减少为 3, 但动平台仍然有六个运动  $d_i^{1,3}(\alpha\beta\gamma, x y z)$ . 这类似于铰链四杆机构, 自由度为 1, 连杆的运动是有两个移动和一个

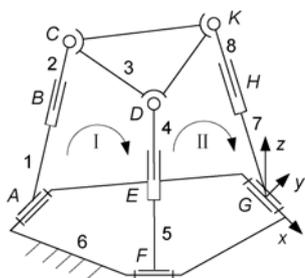


图 4 3-RPS 机构

转动. 本例中  $d_i^x=d_1, d_{ii}^x=d_{ii}$ , 机构不含虚约束, 因此, 也可以利用(1)式和“K-G”公式计算.

**例 2.** 图 5 是 Bagci 分析的三环路七杆机构<sup>[13]</sup>. 环路 I 中, 杆组  $RCCR$  的四个轴线平行. 环路 II 中, 是把  $E, F, G$  点的杆组  $SRP$  添加到环路 I 的件 2 和件 7 上组成的. 环路 III 中, 是把  $2P$  杆组添加到环路 II 的件 5 和件 7 上组成的. 环路 I 的构件都不能绕  $z$  和  $y$  轴转动, 它的阶  $d_i^x=d_i^x(\alpha 0 0, x y z)=4, F_1=\sum_{i=1}^n f_i-d_i^x=6-4=2, d_i^{2,7}(\alpha 0 0, x y z)=4$ . 环路 II 中, 考虑到由件 4 转动引起的位移为  $x$  和  $z$ , 杆组  $EFG$  的阶  $d_{ii}^z(\alpha\beta\gamma, x y z)=6, d_{ii}^x=d_i^{2,7}(\alpha 0 0, x y z)+d_{ii}^z(\alpha\beta\gamma, x y z)=d_i^x(\alpha\beta\gamma, x y z)=6, F_{ii}=\sum_{i=1}^n f_i-d_{ii}^x=5-6=-1$ . 环路 III 中, 杆组  $KH$  的阶  $d_{iii}^z(0 0 0, 0 y z)=2, d_{iii}^{5,7}(0 0 0, 0 y z)=1, d_{iii}^x=d_i^{5,7}(0 0 0, 0 y z)+d_{iii}^z(0 0 0, 0 y z)=d_{ii}^x(0 0 0, 0 y z)=2, F_{iii}=\sum_{i=1}^n f_i-d_{iii}^x=2-2=0, F=F_1+F_{ii}+F_{iii}=2-1+0=1$ . 由(4)式得  $F=13-(4+6+2)=1$ .

**例 3.** 图 1 是 11 杆的 PCM 机构. 环路 I 中, 两个  $RRRP$  杆组串联成为一个杆组, 所有的  $R$  和  $P$  副的轴线都平行于  $x_0O_0y_0$  平面, 有一个不能绕  $z_0$  轴回转的公共约束, 所以  $d_i^x=d_i^x(\alpha\beta 0, x y z)=5, F_1=\sum_{i=1}^n f_i-d_i^x=8-5=3$ . 环路 I 中, 动平台 4 的两个回转副总是平行与  $x_0O_0y_0$  平面的, 所以只能作平动, 它与机架组成的广义副的阶  $d_i^{A,B}(0 0 0, x y z)=3$ . 环路 II 的  $RRRP$  杆组, 所有的  $R$  和  $P$  副轴线平行于  $z_0$  轴, 都没有绕  $x$  和  $y$  轴的转动, 杆组的阶  $d_{ii}^z(0 0 \gamma, x y z)=4, d_{ii}^x=d_i^{A,B}(0 0 0, x y z)+d_{ii}^z(0 0 \gamma, x y z)=d_i^x(0 0 \gamma, x y z)=4, F_{ii}=\sum_{i=1}^n f_i-d_{ii}^x=4-4=0, F=F_1+F_{ii}=3+0=3$ . 由(4)式得  $F=12-(5+4)=3$ .

虚拟环路法求得  $\sum_{j=1}^n d_j^x=5+4=9$ , 这正是 Gogu 在文献[5]中用“运动方程组求秩”的方法, 由  $12 \times 12$  的矩阵才得到的结果. 这充分说明虚拟环路阶之和  $d^x$  就是“运动方程组”的秩, 两者作用相同, 有等效性.

