



精密测量中的量子极限

袁春华^①, 张可烨^①, 张卫平^{①②*}

① 华东师范大学光与原子量子研究所, 物理系, 上海 200062

② 华东师范大学精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062

* 通信作者. E-mail: wpzhang@phy.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2013-11-28; 接受日期: 2014-02-11

国家重点基础研究发展计划 (973 项目) (批准号: 2011CB921604)、国家自然科学基金 (批准号: 11234003, 11129402, 11004059, 11204084)、博士点基金 (批准号: 20120076120003)、上海自然科学基金 (批准号: 12ZR1443400) 以及中央高校基本科研业务费专项资金项目

摘要 给定一个物理装置, 对于一个物理可观察量能够得到的测量精度是什么? 为了回答这一问题, 本文以最近量子精密测量的发展为主线, 量子参数估值方法为核心, 介绍单粒子 (线性耦合) 体系和多粒子 (非线性耦合) 体系物理量测量精度的量子限制. 作为例子, 对光学量子精密测量中如何突破标准量子极限, 甚至海森堡极限做了简明阐述. 特别总结了非线性精密测量在突破海森堡极限方面的最新进展. 最后, 探讨了量子精密测量未来发展的可能趋势.

关键词 量子精密测量 标准量子极限 海森堡极限 超海森堡极限 相位灵敏度 量子免疫的子系统

1 引言

计量学是研究测量以及测量误差的一门综合性学科. 近几十年来随着测量技术的飞速发展以及测量精度的不断提高, 计量学的研究已从宏观进入微观世界. 在微观层次, 计量学与量子力学的结合是必然的, 这样的结合逐渐孕育出了量子精密测量这一广受关注的前沿领域^[1~12]. 量子精密测量研究的核心内容包含两个方面, 首先是量子力学不确定性原理对可观测的物理量的精度的量子限制, 其次是怎样在量子力学原理允许的范围内实现测量精度的量子限制的突破.

量子力学的测量结果普遍都是统计的, 测量结果都受到统计误差的影响. 这些误差除了来自实验上的不完善性, 更重要的从本质上来来自于量子力学不确定性原理的限制. 为了减少误差的影响, 经典的测量方法就是在完全相同的条件下重复测量, 获得平均结果. 但是量子力学给这样测量过程的参量精确程度设定了限制. 测量结果的涨落至少正比于一个比例因子 $1/\sqrt{N}$, N 是重复测量的次数. 这个比例因子定义了所谓的标准量子极限 (standard quantum limit), 它已经被证实是通过经典的重复测量方法不可突破的极限^[9]. 这个标准量子极限不是原理上不可突破, 仔细设计量子的测量过程就能突破这个极限. 量子的测量过程提供了两条路径来突破这一极限: (1) 制备特殊的探测态, 即改变系统初始的量子统计性质; (2) 设计特殊的测量相互作用, 即改变耦合哈密顿量 (Hamiltonian) 的形式. 单独或结合使用这两种方法, 都能够使测量精度突破标准量子极限. 可供参考的例子如, 利用路径纠缠的态

(NOON 态 $|\psi\rangle = (|N, 0\rangle + |0, N\rangle)/\sqrt{2}$) 能够增强成像或空间分辨率^[13,14], 利用压缩光实验上实现的光学干涉法检测引力波^[15,16], 利用自旋压缩态测量原子光谱^[17,18], 提高频率校准精度^[19~22] 等等.

然而, 量子力学的基本性质 — 海森堡不确定原理为量子精密测量理论设置了下限. 这个下限也因此得名海森堡极限 (Heisenberg limit), 是量子测量理论中可能实现的最高精度. 多年来, 测量的海森堡极限的值被表示为 $1/N$. 然而近年来在非线量子精密测量的理论^[23~36] 与实验上^[37] 的研究表明, 粒子之间的相互作用 (非线性耦合的哈密顿量) 能够有助于提高测量的灵敏度. 而且非线性量子精密测量能够超过在线性情况下最佳测量精度, 给出的最佳精度能够突破 $1/N$, 因此被称为超海森堡极限 (Super-Heisenberg Limit) 的测量. 到目前为止非线性量子精密测量已经有很多细致的理论方案, 比如基于玻色凝聚体中的散射^[27~29]、纳米机械振子中的 Duffing 非线性^[30]、两次通过原子系综中产生的有效非线性^[31]、克尔非线性^[32~34] 以及非线性的光子 – 原子量子界面^[35] 等系统. 2011 年西班牙的 Mitchell 小组在实验上首次获得超海森堡极限的灵敏度^[37]. 目前, 对这些利用非线性突破量子力学测量极限的工作仍然存在一些争议. 代表性的意见之一认为打破的只是 $1/N$ 这个表达式, 而不是海森堡极限^[11,12]. 他们认为 $1/N$ 只是利用光学干涉测量相位时海森堡极限的表达式, 仅仅是一个特例. 而对于其他系统, 特别是考虑多粒子系统非线性耦合的情形, 将产生新的海森堡极限的表达式, 海森堡极限却仍然存在, 没有被打破. 我们将会在后面作详细阐述. 意见二认为这只是整个量子系统的局部精度, 特别是存在损耗的情形下, 非线性的方案是否还能获得超海森堡灵敏度还需要进一步去研究^[38].

在本文中, 我们首先综述了量子参量估计的进展. 通过改变哈密顿量从线性耦合到非线性耦合, 物理量测量的最佳灵敏度能够得到提高, 对于 k 一体非线性耦合的情形, 直积的探测场最优的灵敏度是 $N^{-k+1/2}$, 纠缠的探测场最优的灵敏度是 N^{-k} . 在线性光精密测量, 总结了测量精度突破标准量子极限达到海森堡极限的所使用的量子技术. 在非线精密测量方面, 介绍了非线性精密测量在突破海森堡极限方面的进展. 最后, 给出了量子精密测量未来发展的看法.

2 量子参量估计

测量是一个物理过程, 测量的精度是由物理规律所限定. 如果我们要测量一个连续参量, 首先要挑选一个试探系统, 其演化依赖于待测参量, 这样我们就可以通过对试探系统初末态的比较来测定这个待测参量. 而测量的精度则取决于 (1) 系统的初态性质; (2) 依赖于待测参量的演化过程; (3) 对系统末态的读取方法, 此外还要考虑测量过程中环境对系统的扰动. 有些连续参量本身不是厄米算符, 这些参量数值的测量必须通过测量与它有确定关系的可观测量来获得. 这类连续参量值的获得不是通过直接测量, 而是通过测量其它量的间接过程来获得, 这样的测量过程就是参量估计. 对参量测量精度估计的极限, Helstrom^[1,2] 与 Holevo^[3] 两人首先作了奠基性的理论研究, 给出了参量测量误差的最终量子限制, 即 Helstrom-Holevo 界 (Helstrom-Holevo bound). 后来根据费歇尔 (Fisher) 信息, 得到了一个比 Helstrom-Holevo 界更为严格的下限, 称为克拉美 – 罗界 (Cramér-Rao bound). 为了消除估计值与真正值之间系统的偏差, Braunstein 与 Caves 给出了一个介于两者之间更为有效的形式^[5,6]: 下面做详细描述.

