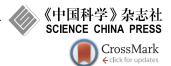
SCIENTIA SINICA Mathematica

## 论文



# $Kac ext{-}Moody$ 代数在 $U(\mathfrak{h})$ 上的模结构

献给万哲先教授 90 华诞

蔡延安1,2,3、谭海军4,5、赵开明6,7\*

- 1. 中国科学院吴文俊数学重点实验室, 合肥 230026;
- 2. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026;
- 3. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;
- 4. 东北师范大学数学与统计学院, 长春 130042;
- 5. 长春理工大学应用数学系, 长春 130022;
- 6. 河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050016;
- 7. Department of Mathematics, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON N2L 3C6, Canada E-mail: yatsai@mail.ustc.edu.cn, hjtan9999@yahoo.com, kzhao@wlu.ca

收稿日期: 2016-10-12; 接受日期: 2017-01-17; 网络出版日期: 2017-03-06; \* 通信作者 国家自然科学基金 (批准号: 11271109 和 11371134)、中国博士后科学基金 (批准号: 111900302 和 2016M600140)、吉林省青年基金 (批准号: 20160520111JH) 和加拿大 NSERC 基金 (批准号: 311907-2015) 资助项目

**摘要** 令  $\mathfrak{g}$  是任意 Kac-Moody 代数, 其 Cartan 子代数为  $\mathfrak{h}$ . 本文确定了在  $U(\mathfrak{h})$  上限制是秩 1 自由的  $\mathfrak{g}$ - 模组成的模范畴. 确切地讲, 这个模范畴是非空的当且仅当  $\mathfrak{g}$  是  $A_l$  型或是  $C_l$  型的, 其中 l 是正整数.

关键词 Kac-Moody 代数 非权模 不可约模

MSC (2010) 主题分类 17B10, 17B20, 17B65, 17B66, 17B68

# 1 引言

Lie 代数理论越来越广泛地应用于数学和物理的许多领域. 1968 年前后,为了像有限维单 Lie 代数一样利用权空间分解研究无限维 Lie 代数,美国数学家 Kac 和加拿大数学家 Moody 分别独立地利用广义 Cartan 矩阵引入了一类 Lie 代数,现在称之为 Kac-Moody 代数. 在过去的几十年里,这些代数 (特别是仿射 Kac-Moody 代数) 在组合数学、数论、可积系统、算子理论与量子随机过程等许多数学领域以及物理学中的量子场论中起着重要作用.

研究一个代数很重要的一件事情是研究它的表示. 而对一个代数的表示理论的研究, 最关键的是对其所有单模进行分类. 但是, 对于非交换 Lie 代数, 这件事情是非常难的, 参见文献 [1]. 事实上, 除了  $\mathfrak{sl}_2$ , 其余 Kac-Moody 代数的单模的完全分类并不清楚. 尽管如此, 对于特定的 Kac-Moody 代数, 数学家们分类出了一些特殊的表示, 例如, 一般 Kac-Moody 代数的有限维单模与不可约最高权模、有限维单 Lie 代数 [2] 和仿射 Kac-Moody 代数 [3,4] 的权空间有限维的单权模、 $\tilde{\mathfrak{sl}}_2$  的单 Whittaker 模 [5] 等.

英文引用格式: Cai Y A, Tan H J, Zhao K M. Module structures on  $U(\mathfrak{h})$  for Kac-Moody algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1491–1514, doi: 10.1360/N012016-00181

数学家们还构造了仿射 Kac-Moody 代数的一些其他单模, 参见文献 [6-13] 等.

本文分别用  $\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Z}_+$ 、 $\mathbb{N}$ 、 $\mathbb{C}$  和  $\mathbb{C}^*$  表示整数集、非负整数集、正整数集、复数集和非零复数集. 除非特别说明, 本文中的所有代数和向量空间都是基于复数域. 另外, 我们用  $U(\mathfrak{a})$  表示 Lie 代数  $\mathfrak{a}$  的泛包络代数, 并用  $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$  表示复数域上的 n 元多项式代数.