**例 4.** 图 6 是一个  $2-PRU/PR(Pa)R$  机构<sup>[21]</sup>, 由三个环路组成的. 环路 I 为  $ABCDFE$ , 在  $O-yz$  平面内,

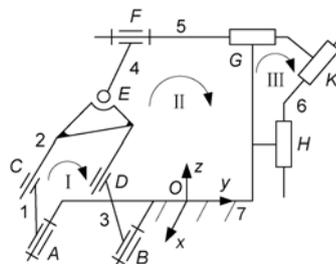


图 5 七杆机构

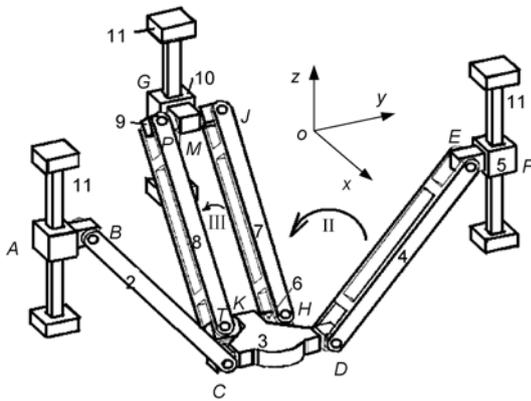


图6 2-PRU/PR(Pa)R 机构

含有一个 2-PRU(C 和 D 为 U 副)杆组; 环路 II 为 GMJHKDEF, 其中含 PR⊥R//R⊥R 的一个杆组; 环路 III 为 HJPT, 含一个 2R 杆组, 由于 JH 和 PT 平行且相等, 所以环路 III 是平行双曲柄机构, 如图 7 所示.

环路 I 中, 所有构件都不能沿 x 轴移动, 也不能绕 z 轴转动, 它的阶  $d_I = d_I^x(\alpha \beta 0, 0 y z) = 4$ ,  $F_I = \sum_{i=1}^p f_i - d_I^x = 8 - 4 = 4$ . 由于件 3 不能沿 x 轴移动, 也不能绕 z 轴转动, 广义副  $G_1^{11}$  的阶  $d_1^{11}(\alpha \beta 0, 0 y z) = 4$ .

环路 II 中, 件 3 和件 6 组成回转副 K, 件 9 和件 10 组成回转副 M, 它们的回转轴线都与 O-xz 平面垂直, 杆组 PR⊥R//R⊥R 自身的阶为  $d_{II}^z(\alpha \beta \gamma, x y z) = 6$ , 所以  $d_{II}^x = d_1^{11}(\alpha \beta 0, 0 y z) + d_{II}^z(\alpha \beta \gamma, x y z) = d_{II}^x(\alpha \beta \gamma, x y z) = 6$ ,  $F_{II} = \sum_{i=1}^p f_i - d_{II}^x = 5 - 6 = -1$ . 由于件 6 相对于件 9 只能平动, 广义副  $G_6^9$  的阶为  $d_6^9(0 0 0, 0 y z) = 2$ . 环路 III 中, 杆组 TP 自身的阶为  $d_{III}^z(\alpha 0 0, 0 y z)$ , 所以  $d_{III}^x = d_6^9(0 0 0, 0 y z) + d_{III}^z(\alpha 0 0, 0 y z) = d_{III}^x(\alpha 0 0, 0 y z)$ . 由于在运动过程中, 两个回转轴 K 和 M 总是平行的, 并且 JP=TH, 件 8 联接到 T 点和 P 点之后, 它总是和 JH 平行, 所以它与件 6 的夹角  $\alpha$  总是和件 7 与件 6 的夹角  $\phi$  相等, 也就是说  $\alpha$  不是一个独立参数, 因此  $d_{III}^x = d_{III}^x(\alpha 0 0, 0 y z) = d_{III}^x(0 0 0, 0 y z) = 2$ .  $F_{III} = \sum_{i=1}^p f_i - d_{III}^x = 2 - 2 = 0$ , 机构的自由度  $F = F_I + F_{II} + F_{III} = 4 + (-1) + 0 = 3$ . 在环路 III 中, 由于环路 III 的阶  $d_{III} = 3$ , 它的虚拟环路阶  $d_{III}^x = 2$ ,

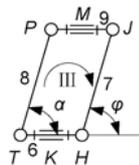


图7 JH//PT, JH=PT.

两者不相等, 所以该环路存在一个虚约束. 同时我们也看到, 通常被称之为串并联混合的 PR(Pa)R 支链, 实际上是含一个独立环路的组合体, 它并非是不可拆分.