待测未知参量 γ 与试探系统发生作用, 可由如下的哈密顿量描述:

$$H_\gamma = \gamma H, \quad (1)$$

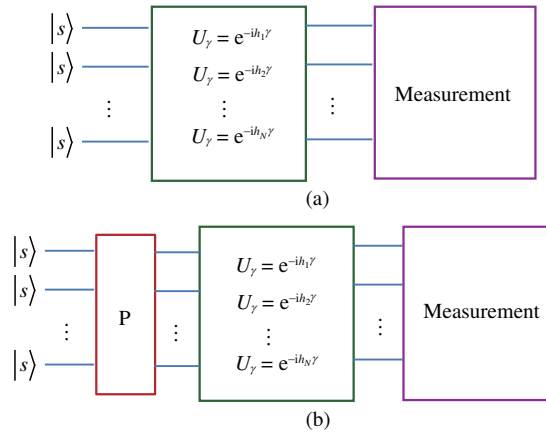


图 1 (网络版彩图) 线性耦合的单参数估计. $U = e^{-iH\gamma}$ 其中 $H = \sum_{j=1}^N h_j$. (a) 直积态输入; (b) 纠缠态输入. **P**: 通过非线性过程把直积态制备成纠缠态

Figure 1 (Color online) A linear coupled single-parameter estimation. $U = e^{-iH\gamma}$ with $H = \sum_{j=1}^N h_j$. (a) Product state input; (b) entangled state input. **P**: the entangled state is prepared through the product state based on the nonlinear process

其中 γ 为一个耦合常数, H 为无量纲的耦合哈密顿量 (这里让 $\hbar = 1$, 因此 γ 是频率的单位) [24]. 通过相互作用, 试探系统获取了参数 γ 的信息.

如图 1(a) 左边所示, 用一个单体试探系统进行 N 次重复测量可以等价地表示为, 由同样的 N 个无相互作用单体构成的系统的一次测量. 假设 $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ 是 N 体试探系统的测量结果或者 N 次重复测量的结果, 通常根据它们就可以获得对应参量 γ 的估计子的值 γ_{est} . 如何描述 N 次测量的精确程度, 与以前参量估计理论中直接使用估计子的涨落 $\langle (\Delta\gamma_{\text{est}})^2 \rangle = \langle (\gamma_{\text{est}} - \langle \gamma_{\text{est}} \rangle)^2 \rangle$ 不同的是, Braunstein 与 Caves 给出了一个更为有效的形式. 理由是: (1) 如果估计值与真正值之间有个系统的偏差, 也就是 $\langle \gamma_{\text{est}} \rangle$ 不等于 γ , 那么即使估计子的涨落很小但测量精度可能很差; (2) 如果估计子与参量之间有不同的单位, 很难用估算子的涨落去表示待测参量的精度. 正因为如此, 他们给出由测量的估计值 γ_{est} 与真正值 γ 之间的单位修正的平均方差, 统计测量估计的精度如下 [5,6]:

$$(\delta\gamma)^2 = \left\langle \left(\frac{\gamma_{\text{est}}}{|d\langle \gamma_{\text{est}} \rangle / d\gamma|} - \gamma \right)^2 \right\rangle^{1/2} \geq \frac{1}{NF_c(\gamma)}, \quad (2)$$

其中不等式是由经典的参量估计理论得到的克拉美 - 罗界, $F_c(\gamma)$ 是经典的费歇尔信息,

$$F_c(\gamma) = \int d\gamma_{\text{est}} \frac{1}{p(\gamma_{\text{est}}|\gamma)} \left(\frac{\partial p(\gamma_{\text{est}}|\gamma)}{\partial \gamma} \right). \quad (3)$$

它表征的是对参数 γ 测量获得的最大的信息量. 如果 $F_c(\gamma)$ 是一个与 N 无关的数, 根据上面不等式方程 (2), 克拉美 - 罗界就给出了测量的标准量子极限 $\delta\gamma \geq 1/\sqrt{N}$.

这里要强调的是, 如果这 N 个单体之间有相互作用, 则整个测量系统存在非线性, 以上的等价性将不再成立. 所以在量子参量估计中, 对于 N 体非线性系统的测量精度的极限完全有可能与线性系统的不同, 这就为突破标准量子极限提供了机会. 最初突破标准量子极限的工作大多集中在优化试探系统的初态性质, 如图 1(b) 所示, 将试探系统制备到压缩态、纠缠态等非经典的态 [4,39]. 这些非经典态都内含非线性, 因为它们的制备过程大多依赖于单体间的相互作用. 其中一个特别的例子是将试

探系统制备到 "NOON" 态, 此时由于非线性效应, $F_c(\gamma)$ 与试探系统中的单体数目 N 有关, 通过克拉美 - 罗界得到 $\delta\gamma \geq 1/N$, 即所谓海森堡极限^[39]. 这个极限一度被认为与海森堡测不准关系对应, 是量子测量不能超越的. 然而近来的不少工作发现, 如果在耦合哈密顿量 H 中引入单体间的相互作用, 即非线性的耦合哈密顿量, $1/N$ 这个测量精度极限也是可以突破的. 突破 $1/N$ 是否是突破海森堡极限, 目前存在争议. 部分学者认为是, 并且命名为超海森堡极限. 部分学者认为 $1/N$ 只是线性海森堡极限, 非线性耦合情形有个更小的非线性的海森堡极限, 所以海森堡依然存在, 没有被突破.

费歇尔信息依赖于系统的态和测量所用的可观察量, 对于某一个特定的测量方案, 克拉美 - 罗界能够给出关于 γ 的最大测量精度. 但另一方面, 我们能选择各种各样与 γ 相关的可观测量, 从而会产生不同的费歇尔信息, 以及不同的克拉美 - 罗界. 理论上我们可以穷举所有可观测量从而得到一个最优的值, 但实际实验中却不可行. 为了解决这一问题, 可以引入量子费歇尔 (quantum Fisher) 信息^[5,6], 它可以描述量子态内禀的信息而与具体的测量过程无关. 它的值至少与上述最优值一样大.

量子费歇尔信息根据量子态的密度矩阵计算获得,

$$F_q(\gamma) = \text{tr}[\rho' \mathcal{L}_\rho(\rho')], \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\gamma}, \quad (4)$$

其中 $\mathcal{L}_\rho$ 是超算符, 具有如下的形式:

$$\mathcal{L}_\rho(\hat{O}) = \sum \frac{2}{p_j + p_k} O_{jk} |j\rangle \langle k|, \quad (5)$$

这里 p_j 是 $\hat{\rho}$ 的本征值, $\hat{O}$ 是与 ρ 在同一态空间的自伴算子. 根据量子费歇尔信息, 对处于纯态的试探系统, 参量估计精度的基本限制由量子的克拉美 - 罗界给出^[1,3,5,6],

$$\delta\gamma \geq \frac{1}{2t\Delta H}, \quad (6)$$

t 是试探系统在 H_γ 作用下演化的时间, $\Delta H = (\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2)^{1/2}$ 表示 H 在试探系统量子态下的不确定度. 根据这个新的不等式, 就可以很清楚的展示非经典态与非线性耦合哈密顿量是如何作用于量子测量极限的.