令  $\mathfrak{h}$  是 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的一个标准 Cartan 子代数, 则  $\mathfrak{g}$  上一个权模是指  $\mathfrak{h}$  对角作用的  $\mathfrak{g}$ - 模. 权模是 Kac-Moody 代数的几类经典表示之一. 令  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$  是用 "相反条件" 定义的  $\mathfrak{g}$ - 模范畴, 即  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$  是由在  $U(\mathfrak{h})$  上限制是秩 1 自由的  $\mathfrak{g}$ - 模组成的  $\mathfrak{g}$ -Mod 的满子范畴. Nilsson [14] 确定了范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{sl}_{l+1})$ , 其中的对象如下.

**例 1** 我们知道  $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$  的 Cartan 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{l \times l}.$$

记  $E_{i,j}$   $(1 \le i, j \le l+1)$  为如下 l+1 阶方阵: 其第 (i,j) 元素为 1 而其余位置元素为 0. 对  $1 \le k \le l+1$ , 令

$$\bar{h}_k := E_{k,k} - \frac{1}{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} E_{i,i},$$

则  $\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \dots + \bar{h}_{l+1} = 0$ ,而且  $\{E_{i,j} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant l+1\} \cup \{\bar{h}_1, \dots \bar{h}_l\}$  构成  $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$  的一组基. 对任意  $S \subseteq \{1, \dots, l+1\}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $a_{l+1} = 1$  和  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_l) \in (\mathbb{C}^*)^l$ , 多项式代数  $\mathbb{C}[\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_l]$  在下列作用下构成一个  $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$ - 模: 对所有  $g \in \mathbb{C}[\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_l]$  以及  $i, j \in \{1, 2, \dots, l+1\}$ ,  $k \in \mathfrak{l} = \{1, 2, \dots, l\}$ , 成立

$$\bar{h}_k \cdot g = \bar{h}_k g, \quad E_{i,j} \cdot g = a_i a_j^{-1} (\delta_{i \in S} + \delta_{i \notin S} (\bar{h}_i - b - 1)) (\delta_{j \in S} (\bar{h}_j - b) + \delta_{j \notin S}) \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j^{-1}(g),$$

其中  $\bar{\sigma}_i$   $(1 \leq i \leq l)$  是多项式代数  $\mathbb{C}[\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_l]$  的自同构, 它把  $\bar{h}_k$  映成  $\bar{h}_k - \delta_{k,i}$ ,  $\bar{\sigma}_{l+1}$  是恒等映射, 而

$$\delta_{s \in S} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } s \in S, \\ 0, & \text{如果 } s \notin S, \end{cases} \quad \delta_{s \notin S} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } s \in S, \\ 1, & \text{如果 } s \notin S. \end{cases}$$

我们记这个模为 M(a,b,S) (参见文献 [15, 引理 5]). Nilsson [14] 证明了

$$\mathcal{H}(\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})) = \{ M(\boldsymbol{a}, b, S) \mid \boldsymbol{a} \in (\mathbb{C}^*)^l, b \in \mathbb{C}, S \subseteq \{1, \dots, l+1\} \}.$$

进一步地,  $M(\boldsymbol{a}, b, S)$  是单的当且仅当  $(l+1)b \notin \mathbb{Z}$  或  $S \neq \emptyset$  或  $S \neq \{1, \dots, l+1\}$ . 为后文使用方便, 我们重新改写例 1 中的模作用. 令

$$\{e_i = E_{i,i+1}, f_i = E_{i+1,i}, h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \mid i = 1, \dots, l\}$$

为  $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$  的 Chevalley 生成元集, 设  $(H_1,\ldots,H_l)^{\mathrm{T}}=A^{-1}(h_1,\ldots,h_l)^{\mathrm{T}},$  则  $H_k=\sum_{i=1}^k \bar{h}_i,$   $k=1,\ldots,l.$ 