例 5. 图 8 是两个 sarrus 机构的组合. 设件 1-2-3-4-5-6 为第 I 环路, 件 1-2-3-7-8-6 为第 II 环路, 件 4-5-3-7-8-6 为第 III 环路, 可以任意取两个环路为独立环路.

如果用 K-G 公式计算, 由于所有的构件都不能绕 Z 轴转动, 机构的公共约束为  $m=1$ , 阶  $d=5$ ,  $F = d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i = 5 \times (8-9-1) + 9 = -1$ , 用修正的 K-G 公式计算  $F = d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + v$ , 必须用螺旋理论求虚约束数  $v(v=2)$ , 才能得到  $F=1$  的正确结果.

用(1)式计算, 可以由三个环路中任取两个(各环路的阶分别为  $d_I=5$ ,  $d_{II}=3$ ,  $d_{III}=5$ ), 但是会出现选择的独立环路不同, 计算结果也不同的现象.

例如: 第一方案, 先计算环路 I, 再计算环路 III,  $F = 9 - (5+5) = -1$ , 与用“K-G”公式计算的结果一样; 第二方案, 先计算环路 II, 再计算环路 I,  $F = 9 - (3+5) = 1$ , 出现了和第一方案不同的计算结果. 虽然第二方案并没有求解虚约束数目  $v$ , 却得到了用修正的“K-G”公式, 通过求解虚约束数一样的计算结果. 这说明自由度计算中出现的虚约束, 并不是不可避免的.

如果用“虚拟环路法”计算, 无论按怎样的顺序选择独立环路, 计算结果都是一样的. 下面是按不同环路顺序, 由“虚拟环路法”计算自由度的结果.

第一方案: 先计算环路 I, 再计算环路 III. 环路 I 的阶  $d_I^x = d_I = 5$ .  $F_I = \sum_{i=1}^p f_i - d_I^x = 6 - 5 = 1$ . 第 III 环路, 是把杆组 GHK 连接到环路 I 广义副的件 3 和件 6 上组成的, 这个广义副的阶  $d_{III}^6 = d_3^6(0 0 0, 0 0 z) = 1$ . 在第 III 个环路中, 杆组自身的阶  $d_{III}^z = d_{III}^z(\alpha 0 0, 0 0 y z) = 3$ ,  $d_{III}^x = d_3^6(0 0 0, 0 0 z) + d_{III}^z(\alpha 0 0, 0 0 y z) = d_{III}^x(\alpha 0 0, 0 0 y z) = 3$ . 杆组 GHK 的自由度  $F_{III} = \sum_{i=1}^p f_i - d_{III}^x = 3 - 3 = 0$ , 机构的自由度  $F = F_I + F_{III} = 1 + 0 = 1$ .

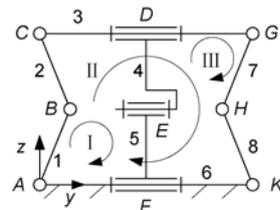


图8 sarrus 组合机构

第二方案: 先计算环路 II, 再计算环路 I. 环路 II 是平面六杆机构, 它的阶  $d_{II}^x = d_{II} = d_{II}(\alpha \ 0 \ 0, 0 \ y \ z) = 3$ .  $F_{II} = \sum_{i=1}^6 f_i - d_{II}^x = 6 - 3 = 3$ . 第 I 环路, 是把杆组 DEF 是连接到第 II 环路广义副的件 3 和件 6 上组成的, 这个广义副的阶  $d_{II}^{x,6} = d_{II}^{x,6}(\alpha \ 0 \ 0, 0 \ y \ z) = 3$ , 杆组自身的阶  $d_I^x = d_I^x(0 \ \beta \ 0, x \ 0 \ z) = 3$ , 它的虚拟环路阶  $d_{II}^x = d_{II}^{x,6}(\alpha \ 0 \ 0, 0 \ y \ z) + d_I^x(0 \ \beta \ 0, x \ 0 \ z) = d_{II}^x(\alpha \ \beta \ 0, x \ y \ z) = 5$ ,  $F_I = \sum_{i=1}^3 f_i - d_I^x = 3 - 5 = -2$ , 机构的自由度  $F = F_{II} + F_I = 3 + (-2) = 1$ .

本例说明, “虚拟环路法”的计算结果与独立环路的选择顺序无关, 这种方法不但简捷, 可以避开虚约束, 而且计算结果具有唯一性, 也能看出它的有效性和适用性.