2.1 线性耦合的哈密顿量

在线性耦合情形, 如图 1 所示, 试探系统的 N 组份各自独立耦合于参量, 因此耦合哈密顿量为

$$H = \sum_{j=1}^N h_j, \quad (7)$$

其中 h_j 是单体算符作用于探测系统中第 j 组份 (如图 1 所示). 如果优化的探测态仅限于组份间的直积状态, 探测系统可以被视为独立的, ΔH 比例于 $\sqrt{N}$, 产生所谓的标准测量极限. 如果优化的探测态可以制备成纠缠态, 譬如使用下面形式的初始态:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|A_{\max}, \dots, A_{\max}\rangle + |A_{\min}, \dots, A_{\min}\rangle), \quad (8)$$

其中 $|A_{\max}\rangle$ ($|A_{\min}\rangle$) 是 h_j 的本征态, 对应的本征值为 $A_{\max}$ ($A_{\min}$). 产生的偏差:

$$\Delta H = N(A_{\max} - A_{\min})/2 = N\|H\|/2, \quad (9)$$

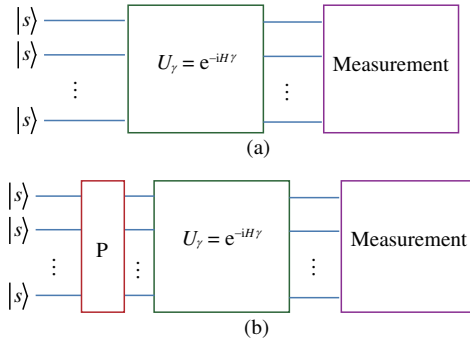


图 2 (网络版彩图) 非线性耦合的单参数的估计. $U_\gamma = e^{-iH\gamma}$ 其中 $H = (\sum_{j=1}^N h_j)^k$. (a) 直积态输入; (b) 纠缠态输入. **P**: 通过非线性过程把直积态制备成纠缠态

Figure 2 (Color online) A nonlinear coupled single-parameter estimation. $U_\gamma = e^{-iH\gamma}$ with $H = (\sum_{j=1}^N h_j)^k$. (a) product state input; (b) entangled state input. **P**: the entangled state is prepared through the product state based on the nonlinear process

其中 $\|H\| \equiv A_{\max} - A_{\min}$ 线性比例于 N . 根据方程 (6) 的量子克拉美-罗界可知, $\delta\gamma$ 的测量精度正比于 $1/N$, 这个比例称为海森堡极限. 在时间 t 的演化下, ΔH 不变, 则引入了一个相对相位 $e^{i\phi(t)}$ 进入了该态, 其中 $\phi(t) = \gamma t N \|H\|$. 通过测量两个本征态 $|\pm\rangle = (|A_{\max}\rangle \pm |A_{\min}\rangle)/\sqrt{2}$ 中的每个探测系统的可观测量获得海森堡极限 [25].

2.2 非线性耦合哈密顿量

如果在测量过程中也允许非线性耦合, 如图 2 所示, k 一体耦合的非线性哈密顿量为 [24]

$$H = \left(\sum_{j=1}^N h_j \right)^k = \sum_{j_1, \dots, j_k} h_{j_1} h_{j_1} \cdots h_{j_k}. \quad (10)$$

这个哈密顿量 H 描述了一个系统拥有 k 一体对称性的非线性耦合, 包括自相互作用, 共有 n^k 项. 研究结果得到, 对于初始的直积输入态如图 2(a), 它的最优敏感度比例于 $\Delta\gamma \propto N^{-k+1/2}$ [23,24]; 对于纠缠的输入态如图 2(b), 产生的误差 $2\Delta H = N^k(A_{\max}^k - A_{\min}^k)$, 它的最优敏感度比例于 $\Delta\gamma \propto N^{-k}$ [25]. 这些研究工作表明多体相互作用作为一个新的资源, 可以为量子计量提高测量精度.

现在我们介绍一个实现非线性耦合情形的物理系统. 系统的组份是由自旋 1/2 的粒子组成, 算符 h_j 是第 j 个粒子的自旋 z 组份, 因此哈密顿量 H 描述了参量耦合于总角动量的 z 组份的 k 阶幂. 对于 $k=2$ 的情形, 耦合的哈密顿量可写为

$$H_\gamma = \gamma H = \gamma \left(\sum_{j=1}^N h_j \right)^2. \quad (11)$$

对于单体算符, 一个特殊的形式就是 $h_j = Z_j/2$, 产生以下耦合的哈密顿量:

$$H_\gamma = \gamma \left(\sum_{j=1}^N \frac{Z_j}{2} \right)^2 = \gamma J_z^2, \quad (12)$$

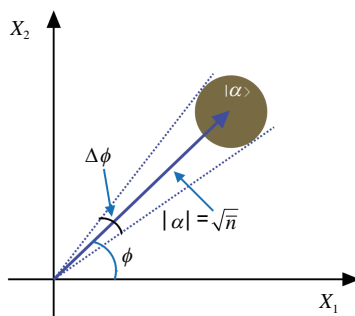


图 3 (网络版彩图) 相干态 $|\alpha\rangle$ 的不确定圆盘描绘了光子数和相位的不确定度. X_1 与 X_2 为无量纲的正交振幅与相位

Figure 3 (Color online) The uncertainty disc of a coherent state $|\alpha\rangle$ introduces both photon number and phase uncertainty. X_1 与 X_2 are dimensionless quadrature amplitude and phase

这里 $J_x = \sum_j X_j/2$, $J_y = \sum_j Y_j/2$, $J_z = \sum_j Z_j/2$ 分别是总角动量的 x, y 与 z 组份, 其中 X, Y, Z 是泡利算符表示单体角动量的各组份. 这个例子的物理系统可以通过玻色-爱因斯坦凝聚体的原子内态去完成^[24,26,28], 试探系统的初态为角动量相干态的直积态, 经过很短的时间 ($\phi \equiv \gamma t \ll 1$) 演化, 对探测光的终态用可观测量 J_x 与 J_y 去估计, 给出灵敏度 $\delta\phi_{x,y} \simeq 2/N^{3/2}$ ^[24,28]. 这个超 $1/N$ 的测量精度已经被几个研究小组独立获得^[24,26~28,30,37]. 比较线性耦合与非线性耦合的测量精度, 非线性耦合确实提高了测量精度, 而且这个精度也超越了线性海森堡极限 $1/N$.

3 突破标准量子极限的光学相位测量

相位在光学精密测量中是一个非常重要的物理量, 在这一章中我们将综述量子参量估计原理在这方面的应用. 根据量子力学, 光的强度不可能被测量的无限精确, 它会围绕着某个平均值上下涨落, 这些涨落来自于量子化的电磁场的真空涨落. 这些基本的量子强度涨落暗示着有一个类似海森堡不确定原理的机制在起作用. 狄拉克首先建议了光子数和相位间的不确定关系^[40], 后来 Heitler 在他的书中也详细描述了这种关系^[41]. 如果我们标注相位的涨落为 $\Delta\phi$, 强度的涨落为 Δn , 它们满足如下不等式:

$$\Delta n \Delta\phi \geq 1. \quad (13)$$

虽然相位在量子力学中不能用完全自洽的厄米算符描述^[42], 这个不等式与海森堡不确定原理的关系还存在争议, 但这并不妨碍我们用这个不等式估计光学相位测量的精度.

目前相位估计的研究分为两大类^[43,44], 一是未知的相位围绕着一个已知的相位, 在一个非常小的间隔内变化, 研究测量装置对相位变化的灵敏度 (phase sensing); 二是待测量未知的相位在一个很宽的范围内随着时间随机变化, 通常称为相位追踪 (phase tracking)^[44~46]. 这两类相位估计都很重要, 但不是等价的.