用  $a_i$  替换  $a_i a_{i+1}^{-1}$ , 则  $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$  在  $M(\boldsymbol{a}, b, S) \cong \mathbb{C}[H_1, \dots, H_l]$  上的模作用变成

$$H_i \cdot g = H_i g,$$

$$e_{i} \cdot g = \begin{cases} a_{i}(H_{i+1} - H_{i} - b)\sigma_{i}(g), & i, i+1 \in S, \\ a_{i}\sigma_{i}(g), & i \in S, \quad i+1 \notin S, \\ a_{i}(H_{i} - H_{i-1} - b - 1)(H_{i+1} - H_{i} - b)\sigma_{i}(g), & i \notin S, \quad i+1 \in S, \\ a_{i}(H_{i} - H_{i-1} - b - 1)\sigma_{i}(g), & i, i+1 \notin S, \end{cases}$$

$$f_{i} \cdot g = \begin{cases} a_{i}^{-1}(H_{i} - H_{i-1} - b)\sigma_{i}^{-1}(g), & i, i+1 \in S, \\ a_{i}^{-1}(H_{i} - H_{i-1} - b)(H_{i+1} - H_{i} - b - 1)\sigma_{i}^{-1}(g), & i \notin S, \quad i+1 \notin S, \\ a_{i}^{-1}\sigma_{i}^{-1}(g), & i \notin S, \quad i+1 \in S, \\ a_{i}^{-1}(H_{i+1} - H_{i} - b - 1)\sigma_{i}^{-1}(g), & i, i+1 \notin S, \end{cases}$$

其中  $g \in \mathbb{C}[H_1, \dots, H_l], i \in \mathfrak{l}, \sigma_i(g(H_1, H_2, \dots, H_l)) = g(H_1 - \delta_{1,i}, H_2 - \delta_{2,i}, \dots, H_l - \delta_{l,i})$  且  $H_{l+1} = H_0$ = 0.

最近, Nilsson [16] 证明了对有限维单 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$ , 除了有限  $A_l$  型和有限  $C_l$  型之外,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$  都 是空的. 对所有 Witt 代数的类似工作在文献 [17] 中完成, 而对 Heisenberg-Virasoro 代数和 W(2,2) 的 这类模在文献 [18] 中确定. 文献 [19] 确定了基本 Lie 超代数的这类表示. 本文将确定所有 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ .

本文的结构如下: 第2节将给出一些定义和符号,并给出一些基本的引理; 仿射 Kac-Moody 代数 g 的范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$  将在第 3 节的定理 3 中给出; 而第 4 节的定理 11 将完全确定秩为 2 的 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$ 的范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$  中的所有对象; 在第 5 节中, 利用与 Nilsson 不同的方法, 我们将重新证明 Nilsson 在文 献 [16] 中的结果, 即确定有限型 Kac-Moody 代数 g 的范畴 H(g); 最后, 我们将在第 6 节的定理 20 中 给出一般 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$  中的所有表示.

#### $\mathbf{2}$ 预备知识

我们首先回顾文献 [20] 中一些符号. 一个广义 Cartan 矩阵, 是指满足下列条件的整系数方阵  $A = (a_{ij})_{i,j \in I},$  其中  $I = \{1, 2, \dots, l\},$ 

- (1)  $a_{ii} = 2, i \in \mathfrak{l};$
- (2)  $a_{ij} ≤ 0$ ,  $\rightleftarrows i ≠ j$ ;
- (3)  $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$ .

本文只考虑 A 是不可分解的情形, 即不存在分拆  $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_1\cup\mathfrak{l}_2$  使得对任意  $i\in\mathfrak{l}_1$  和  $j\in\mathfrak{l}_2$  均有  $a_{ij}=0$ . 根据文献 [20] 可知, A一定是以下三种类型之一: 有限型、仿射型或不定型.