## 4 讨论

例 3, 4 和 5 证明虚拟环路法可以避开虚约束计算, 以及解决虚约束问题的有效性和(4)式的通用性. 例 1, 例 2 都是不含虚约束的机构, 例 1 各环路阶都为 6, 它的结果可以由(4)式得到, 也可以直接用(1)式和“K-G”公式得到. 例 2 和 4 的 3 个环路阶分别为 4, 6, 2, 各环路阶的差别很大, 这 5 个例子说明无论机构中是否含虚约束, 以及各环路的阶是否相同, 虚拟环路法都能适用.

对比(1)式和(4)式, 仅仅是两个公式第二项中符号  $d_i^x$  和  $d_i$  不同, 其他的含义都相同, 可以认为(4)式是对(1)式的修正, 但并不是简单的结构形式的修正, 而是对公式内涵的一种修正, 或者认为(4)式就是(1)式, 它是给(1)式赋予了新的内涵. 本文是通过虚拟副和虚拟环路的新概念, 解决了(1)式不能用于含虚约束机构的问题, 从而建立了新的通用的自由度公式, 丰富了机构的结构理论.

虚拟环路法的另一个重要意义在于, 它能合理的解释多环路空间机构中, 支链所具有的自由度数, 以及它的杆组特性. 因此, 可以把空间多环路机构的组成原理, 用扩展的杆组理论进行定义, 能进一步为建立平面和空间机构的统一的结构理论奠定基础.

在“虚拟环路法”提出之前, 很难想象例 4 中环路 III 的 2R 杆组, 具有阿苏尔杆组自由度为零和两个移动参数的运动学特性, 即  $d_{III}^x(0 \ 0 \ 0, x \ y \ 0) = 2$ . 由此可见, 虚拟环路阶看似简单, 却能深刻地反映出杆组所具有的结构特性和运动学本质.

在例 2 中, E 点的球面副 S 实际上是含有一个不能绕 z 轴回转的消极自由度的. 求解过程并没有专门指出这一点, 也没做专门的处理, 就求出了该机构自由度的正确结果, 说明(4)式对于含消极自由度的机构也同样的适用. 当然这仅仅是从正确计算自由度角度的角度来说的, 如果要分析例 2 机构的运动, 还是要考虑消极自由度的存在和影响的. 因此, 公式(4)对于含虚约束、消极自由度和局部自由度的情况都是适用的, 我们实现了 150 年来人们一直寻求建立通用的自由度公式的愿望.

由于“虚拟环路法”是把多环路的自由度计算, 转换成若干个独立的虚拟环路单独计算, 使问题得到了简化, 避免了计算虚约束, 大大的降低了计算的难度, 在理论研究和工程实践中都具有很大的适用性.

## 5 结论

通过 5 个不同类型机构的自由度分析, 可以看出, 无论机构中是否含有虚约束、各环路阶是否相同、是否含有消极自由度, 都可以用虚拟环路法有效的进行求解, 表明了这种方法具有通用性和适用性. 由于所用数学工具和运算都比较简单, 它能极大地促进广大工程技术人员, 对空间多闭环机构自由度计算的掌握和拓宽其应用范围.

更重要的是虚拟环路阶, 深刻地揭示了空间机构支链的杆组特性, 证明了支链就是广义的杆组, 明确的给出了杆组在其环路中的自由度, 虚拟环路阶的这个作用是目前所有其它自由度理论都无法做到的, 它将对空间机构组成原理产生一定的影响.

通过以上的理论分析和计算实例, 可以得出以下几个重要的结论.

1) (4)式是一个多环路的自由度通用公式, 可以用于含虚约束、局部自由度和消极自由度的任意机构, 它具有广泛的适用性和有效性.

2) 虚拟环路的阶, 是杆组自身的阶和广义副的阶综合作用的结果.

3) 机构各虚拟环路的阶之和  $\sum_{i=1}^l d_i^x$  是一个定值, 它与用“运动的方程组”求秩的值相等.

4) 虚拟阶性质的判定定理: 1) 任选的第 I 环路  $d_i^x = d_i$ ; 2) 虚拟副的 A 和 B 相邻  $d_i^x = d_j$ ; 3) 虚拟副的 A 和 B 不相邻, 由(8)式确定  $d_i^x$  值, 可能  $d_i^x = d_j$ , 也可能  $d_i^x \neq d_j$ .