3.1 光学相位估计的标准量子极限

对于相干度最好的光源 - 激光, 它光场的量子描述可以很好的近似为一个相干态 $|\alpha\rangle$ ($\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$), 它的本征值方程为 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. 其中湮灭算符 a 可以表示为两个线性厄米算符的叠加 $a = (X_1 + iX_2)/2$, X_1 与 X_2 给出的是无量纲振幅, 如图 3 所示. 相干态的模为 $|\alpha| = \sqrt{n}$, 粒子数的涨落为 $\Delta n =$

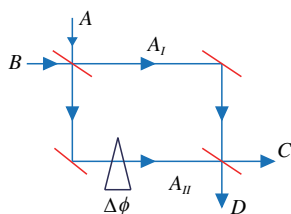


图 4 (网络版彩图) 马赫 - 曾德干涉仪. A, B : 输入端; C, D : 输出端; A_I, A_{II} : 内部场; $\Delta\phi$: 相位差

Figure 4 (Color online) A Mach-Zehnder interferometer. A, B : input ports; C, D : output ports; A_I, A_{II} : inside fields; $\Delta\phi$: phase difference

$\sqrt{n}$, 正交振幅相位的涨落为 $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1$, 这说明相干态是一个最小不确定态 [47].

从图 3 所描述的相干态的强度与相位的涨落关系. 从简单的几何关系, 可得到在角度 ϕ 方向的涨落

$$\Delta\phi = \frac{\text{uncertainty diameter}}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (14)$$

其中, 使用了不确定圆盘的直径 $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1$. 利用 $\Delta n = \sqrt{n}$, 得到相干态的粒子数涨落和相位涨落间的基本关系为

$$\Delta n \Delta\phi = 1. \quad (15)$$

其相位的不确定度即标准量子极限 $\Delta\phi_{SQL} = 1/\sqrt{n}$, 其中 $\bar{n}$ 是平均光子数 [4,10,39]. 实验中常用这个精度标准来作为经典与量子测量工作的分界.

3.2 突破标准量子极限的光学相位测量

光学精密测量使用光学干涉法作为其主要工具进行相位估计 [4,10,39]. 光学干涉仪是一种非常有用和灵活的测量工具. 如图 4 所示的马赫 - 曾德干涉仪 (Mach-Zehnder interferometer), 以及它的其他衍化形式多年来一直被用来作为相位测量的标准设备. 如果用处于相干态的光输入干涉仪, 相位灵敏度可以达到标准量子极限 $\Delta\phi = 1/\sqrt{n}$.

为了实现测量精度突破标准量子极限, 部分研究工作考虑如何改进输入态. 在 1981 年, Caves 首次提出利用光的非经典的态 (压缩态) 的想法, 来提高光学干涉仪的灵敏度, 突破散粒噪声极限 [4]. 注入压缩真空到干涉仪一般不使用的端口 B , 可以获得提高测量精度到 $1/N^{3/4}$ [4,48]. 为什么输入压缩可以提高灵敏度, 突破散粒噪声极限. 在他的 1981 年的文章中指出, 如图 4 的干涉仪, 只要你在端口 B 什么场都不输入 (即输入量子真空), 那么在干涉仪的端口 A , 无论什么状态的光子场你输入, 得到的最优的灵敏度总是散粒噪声极限. 所以, 散粒噪声极限起因于相位噪声, 由于量子真空涨落从未使用的端口 B 泄露进干涉仪, 而不管你在端口 A 输入什么态. 后来有人研究在干涉仪的两个输入端 A 与 B 都注入压缩态, 然后在输出端 C 与 D 处测量强度差 [49,50], 或者在输入端注入 Fock 态, 在输出端计算光子计数几率 [51]. 这些量子程序能够获得的 $1/N$ 敏感度.

除了使用压缩光外, 还可以利用纠缠光输入来突破极限. 譬如 NOON 态 $|\psi\rangle = (|N, 0\rangle + |0, N\rangle)/\sqrt{2}$ 被注入线性干涉仪 [39]. 这个 NOON 态通过 ϕ 的移相器, 演化成 $(|N, 0\rangle + e^{iN\phi}|0, N\rangle)/\sqrt{2}$, 测量精度可达到 $1/N$, 即海森堡极限. 利用参量下转换制备了 $N = 2$ 的 NOON 态, Boto 等人成功突破成像和光刻中的瑞利衍射极限 [52]. 然而目前产生一个高 N 的 NOON 态在技术上是非常困难的. 随后 Agarwal

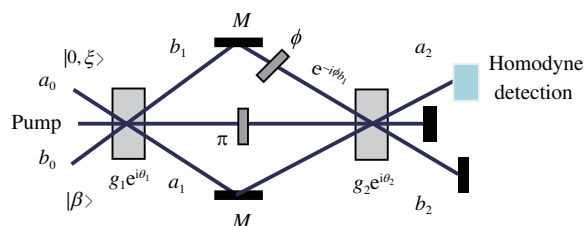


图 5 (网络版彩图) SU(1,1) 干涉仪的示意图. 在传统的马赫 – 曾德干涉仪中, 两个光学参量放大器取代了两个分束器, 变成了 SU(1,1) 干涉仪. g_1, θ_1 与 g_2, θ_2 分别描述的是光学参量放大过程 1 和 2 的强度和相移. a_i 与 b_i ($i = 0, 1, 2$) 表示在不同过程中的两光束. ϕ : 相移; M: 平面镜. 两个泵浦场之间有 π 相位差

Figure 5 (Color online) The schematic diagram of SU(1,1) interferometer. Two optical parameter amplifications (OPAs) take the place of two beam splitters in the traditional Mach-Zehnder interferometer. g_1 (g_2) and θ_1 (θ_2) describe the strength and phase shift in the OPA process 1 (2), respectively. a_i and b_i ($i = 0, 1, 2$) denote two light beams in the different processes. The pump field between the two OPAs has a π phase difference. ϕ : phase shift; M: mirrors

等人 [53] 修改了这个方案, 通过一个高增益的参量放大器取代了方案中的参量下转换, 这样会产生两个关联的光束, 双光子计数的条纹的可见度会下降. 但是对应用, 比如全息, 已经足够了. 这样修改后, 首先高光子数会产生高的分辨率, 其次, 更容易在实验上实现. 这个修改后的方案被 Sciarrino 等在实验上实现了 [54]. 还有部分研究工作聚焦于如何改进测量方法提高相位的灵敏度来突破散粒噪声极限, 譬如双输出端的光子计数 [55,56], 奇偶测量法 [57,58] 等等.