广义 Cartan 矩阵  $A = (a_{ij})_{l \times l}$  的 Dynkin 图  $\Gamma(A)$  是由标序为 1, 2, ..., l 的 l 个顶点组成的图: 如 果  $i \neq j$  且  $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ , 则顶点  $i \neq j$  之间用  $\max(|a_{ij}|,|a_{ji}|)$  条边相连接; 如果  $|a_{ij}| > 1$ , 则这些边带有 一个从顶点 j 指向顶点 i 的箭头; 如果  $a_{ij}a_{ji} > 4$ , 则顶点 i 和 j 之间由一条粗体的线相连结并标有有 序整数对  $(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ .

 $\diamondsuit$  ⟨·.·⟩:  $h \times h^* \to \mathbb{C}$  为向量空间 h 及其对偶空间上的自然不变双线性型. 给定

(1) 广义 Cartan 矩阵  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^l$ ;

- (2) 维数为  $\dim \mathfrak{h} = 2l \operatorname{rank} A$  的有限维向量空间  $\mathfrak{h}$  (即 Cartan 子代数);
- (3) 选定单根集  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq \mathfrak{h}^*$  和单余根集  $\Pi^{\vee} = \{\alpha_1^{\vee}, \dots, \alpha_l^{\vee}\} \subseteq \mathfrak{h}$ ,使得  $\Pi$  和  $\Pi^{\vee}$  都是线性无关的且  $\langle \alpha_i^{\vee}, \alpha_j \rangle = \alpha_j(\alpha_i^{\vee}) = a_{ij}, i, j \in \mathfrak{l}$ .

我们将 A 与一个 Lie 代数  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{t}$  相关联, 称其为 (秩为 l 的) Kac-Moody 代数, 其中  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  是由  $\mathfrak{h}$  和元素  $\{e_i, f_i \mid i=1,2,\ldots,l\}$  按照如下关系定义的辅助 Lie 代数:

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0,$$

$$[h,e_i] = \alpha_i(h)e_i, \quad h \in \mathfrak{h},$$

$$[h,f_i] = -\alpha_i(h)f_i, \quad h \in \mathfrak{h},$$

$$[e_i,f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^{\vee},$$

$$(2.1)$$

而  $\mathfrak{t}$  是  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  中与  $\mathfrak{h}$  相交平凡的 (唯一) 极大理想 (参见文献 [20, 定理 1.2]). Gabber 和 Kac 证明了对可对称化的 Cartan 矩阵 A, 特别地, 当 A 是有限型或仿射型时,  $\mathfrak{g}(A)$  由  $\mathfrak{h}$  和  $\{e_i, f_i \mid i \in \mathfrak{l}\}$  按照关系式 (2.1) 和下面关系式 (参见文献 [20, 定理 9.11]) 生成:

$$(ade_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = (adf_i)^{1-a_{ij}}(f_i) = 0, \quad i \neq j.$$
 (2.2)

设  $\mathfrak{g}$  是  $\mathbb{C}$  上 Kac-Moody 代数. 本文的目标是确定  $\mathfrak{g}$ - 模范畴  $\mathfrak{g}$ -Mod 中由限制在  $U(\mathfrak{h})$  上是秩 1 自由的对象组成满子范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ , 即

$$\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \{ M \in \mathfrak{g}\text{-Mod} \mid \operatorname{Res}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} M \cong_{\mathfrak{h}} U(\mathfrak{h}) \}.$$

取  $\mathfrak{h}$  的一组基为  $\{H_1, H_2, \dots, H_{2l-\operatorname{rank} A}\}$  (后文中将明确指出). 由于  $\mathfrak{h}$  是交换 Lie 代数, 所以,  $U(\mathfrak{h})$  与 多项式代数  $\mathcal{P} = \mathbb{C}[H_1, \dots, H_{2l-\operatorname{rank} A}]$  同构. 对每一个  $i \in J = \{1, 2, \dots, 2l - \operatorname{rank} A\}$ , 记

$$\mathcal{P}_i = \mathbb{C}[H_1, \dots, H_{i-1}, H_{i+1}, \dots, H_{2l-\text{rank}A}].$$

显然有  $U(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_i[H_i]$ ,  $i \in J$ . 对  $g \in U(\mathfrak{h})$ , 我们用  $\deg_i(g)$  记把 g 看成  $\mathcal{P}_i$  上以  $H_i$  为变元的多项式的次数, 同时, 令  $\deg_i(0) = -1$ .