5) 虚拟环路法揭示了空间机构支链的杆组的特性, 大多数情况下支链就是一个阿苏尔杆组, 少数情况下是自由度大于零或小于零的广义的杆组。

6) 同一个结构的杆组, 联接到具有不同阶的广义副上面, 杆组的作用不同, 所得的虚拟环路的阶也不同, 因此不能孤立的说某个杆组的阶和自由度是多少。例如, 把例 4 中的 2R 杆组添加到图 6 环路 III 的 TP 点, 由于广义副的阶为 2, 添加后 2R 杆组的自由度为零, 它是一个阿苏尔杆组; 如果把它添加到一

个 6 阶的广义副上, 得到的虚拟环路的阶为 6, 杆组的自由度为-4, 杆组添加后给广义副施加了 4 个约束。

由于机构结构的复杂性, 以及  $d_{i-1}^{A,B} \leq d_j$  的关系, 在一些情况下  $d_{i-1}^{A,B}$  的确定比  $d_j$  的要简单, 少数情况下比  $d_j$  的要复杂, 更通用的  $d_{i-1}^{A,B}$  确定方法, 是今后要系统研究的重要内容。在计算机构自由度数目时, 消极自由度并不影响计算结果, 但是它会对机构某些构件的运动产生一定的影响, 这也是值得今后深入研究的。

**致谢** 作者对黄真教授在研究中给予的帮助表示感谢。

## 参考文献

- 1 Kong X W, Gosselin C M. Generation of parallel manipulators with three translational degrees of freedom based on screw theory. In: Proceedings of IFToMM Symposium on Mechanisms, Machines, and Mechatronics. Canada: Saint-Hubert, 2001
- 2 Zhao J S, Zhou K. A theory of degrees of freedom for mechanisms. Mech Mach Theory, 2004, 39: 621—643
- 3 Huang Z. Kinematics and type synthesis of lower-mobility symmetrical parallel robot manipulators. Proceedings of the 11th IFToMM. Tianjin, 2004. 65—76
- 4 Shen H P, Yang T L, Ma L Z. Synthesis and structure analysis of kinematic structures of 6-dof parallel robotic mechanisms. Mech Mach Theor, 2005, 40(10): 1180—1194
- 5 Gogu G. Mobility of mechanisms: A critical review. Mech Mach Theor, 2005, 40(9): 1068—1097
- 6 Zhao J S, Feng Z J, Dong J X. Computation of the configuration degree of freedom of a spatial parallel mechanism by using reciprocal screw theory. Mech Mach Theor, 2006, 41: 1486—1504
- 7 Yang D C, Xiong J, Yang X D. A simple method to calculate mobility with Jacobian. Mech Mach Theor, 2008, 43: 1175—1185
- 8 Rico J M, Aguilera D, Gallardo J. Computer implementation of an improved Kutzbach-Grübler mobility criterion. ASME Paper No. DETC02/DAC-34093, 2002
- 9 Rico J M, Ravani B. On mobility analysis of linkages using group theory. Trans ASME J Mech Design, 2003, 125(1): 70—80
- 10 Rico J M, Gallardo J, Ravani B. Lie algebra and the mobility of kinematic chains. J Robot Syst, 2003, 20(8): 477—49
- 11 Yang T L. Topology Structure Design of Robot Mechanism. Beijing: China Machine Press, 2004
- 12 Huang Z, Kong L F, Fang Y F. Mechanism Theory of Parallel Robotic Manipulator and Control. Beijing: China Machine Press, 1997
- 13 Bagci C. Degrees of freedom of motion in mechanisms. Trans ASME, Ser B, 1971, 93(1): 140—148
- 14 Zhang Y T, Lu L, Li Y W. Different expressions for the degrees of freedom of spatial mechanisms. Proceedings of the International Conference on Mechanical Transmissions. Chongqing: Chongqing University, 2006. 799—802
- 15 黄真, 刘靖芳, 曾达幸. 基于约束螺旋理论的机构自由度分析的普遍方法. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39: 84—93
- 16 Grigore G. Structural and Kinematic Analysis and Synthesis of Parallel Robots. France: SSIR-Clermont-Ferrand, 2008
- 17 Hunt K H. Kinematic Geometry of Mechanisms. Oxford: Oxford University Press, 1978. 382
- 18 Moroskine Y F. General analysis of the theory of mechanisms. Teorii Masini Mekhanizmov, 1954, 14: 25—50
- 19 Phillips J. Freedom in Machinery. Sydney: Cambridge University Press, 1984
- 20 Bai S X. Advanced Kinematics and Dynamics of Mechanisms. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1988. 5—7
- 21 Liu X J, Wang J S. Some new parallel mechanisms containing the planar four-bar parallelogram. Int J Robot Res, 2003, 22: 717—732