除了改进输入态, 或者输出端的探测方法, 根据前一章的分析在参量耦合过程中引入非线性也可以突破标准量子极限甚至海森堡极限. 因此有相当一部分研究工作在线性的干涉仪中引进了非线性元件来增强分辨率或灵敏度 [59~64]. 在 1985 年 Yurke 等人在理论上提出了这样一类新的干涉仪, 使用非线性参量过程或四波混频过程代替干涉仪中的分束与合束器, 如图 5 所示. Yurke 等的理论计算表明这装置的灵敏度可达到海森堡极限 [59]. 最近, Plick 等人 [65] 在理论上对这种干涉仪进行了更改, 就是在第一个四波混频器的输入端用相干态代替真空态入射, 这样四波混频器就变成了光学参量放大器. 这样做的优点是这个非常亮的相干光在干涉仪中能够促进压缩光在阈值以上的光学参量放大器中产生, 而且能够维持在散粒噪声以下, 避免了实验中光子数低的问题 [66]. 最近, 我们组在实验上成功实现了这种非线性干涉仪 [67,68]. 利用强度探测, Plick 等人还在理论上仔细研究了对于这种相干态作为输入态的干涉仪的灵敏度 [65]. Marino 等人随后考虑这种干涉仪的内部和外部损耗, 进一步研究了相位测量精度的极限 [69]. 如果一个输入端注入相干态, 另一个输入端注入压缩真空, 增强的信噪比可以突破标准量子噪声极限 [63], 最优的相位测量精度接近海森堡极限 [70]. 还有部分实验研究工作直接用非线性相互作用代替干涉仪的移相器, 相位测量精度达到了海森堡极限 [71,72].

4 “突破” 海森堡极限的磁化强度测量

在文章的第 2 节, 我们已经介绍了利用非线性耦合哈密顿量, 达到超海森堡极限的参量估计的理论, 即对于 k 体非线性耦合的情形, 直积的探测场最优的灵敏度是 $N^{-k+1/2}$, 纠缠的探测场最优的灵敏度是 N^{-k} . 下面介绍一个“突破”海森堡极限的磁化强度测量的实验.

2011 年, 西班牙的 Mitchell 小组基于冷原子系综, 实验上完成了超海森堡极限的参量估计. 在他们的实验中, 光偶极阱中原子系综包含 7×10^5 Rb-87 原子, 光学深度 $d > 50$, 线性探测可以达到亚投影噪声. 光与原子的相互作用可以用集体的连续变量与简并的微扰理论去描述. 对于 $F = 1$ 的原子,

系综的有效哈密顿量 H_{eff} 的四阶微扰的贡献为

$$H_{\text{eff}}^{(4)} = \beta_J^{(0)} \hat{S}_z^2 \hat{J}_0 + \beta_N^{(0)} \hat{S}_z^2 N_A + \beta_N^{(1)} \hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{J}_z + \beta^{(2)} \hat{S}_0 (\hat{S}_x \hat{J}_x + \hat{S}_y \hat{J}_y). \quad (16)$$

$J \equiv \sum_i j^{(i)}$ 是 N_A 个原子的集体变量, (16) 式中的下标 N 表示探测场的光子数目. 由于激发态的超精细结构, 系数 β 强烈依赖于探测频率. 那些包含参量 β 的项是非线性的, 表明了光子-光子间有有效的相互作用. 包含 $\beta^{(0)}$ 与 $\beta^{(1)}$ 项类似于本文第 2 节中介绍的哈密顿量 (12). 由于只使用了两体相互作用并没有使用纠缠资源, 对系综磁化强度 $\langle F_z \rangle$ 的测量精度, 可达到第 2 节中理论估计的超海森堡极限 $\delta F_z \propto N^{-3/2}$, 其中 N 是光子数目.

历史上, 海森堡极限首先由 Holland 与 Burnett 引入 [73], 用来描述 Heitler [41] 书中的粒子数-相位的不确定关系, 海森堡极限与海森堡不确定性原理之间的关系存在争议. Pieter Kok 等人认为海森堡极限是最优的, 没有被打破, 打破的只是 $1/N$ 这个表达式, 而这个表达式不能完全代表海森堡极限 [11]. 对于考虑了多粒子系统非线性耦合的情形, 将产生新的海森堡极限的表达式, 但海森堡极限仍然存在. Pieter Kok 等人不是根据涨落而是根据期望值, 给出了单次测量得到的海森堡极限的新的定义

$$\Delta\phi \geq \frac{1}{2|\langle H \rangle|}. \quad (17)$$

他们认为海森堡极限不是海森堡不确定原理的一种形式, 而是马哥勒斯-列维京界 (Margolus-Levitin bound) [74]. 并且他们在文章中重新计算了 Beltrán 与 Luis [33] 超海森堡极限的量子测量方案, 根据新的定义, 测量精度并不能超越海森堡极限. 具体计算内容如下:

一正比于光子数算符的平方的光学非线性 $\hat{n}^2$ 作用于单模相干态 $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, 在探测之前演化后的态为 $|\psi(\varphi)\rangle = \exp(-i\varphi\hat{n}^2)|\alpha\rangle$. 经计算均方差为 $\delta\varphi \simeq \frac{1}{4}\langle\hat{n}\rangle^{-3/2} = \frac{1}{4}|\alpha|^{-3/2}$, 精度表达式超越了平均光子数 $\hat{n}$, 这个测量方案似乎超越了海森堡极限. 为了解决这个悖论, 他们注意到关于 φ 变换的生成器是高阶的非线性 $H = \hat{n}^2$ 而不是光子数算符 $\hat{n}$. 所以, 恰当的资源数应该为 $\langle H \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle$. 这样很容易得到 $\delta\varphi$ 的理论下限为 $1/\langle \hat{n}^2 \rangle = 1/|\alpha|^4$. 因此这个参量估计方案甚至海森堡极限都没达到, 更不要说超海森堡极限了. 如果改变单模输入态为 $|\psi_0\rangle = (|0\rangle + |N\rangle)/\sqrt{2}$, 重新测量就能得到海森堡极限. 在探测之前演化后的态为 $|\psi(\varphi)\rangle = \exp(-i\varphi\hat{n}^2)|0\rangle = (|0\rangle + e^{-i\varphi N^2}|N\rangle)/\sqrt{2}$. 定义测量的可观测量为 $X = |0\rangle\langle N| + |N\rangle\langle 0|$, 计算它的平均值为 $\langle X \rangle = \langle \psi(\varphi) | X | \psi(\varphi) \rangle = \cos(N^2\varphi)$ 以及涨落 $\Delta X = \sin(N^2\varphi)$. 利用标准的方均差的表达式, 得到 $\delta\varphi = \Delta X |d\langle X \rangle / d\varphi|^{-1} = N^{-2}$. 既然 $|\langle H \rangle| = \langle \hat{n}^2 \rangle = \frac{1}{2}N^2$. 根据方程 (17), 得到是海森堡极限而不是超海森堡极限.

利用多粒子 (非线性耦合) 体系, 西班牙的 Mitchell 小组实验上提高了测量精度, 实现了超 $1/N$ 的磁化强度测量, 但突破的仅仅是线性海森堡极限, 而真正的非线性的海森堡极限并没有突破.

5 展望

量子精密测量未来可能的发展趋势, 有如下几个方面: (1) 在弱测量方面, 它是由 Aharonov 等几位科学家在 1988 年提出的一种测量方法 [75]. 弱测量在经典 [76] 和非经典的系统 [77] 中都得到了实现. 在过去的十年里, 对弱测量的研究兴趣逐渐在增长, 主要由于研究人员有能力以相干的形式去询问量子系统 [78,79]. 弱测量而且提供了直接观察量子波函数 [80]、量子态 [81] 的可能, 以及洞察一些基本量子效应的可能, 比如在双缝干涉实验中不确定性原理的作用 [82,83] 等等. 国内, 对弱测量也展开了研究, 特别是中国科技大学提出了对单光子到达时间的弱测量方案, 并进行了实验验证 [84]. 越来越多的实验工作将迫使物理学家重新思考测量意味着什么, 因为它已不再在教科书所写那样是简单的事情.