定义 U(h) 上的自同构如下:

$$\sigma_i: U(\mathfrak{h}) \longrightarrow U(\mathfrak{h}),$$
 
$$H_j \mapsto H_j - \delta_{i,j}, \quad \forall j \in J.$$

容易知道  $\sigma_i^{-1}$  由把  $H_j$  映到  $H_j + \delta_{i,j}$  确定, 而且  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  对所有  $i, j \in J$  都成立. 易知下列事实成立.

引理 2 设  $g \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, m \in \mathbb{Z}_+, 则有 \deg_i(\sigma_i^k - \mathrm{Id})(g) = \deg_i(g) - 1, 且$ 

$$\deg_i(\sigma_i - \mathrm{Id})^m(g) = \begin{cases} \deg_i(g) - m, & \text{if } m \leqslant \deg_i(g), \\ -1, & \text{if } m > \deg_i(g). \end{cases}$$

对于 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$ , 下列辅助代数将在后文讨论中十分有用. 令 Z 为  $\mathbb{C}$  上 (有限维) 交换 Lie 代数, 则  $\tilde{\mathfrak{g}}=Z\oplus\mathfrak{g}$  在下列 Lie 括号下构成 Lie 代数:

$$[z, \mathfrak{g}] = 0, \quad \forall z \in Z. \tag{2.3}$$

令  $\tilde{\mathfrak{h}} = Z \oplus \mathfrak{h}$ , 则  $\tilde{\mathfrak{h}}$  是交换 Lie 代数且  $U(\tilde{\mathfrak{h}}) \cong U(Z) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{h})$ . 我们可以把  $\sigma_i \ (i \in \mathfrak{l})$  在  $U(\mathfrak{h})$  上的作用 自然延拓到  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上去.

假设在  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上存在  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模结构使其为  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上的秩 1 自由模. 由于  $\mathfrak{g}$  是  $\tilde{\mathfrak{g}}$  的子代数, 因此,  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$ 上自然地有 g- 模作用. 我们将限制在  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上是秩 1 自由的  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模组成满子范畴记为  $\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}})$ .

#### 3 仿射 Kac-Moody 代数的表示

本节将考虑仿射 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 事实上, 我们将证明如下定理: 定理 3 设 g 为仿射 Kac-Moody 代数,则

$$\mathcal{H}(\mathfrak{q}) = \emptyset.$$

Kac [20] 将仿射型广义 Cartan 矩阵分为三类:

$$\begin{array}{l} \text{(Aff1)} \ A_1^{(1)}, \ A_l^{(1)} \ (l\geqslant 2), \ B_l^{(1)} \ (l\geqslant 3), \ C_l^{(1)} \ (l\geqslant 2), \ D_l^{(1)} \ (l\geqslant 4), \ E_l^{(1)} \ (l=6,7,8); \\ \text{(Aff2)} \ A_2^{(2)}, \ A_{2l}^{(2)} \ (l\geqslant 2), \ A_{2l-1}^{(2)} \ (l\geqslant 3), \ D_{l+1}^{(2)} \ (l\geqslant 2), \ E_6^{(2)}; \end{array}$$

(Aff2) 
$$A_2^{(2)}$$
,  $A_{2l}^{(2)}$   $(l \ge 2)$ ,  $A_{2l-1}^{(2)}$   $(l \ge 3)$ ,  $D_{l+1}^{(2)}$   $(l \ge 2)$ ,  $E_6^{(2)}$ 

(Aff3) 
$$D_4^{(3)}$$
.

根据文献 [20] 中给出的仿射 Kac-Moody 代数的实现, 我们知道任意仿射 2 型或仿射 3 型的的 Kac-Moody 代数 g 均包含一个仿射 1型 Kac-Moody 代数作为子代数, 且其 Cartan 子代数即为 g 的 Cartan 子代数. 因此, 我们只需对仿射 1 型 Kac-Moody 代数证明定理 3 成立.