因此, 利用弱测量的方法进行量子精密测量是未来发展的一个非常有潜力的研究方向. (2) 由于量子信息是一个令人兴奋的、快速增长的科学兴趣和发展领域, 吸引了全球最先进的理论和实验研究. 其快速发展产生了许多新奇的量子应用, 在测量的许多领域激动人心的打开了新的视野. 量子信息、量子计算与精密测量的结合, 也是未来量子精密测量发展的一个可能趋势. (3) 多粒子关联挑战某些量子极限的一些可能性探索, 多体关联与量子精密测量结合也是未来发展的一个可能方向. (4) 就是相位估计研究的新的理论与实验开拓. 下面重点介绍一个由量子规律免疫的子系统 (quantum-mechanics-free subsystem) 进行的精密测量的新方法^[85,86].

量子精密测量中最根本的问题是如何克服测量反作用附加给测量信号的噪声. 量子测量精度的标准量子极限都是由这些噪声导致的. 最初不少克服测量反作用的策略都是在对引力波测量的研究工作中发展出来的^[87~90], 例如“反作用规避”或者“量子非破坏”测量法; 以及一些如本文第2节介绍的借助于非经典态的奇异量子涨落性质或非线性效应的方法. 近年来, 这些策略又在 Caves^[86] 和 Polzik^[91] 各自领导的研究组的推进下或得了显著的进展. 他们的研究发现有时可能从完整的量子系统中分离出一个量子规律免疫的子系统——顾名思义, 其中所有的变量都是“经典的”, 不受测量反作用影响. 这样的系统在弱力与场的测量上将有一系列的应用, 诸如用于光力学探测, 磁力计, 以及引力波测量.

一个最简单的量子规律免疫子系统可以在一个双振子系统中实现. 这2个振子必须有相反的质量和相同的频率, 其哈密顿量可写作

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 - \frac{\hat{p}'^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}'^2. \quad (18)$$

这个特殊的振子对系统可以由具有相反自旋的原子系构成^[91], 也可以由相反失谐的腔模光子^[86]或者由相反失谐光场驱动的腔镜构成^[92]. 最近, 我们还发现通过操控原子凝聚体的色散性质也可以实现这一特殊的系统^[93].

我们假设这对质量相反的振子与同一个腔光场 $\hat{c}$ 通过光力学相互作用耦合, 此外2个振子还分别与时间依赖的外部弱扰动 f_A 和 f_B 耦合. 其相互作用哈密顿量为

$$V = \hbar[\Delta_c + G(\hat{q} + \hat{q}')] \hat{c}^\dagger \hat{c} + f_A \hat{q} + f_B \hat{q}'. \quad (19)$$

定义复合变量

$$\hat{Q} = \hat{q} + \hat{q}', \quad \hat{P} = \frac{1}{2}(\hat{p} + \hat{p}'), \quad \hat{\Phi} = \frac{1}{2}(\hat{q} - \hat{q}'), \quad \hat{\Pi} = \hat{p} - \hat{p}', \quad (20)$$

易证明 $[\hat{Q}, \hat{\Pi}] = 0$ 并且有

$$\dot{\hat{Q}} = \frac{\hat{\Pi}}{m}, \quad \dot{\hat{\Pi}} = -m\omega^2\hat{Q} + f_B - f_A, \quad \dot{\hat{c}} = i\Delta_c\hat{c} - iG\hat{Q}\hat{c}. \quad (21)$$

从这动力学方程组中我们可以发现集体位置算符 $\hat{Q}$ 与相对动量算符 $\hat{\Pi}$ 构成了一个量子规律免疫子系统. 图6展示了由测量引起的完整动力学关系图.

方程组 (21) 的形式与在外力差 $f_B - f_A$ 驱动下谐振子的运动方程一致. 振子的运动导致腔场频率的平移, 而这种平移可以通过干涉法来测定. 然而与普通光力学测量系统的不同之处在于, 辐射压的效果在振子的方程中完全没有出现. 也就是说通过这种测量方案测量外力差 $f_B - f_A$ 没有任何测量反作用, 因此测量精度也不会受测量反作用的限制. 其实这只是在系统的局部精度上突破了位移测量的标准量子极限, 测量的反作用全被施加到由复合算符 $\hat{\Phi}$ 与 $\hat{P}$ 构成的另一个子系统中. 详细的讨论与分析可以在我们近来的工作^[93]中读到.

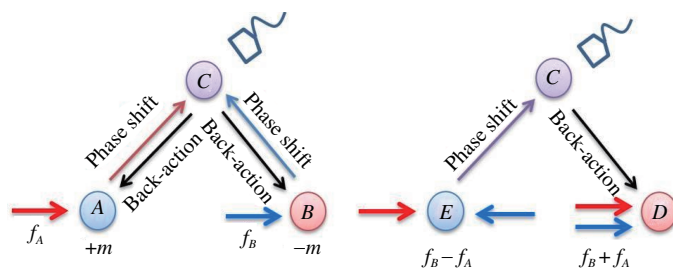


图 6 (网络版彩图) 量子规律免疫系统的原理图: 左图为原始表象, 右图为复合表象. 复合振子 E 的位移导致腔场 C 的相位变化, 这种变化可以通过干涉法测定, 同时测量的反作用只会影响测量无关的复合变量 D

Figure 6 (Color online) Relationship diagram for the back-action evading setup in the “bare” (left) and “composite” (right) representations. The displacement of the composite oscillator E results in a change in the phase of the cavity field C that could be measured by homodyne detection, but the measurement back-action only affects the composite oscillator D

6 结论

本文总结了线性耦合体系和非线性耦合体系中物理量测量精度的量子极限研究的进展. 由于粒子间的相互作用作为一种新的资源, 非线性耦合体系中物理量测量精度能够超越线性情形下最好的精度, 对于 k 一体非线性耦合的情形, 使用直积的探测场能够得到的最优灵敏度是 $N^{-k+1/2}$, 使用纠缠的探测场能够得到的最优灵敏度是 N^{-k} . 但 $1/N$ 只是线性海森堡极限, 非线性耦合情形有个更小的非线性的海森堡极限, 所以海森堡极限依然存在, 并没有被突破.

参考文献

- Helstrom C W. Minimum mean-squared error of estimates in quantum statistics. *Phys Lett A*, 1967, 25: 101–102
- Helstrom C W. *Quantum Detection and Estimation Theory*. New York: Academic Press, 1976
- Holevo A S. *Probabilistic and Statistical Aspect of Quantum Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1982
- Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys Rev D*, 1981, 23: 1693–1708
- Braunstein S L, Caves C M. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Phys Rev Lett*, 1994, 72: 3439–3443
- Braunstein S L, Caves C M, Milburn G J. Generalized uncertainty relations: theory, examples, and Lorentz invariance. *Ann Phys*, 1996, 247: 135–173
- Lee H, Kok P, Dowling J P. A quantum Rosetta stone for interferometry. *J Mod Opt*, 2002, 49: 2325–2338
- Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced measurements: Beating the standard quantum limit. *Science*, 2004, 306: 1330–1336
- Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum metrology. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 010401
- Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Advances in quantum metrology. *Nat photonics*, 2011, 5: 222–229
- Zwierz M, Pérez-Delgado C A, Kok P. General Optimality of the Heisenberg Limit for Quantum Metrology. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 180402
- Zwierz M, Pérez-Delgado C A, Kok P. Ultimate limits to quantum metrology and the meaning of the Heisenberg limit. *Phys Rev A*, 2012, 85: 042112
- Boto A N, Kok P, Abrams D S, et al. Quantum Interferometric Optical Lithography: Exploiting Entanglement to Beat the Diffraction Limit. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2733–2736
- Fabre C, Fouet J B, Maître A, et al. Quantum limits in the measurement of very small displacements in optical images. *Opt Lett*, 2000, 25: 76–78

- 15 LIGO Collaboration. A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit. *Nat Phys*, 2011, 7: 962–965
- 16 Goda K, Miyakawa O, Mikhailov E E, et al. A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector. *Nat Phys*, 2008, 4: 472–476
- 17 Wineland D J, Itano W M, Bollinger J J, et al. Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy. *Phys Rev A*, 1992, 46: R6797–R6800
- 18 Huelga S F, Macchiavello C, Pellizzari T, et al. Improvement of frequency standards with quantum entanglement. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 3865–3868
- 19 Meyer V, Rowe M A, Kielpinski D, et al. Experimental demonstration of entanglement-enhanced rotation angle estimation using trapped ions. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 5870–5873
- 20 Leibfried D, Barrett M D, Schaetz T, et al. Toward heisenberg-limited spectroscopy with multiparticle entangled states. *Science*, 2004, 304: 1476–1478
- 21 Wasilewski W, Jensen K, Krauter H, et al. Quantum noise limited and entanglement-assisted magnetometry. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 133601
- 22 Koschorreck M, Napolitano M, Dubost B, et al. Sub-projection-noise sensitivity in broadband atomic magnetometry. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 093602
- 23 Luis A. Quantum limits, nonseparable transformations, and nonlinear optics. *Phys Rev A*, 2007, 76: 035801
- 24 Boixo S, Datta A, Flammia S T, et al. Quantum-limited metrology with product states. *Phys Rev A*, 2008, 77: 012317
- 25 Boixo S, Flammia S T, Caves C M, et al. Generalized limits for single-parameter quantum estimation. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 09040
- 26 Luis A. Nonlinear transformations and the Heisenberg limit. *Phys Lett A* 2004, 329: 8–13
- 27 Choi S, Sundaram B. Bose-Einstein condensate as a nonlinear Ramsey interferometer operating beyond the Heisenberg limit. *Phys Rev A*, 2008, 77: 053613
- 28 Boixo S, Datta A, Davis M J, et al. Quantum metrology: dynamics versus entanglement. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 040403
- 29 Tacla A B, Boixo S, Datta A, et al. Nonlinear interferometry with Bose-Einstein condensates. *Phys Rev A*, 2010, 82: 053636
- 30 Woolley M J, Milburn G J, Caves C M. Nonlinear quantum metrology using coupled nanomechanical resonators. *New J Phys*, 2008, 10: 125018
- 31 Chase B A, Baragiola B Q, Partner H L, et al. Magnetometry via a double-pass continuous quantum measurement of atomic spin. *Phys Rev A*, 2009, 79: 062107
- 32 Kitagawa M, Yamamoto Y. Number-phase minimum-uncertainty state with reduced number uncertainty in a Kerr nonlinear interferometer. *Phys Rev A*, 1986, 34: 3974–3988
- 33 Beltrán J, Luis A. Breaking the Heisenberg limit with inefficient detectors. *Phys Rev A*, 2005, 72: 045801
- 34 Rivas A, Luis A. Precision quantum metrology and nonclassicality in linear and nonlinear detection schemes. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 010403
- 35 Napolitano M, Mitchell M W. Non-linear metrology with a quantum interface. *New J Phys*, 2010, 12: 093016
- 36 Jin G, Liu Y C, You L. Optimal phase sensitivity of atomic Ramsey interferometers with coherent spin states. *Front Phys*, 2011, 6: 251–257
- 37 Napolitano, Koschorreck M, Dubost B, et al. Interaction-based quantum metrology showing scaling beyond the Heisenberg limit. *Nature*, 2011, 471: 486–489
- 38 Hall M J W, Wiseman H M. Does Nonlinear Metrology Offer Improved Resolution? Answers from Quantum Information Theory. *Phys Rev X*, 2012, 2: 041006
- 39 Dowling J P. Quantum optical metrology—the lowdown on high-N00N states. *Contemporary Phys*, 2008, 49: 125–143
- 40 Dirac P A M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proc Roy Soc A*, 1927, 114: 243–265
- 41 Heitler W. The Quantum Theory of Radiation. London: Oxford University Press, 1954. 64–65
- 42 Lynch R. The quantum phase problem: A critical review. *Phys Reports*, 1995, 256: 367–436
- 43 Wiseman H M, Milburn G J. Quantum Measurement and Control. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010
- 44 Xiang G Y, Higgins B L, Berry D W, et al. Entanglement-enhanced measurement of a completely unknown optical phase. *Nat Photonics*, 2011, 5: 43–47

-
- 45 Yonezawa H, Nakane D, Wheatley T A, et al. Quantum-Enhanced Optical-Phase Tracking. *Science*, 2012, 337: 1514–1517
- 46 Berry D W, Hall Michael J W, Wiseman H M. Stochastic Heisenberg Limit: Optimal Estimation of a Fluctuating Phase. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 113601
- 47 Walls D F, Milburn G J. *Quantum Optics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994
- 48 Barnett S M, Fabre A, Maitre A. Ultimate quantum limits for resolution of beam displacements. *Eur Phys J D*, 2003, 22: 513–519
- 49 D'Ariano G M, Sacchi M F. Two-mode heterodyne phase detection. *Phys Rev A*, 1995, 52: R4309–4312
- 50 Steuernagel O, Scheel S. Approaching the Heisenberg limit with two-mode squeezed states. *J Opt B: Quantum Semiclass Opt*, 2004, 6: S66
- 51 Holland M J, Burnett K. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 1355–1358
- 52 Boto A N, Kok P, Abrams D S, et al. Quantum interferometric optical lithography: exploiting entanglement to beat the diffraction limit. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2733–2736
- 53 Agarwal G S, Boyd R W, Nagasako E M, et al. Comment on “quantum interferometric optical lithography: exploiting entanglement to beat the diffraction limit”. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 1389
- 54 Sciarrino F, Vitelli C, Martini F D, et al. Experimental sub-Rayleigh resolution by an unseeded high-gain optical parametric amplifier for quantum lithography. *Phys Rev A*, 2008, 77: 012324
- 55 Pezzé L, Smerzi A, Khoury G, et al. Phase detection at the quantum limit with multiphoton Mach-Zehnder interferometry. *Phys Rev Lett*, 2007, 99: 223602
- 56 Pezzé L, Smerzi A. Mach-Zehnder interferometry at the Heisenberg limit with coherent and squeezed-vacuum Light. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 073601
- 57 Campos R A, Gerry C C, Benmoussa A. Optical interferometry at the Heisenberg limit with twin Fock states and parity measurements. *Phys Rev A*, 2003, 68: 023810
- 58 Anisimov P M, Raterman G M, Chiruvelli A, et al. Quantum metrology with two-mode squeezed vacuum: parity detection beats the Heisenberg limit. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 103602
- 59 Yurke B, McCall S L, Klauder J R. SU(2) and SU(1,1) interferometers. *Phys Rev A*, 1986, 33: 4033
- 60 Jacobson J, Björk G, Chuang I, et al. Photonic de Broglie waves. *Phys Rev Lett*, 1995, 74: 4835–4838
- 61 Ou Z Y. Fundamental quantum limit in precision phase measurement. *Phys Rev A*, 1997, 55: 2598–2609
- 62 Kolkiran A, Agarwal G S. Quantum interferometry using coherent beam stimulated parametric down-conversion. *Opt Express*, 2008, 16: 6479–6485
- 63 Ou Z Y. Enhancement of the phase-measurement sensitivity beyond the standard quantum limit by a nonlinear interferometer. *Phys Rev A*, 2012, 85: 023815
- 64 Kong J, Ou Z Y, Zhang W P. Phase-measurement sensitivity beyond the standard quantum limit. *Phys Rev A*, 2013, 87: 023825
- 65 Plick W N, Dowling J P, Agarwal G S. Coherent-light-boosted sub-shot noise quantum interferometry. *New J Phys*, 2010, 12: 083014
- 66 Leibfried D, DeMarco B, Meyer V, et al. Trapped-Ion quantum simulator: experimental application to nonlinear interferometers. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 247901
- 67 Jing J T, Liu C J, Zhou Z F, et al. Realization of a nonlinear interferometer with parametric amplifiers. *Appl Phys Lett*, 2011, 99: 011110
- 68 Hudelist F, Kong J, Liu C J, et al. Quantum metrology with parametric amplifier based photon correlation interferometers. *Nature Commun*, 2014, 5: 3049
- 69 Marino A M, Corzo Trejo N V, Lett P D. Effect of losses on the performance of an SU(1,1) interferometer. *Phys Rev A*, 2012, 86: 023844
- 70 Li D, Yuan C H, Ou Z Y, et al. The phase sensitivity of an SU(1,1) interferometer with homodyne detection. 2013[arXiv: 1305.4769]
- 71 Rey A M, Jiang L, Lukin M D. Quantum-limited measurements of atomic scattering properties. *Phys Rev A*, 2007, 76: 053617
- 72 Lee C, Huang J, Deng H, et al. Nonlinear quantum interferometry with Bose condensed atoms. *Front Phys*, 2012, 7:

- 109–130
- 73 Holland J, Burnett K. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 1355–1358
 - 74 Margolus N, Levitin L B. The maximum speed of dynamical evolution. *Physica D (Amsterdam)*, 1998, 120: 188–195
 - 75 Aharonov Y, Albert D Z, Vaidman L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. *Phys Rev Lett*, 1988, 60: 1351–1354
 - 76 Ritchie N W M, Story J G, Hulet R G. Realization of a measurement of a “weak value”. *Phys Rev Lett*, 1991, 66: 1107–1110
 - 77 Pryde G J, O’Brien J L, White A G, et al. Measurement of quantum weak values of photon polarization. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 220405
 - 78 Aharonov Y, Popescu S, Tollaksen J. A time-symmetric formulation of quantum mechanics. *Phys Today*, 2010, 63: 27–32
 - 79 Cho A. Furtive approach rolls back the limits of quantum uncertainty. *Science*, 2011, 333: 690–693
 - 80 Lundeen J, Sutherland B, Patel A, et al. Direct measurement of the quantum wavefunction. *Nature*, 2011, 474: 188–191
 - 81 Lundeen J, Bamber C. Procedure for direct measurement of general quantum states using weak measurement. *Phys Rev Lett* 2012, 108: 070402
 - 82 Mir R, Lundeen J S, Mitchell M W, et al. A double-slit ‘which-way’ experiment on the complementarity–uncertainty debate. *New J Phys*, 2007, 9: 287
 - 83 Kocsis S, Braverman B, Ravets S, et al. Observing the average trajectories of single photons in a two-slit interferometer. *Science*, 2011, 332: 1170–1173
 - 84 Xu X Y, Kedem Y, Sun K, et al. Phase estimation with weak measurement using a white light source. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 033604
 - 85 Tsang M, Caves C M. Coherent quantum-noise cancellation for optomechanical sensors. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 123601
 - 86 Tsang M, Caves C M. Evading quantum mechanics: engineering a classical subsystem within a quantum environment. *Phys Rev X*, 2012, 2: 031016
 - 87 Braginsky V B, Vorontsov Y L, Thorne K S. Quantum nondemolition measurements. *Science*, 1980, 209: 547
 - 88 Caves C M, Thorne K S, Drever Ronald W P, et al. On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. *Rev Mod Phys*, 1980, 52: 341–392
 - 89 Braginsky V B, Khalili F Ya. *Quantum Measurement*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
 - 90 Meystre P, Scully M O. *Quantum Optics, Experimental Gravitation, and Measurement Theory*. New York: Plenum Press, 1983
 - 91 Wasilewski W, Jensen K, Krauter H, et al. Quantum noise limited and entanglement-assisted magnetometry. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 133601
 - 92 Woolley M J, Clerk A A. Two-mode back-action-evading measurements in cavity optomechanics. *Phys Rev A*, 2013, 87: 063846
 - 93 Zhang K, Meystre P, Zhang W P. Quantum-mechanics-free subsystem in a condensate-based optomechanical setup. *Phys Rev A*, 2013, 87: 063846

Quantum limits in quantum metrology

YUAN ChunHua¹, ZHANG KeYe¹ & ZHANG WeiPing^{1,2*}

¹ *Quantum Institute for Light and Atoms, Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;*

² *State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai 200062, China*

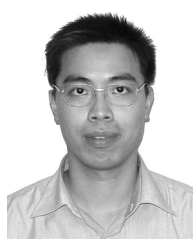
*E-mail: wpzhang@phy.ecnu.edu.cn

Abstract Given a physical setup, what is the precision that can be obtained? In this paper, we firstly review the recently theoretical developments about the quantum parameter estimation. The measurement sensitivity can be improved from the Heisenberg limit (HL) to super-Heisenberg limit (SHL) by changing the coupling Hamiltonian from linear to nonlinear. Then we review some techniques which have been used to break through the standard quantum limit (SQL) and reach the HL in optical quantum metrology, and describe the experiment of nonlinear quantum metrology where the interaction among particles as a valuable resource can contribute to measurement sensitivity and give scaling beyond the HL. Finally, we introduce a potential new approach to the future developments of quantum metrology.

Keywords quantum metrology, standard quantum limit, Heisenberg limit, super-Heisenberg scaling, phase sensitivity, quantum-mechanics free subsystems



YUAN ChunHua was born in 1978. He received the Ph.D. degree in condense matter physics from the Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, in 2007. Currently, he is an Associate Research Fellow at the Quantum Institute for Light and Atoms, East China Normal University. His research interests include quantum information, quantum metrology, and quantum optics.



ZHANG KeYe was born in 1983. He received the Ph.D. degree in optics from the East China Normal University, Shanghai, in 2010. Currently, he is an Associate Research Fellow at the Quantum Institute for Light and Atoms, East China Normal University. His research interests include ultra-cold atomic gases, quantum measurement, cavity optomechanics, and quantum simulation.



ZHANG WeiPing was born in 1962. He received the Ph.D. degree in optics from the Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Shanghai, in 1989. Currently, he is a Professor at the Quantum Institute for Light and Atoms, East China Normal University. His research interests include quantum optics, atom optics, and quantum information. Prof. Zhang WeiPing is a member of the Editorial Board of Physical Review Letters.