令 g 为仿射 1 型 Kac-Moody 代数,则

$$\mathfrak{g} \cong \dot{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d,$$

其中 g 是 C 上有限维 Kac-Moody 代数, 且

$$[x \otimes t^{k_1} + \lambda_1 K + \mu_1 d, y \otimes t^{k_2} + \lambda_2 K + \mu_2 d]$$
  
=  $[x, y] \otimes t^{k_1 + k_2} + \mu_1 k_2 y \otimes t^{k_2} - \mu_2 k_1 x \otimes t^{k_1} + k_1 \delta_{k_1, -k_2}(x, y) K,$ 

其中  $x, y \in \mathfrak{g}, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}, k_i \in \mathbb{Z}, \overline{n} (\cdot, \cdot)$  是  $\mathfrak{g}$  上不变双线性型.

取  $\mathfrak{h}$  ( $\mathfrak{g}$  的 Carta 子代数) 的一组基为  $h_1, \ldots, h_l$  (Chevalley 生成元), 则

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 + \dots + \mathbb{C}h_l + \mathbb{C}K + \mathbb{C}d,$$

而且我们有下面的引理:

引理 4 设  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}), (h_i \otimes t^k) \cdot 1 = R_{ik} \in M, 则$ 

$$(h_i \otimes t^k) \cdot g = \tau^k(g) R_{ik}, \quad \forall g \in M,$$

其中  $\tau$  是由把 d 映到 d-1 而保持其他变量不动定义的  $\mathbb{C}[h_1,\ldots,h_l,K,d]$  上的自同构.

引理由下面两个关系式直接得到: 证明

$$[h_i \otimes t^k, h_j] = [h_i \otimes t^k, K] = 0, \quad \forall i, j, k,$$
  
$$d, h_i \otimes t^k] = kh_i \otimes t^k, \quad \forall i, k.$$

证毕.  现在我们可以证明以下引理:

引理 5 设  $\mathfrak{g}$  是仿射 1 型 Kac-Moody 代数, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

**证明** 假设  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$  并设  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 在  $M \cong \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_l, K, d]$  上, 有

$$2kK = 2(kK) \cdot 1 = [h_1 \otimes t^k, h_1 \otimes t^{-k}] \cdot 1$$

$$= R_{1k}\tau^k(R_{1,-k}) - R_{1,-k}\tau^{-k}(R_{1k})$$

$$= \tau^k(R_{1,-k}\tau^{-k}(R_{1k})) - R_{1,-k}\tau^{-k}(R_{1k})$$

$$= (\tau^k - 1)(R_{1,-k}\tau^{-k}(R_{1k})),$$

其中  $k \in \mathbb{Z}$ . 根据引理 2. 有

$$R_{1,-k}\tau^{-k}(R_{1k}) = -2Kd + R'_k,$$

其中  $\deg_d R'_k = 0$ . 于是,  $\deg_d R_{1k}$  与  $\deg_d R_{1,-k}$  有且只有一个是 1. 取  $k \neq j \in \mathbb{Z}$  满足  $k + j \neq 0$  且  $\deg_d R_{1k} \deg_d R_{1j} = 1$ . 不妨设

$$R_{1k} = a_k d + b_k, \quad R_{1j} = a_j d + b_j,$$

其中  $\deg_d a_k = \deg_d b_k = \deg_d a_i = \deg_d b_i = 0$  且  $a_k a_i \neq 0$ , 则

$$0 = [h_1 \otimes t^k, h_1 \otimes t^j] \cdot 1 = R_{1k}\tau^k(R_{1j}) - R_{1j}\tau^j(R_{1k}) = a_k a_j(j-k)d + jb_j a_k - kb_k a_j \neq 0.$$

这是不可能的. 所以,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

从上面的引理我们知道定理 3 成立.

# 4 秩为 2 的 Kac-Moody 代数的表示

本节将研究广义 Cartan 矩阵为  $A(r,s)=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}=(\frac{2}{-s}\frac{-r}{2})$  的 Kac-Moody 代数  $\mathfrak g$  的范畴  $\mathcal H(\mathfrak g)$ . 事实上, 我们将证明下面的命题:

命题 6 令 Kac-Moody 代数 g 的 Cartan 矩阵为 A(r,s), 则  $\mathcal{H}(g) \neq \emptyset$  当且仅当  $rs \leq 2$ .

由于在这种情形下, A 始终是可对称化的, 因此, 我们可以在证明中运用关系式 (2.2). 当 A 不可逆, 即 rs=4 时,  $\mathfrak{g}$  是仿射 Kac-Moody 代数, 其表示已经在第 3 节中确定了. 因此, 在本节剩下的讨论中, 我们将假设  $rs \neq 4$ . 当 r=s=1 时,  $\mathfrak{g}$  为  $A_2$  型有限维单 Lie 代数, 其结果为例 1 的特例. 所以, 我们进一步假设  $rs \neq 1$ .

由于  $rs \neq 4$ , A 是可逆的, 所以可以取  $\mathfrak{h}$  的基为

$$(H_1, H_2)^{\mathrm{T}} = A^{-1}(\alpha_1^{\vee}, \alpha_2^{\vee})^{\mathrm{T}},$$

那么,我们有

$$[H_i, e_j] = \delta_{ij}e_j, \quad [H_i, f_j] = -\delta_{ij}f_j, \quad i, j = 1, 2,$$

$$[e_1, f_1] = 2H_1 - rH_2,$$

$$[e_2, f_2] = -sH_1 + 2H_2,$$

$$[e_i, f_j] = 0, \quad i \neq j,$$

$$(ade_1)^{1+r}(e_2) = (adf_1)^{1+r}(f_2) = 0,$$

$$(ade_2)^{1+s}(e_1) = (adf_2)^{1+s}(f_1) = 0.$$

根据前两个关系式, 我们可以得到下面的引理:

$$H_i \cdot g = H_i g,$$
  

$$e_i \cdot g = E_i \sigma_i(g),$$
  

$$f_i \cdot g = F_i \sigma_i^{-1}(g),$$

其中  $E_i = e_i \cdot 1, F_i = f_i \cdot 1 \in \mathbb{C}[H_1, H_2] \setminus \{0\}.$ 

于是, 要确定  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ , 我们只需确定所有可能的 4 元组  $(E_1, E_2, F_1, F_2)$ .

接下来, 我们证明几个在后文证明中要用的引理.

引理 8 令  $\mathfrak{g}$  为 Lie 代数  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ,而 Z 为  $\mathbb{C}$  上交换 Lie 代数. 对任意  $a \in \mathbb{C}^*$ , $b \in U(Z)$ , $S \subseteq \{1,2\}$ ,向量空间  $M(a,b,S) = U(\tilde{\mathfrak{h}})$  在下列作用下构成一个  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模: 对所有  $\tilde{\mathfrak{g}} \in U(\tilde{\mathfrak{h}})$ ,有

$$H \cdot \tilde{g} = H\tilde{g}, \quad z \cdot \tilde{g} = z\tilde{g}, \quad \forall z \in Z,$$

$$e \cdot \tilde{g} = \begin{cases} a(H+b)\sigma_{i}(\tilde{g}), & 1, 2 \notin S \ \vec{\boxtimes} \ 1, 2 \in S, \\ a\sigma_{i}(\tilde{g}), & 1 \in S, \quad 2 \notin S, \\ a(-H^{2} + H + b)\sigma_{i}(\tilde{g}), & 1 \notin S, \quad 2 \in S, \end{cases}$$

$$f \cdot \tilde{g} = \begin{cases} a^{-1}(-H+b)\sigma_{i}^{-1}(\tilde{g}), & 1, 2 \notin S \ \vec{\boxtimes} \ 1, 2 \in S, \\ -a^{-1}(H^{2} + H + b)\sigma_{i}^{-1}(\tilde{g}), & 1 \in S, \quad 2 \notin S, \\ a^{-1}\sigma_{i}^{-1}(\tilde{g}), & 1 \notin S, \quad 2 \in S. \end{cases}$$

进一步地,  $\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \{ M(a,b,S) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in U(Z), S \subseteq \{1,2\} \}.$ 

证明 利用例 1 中的关系式在 n=1 的情形并重新选择  $a_i$  和 b, 我们可以看到上面定义的  $\tilde{\mathfrak{g}}$  在  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上的作用给出  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上一个  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模结构, 即  $M(a,b,S)\in\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}})$  对任意  $a\in\mathbb{C}^*$ ,  $b\in U(Z)$ ,  $S\subseteq\{1,2\}$  均成立. 因此, 我们只需证明  $\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}})$  中的每一个对象均有上述结构.

设  $M = U(\tilde{\mathfrak{h}})$  是  $\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}})$  中的一个对象. 通过  $[\mathfrak{g}, Z] = 0$  和 H 的选择, 我们知道, M 上的  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模结构由  $\mathfrak{g}$  的 Che-valley 生成元 e 和 f 在 1 上的作用完全确定. 定义唯一分解整环 U(Z) 上的 Lie 代数  $\hat{\mathfrak{g}} := U(Z) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \subset U(\tilde{\mathfrak{g}})$ . 那么,  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  变成 U(Z) 上一个  $\hat{\mathfrak{g}}$ - 模, 其中  $\hat{\mathfrak{g}}$  在  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上的作用保留了  $\tilde{\mathfrak{g}}$  在  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上的作用.

现在来扩张基域. 设  $\mathbb{C}(Z)$  为 U(Z) 的分式域, 并令  $\overline{\mathbb{C}(Z)}$  为  $\mathbb{C}(Z)$  的代数闭扩域. 令

$$G = \overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{U(Z)} \hat{\mathfrak{g}} \cong \overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g},$$

则  $G \cong \mathfrak{sl}_2(\overline{\mathbb{C}(Z)})$ , 其一个 Cartan 子代数为  $\mathfrak{H} \cong \overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ . 如果把  $1 \otimes \mathfrak{g} \subset G$  等同于  $\mathfrak{g}$ , 则 (e, f, h) 为 G 的 Chevalley 生成元.

注意到  $U(\tilde{\mathfrak{h}}) \cong U(Z) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{h})$ , 因此有如下  $\overline{\mathbb{C}(Z)}$  上的向量空间同构:

$$\overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{U(Z)} U(\tilde{\mathfrak{h}}) \cong \overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{h}) \cong \overline{\mathbb{C}(Z)}[\mathfrak{H}] = U(\mathfrak{H}),$$

其中最后一项为  $\mathfrak{H}$  在  $\overline{\mathbb{C}(Z)}$  上的泛包络代数. 所以, 我们可以将  $U(\mathfrak{H})$  与  $\overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{U(Z)} U(\tilde{\mathfrak{h}})$  等同起来. 显然, 可以把  $\hat{\mathfrak{g}}$  在  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上的模作用自然地延拓成 G 在  $\overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{U(Z)} U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上模作用:

$$(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes x) \bullet (\psi_1 \otimes \psi_2 g) = \phi_1 \psi_1 \otimes (\phi_2 \otimes x \cdot \psi_2 g),$$

其中  $\phi_1, \psi_1 \in \overline{\mathbb{C}(Z)}, \phi_2, \psi_2 \in U(Z), x \in \mathfrak{g}, g \in U(\mathfrak{h}).$ 

由于  $\mathfrak{H}$  在  $\overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{U(Z)} U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上的作用是乘积, 于是可知, 得到的 G- 模  $\overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{U(Z)} U(\tilde{\mathfrak{h}})$  属于  $\mathcal{H}(G)$ , 其中所有的模都是基于域  $\overline{\mathbb{C}(Z)}$ . 容易知道, 文献 [14] 中用于证明定理 11 和 30 的方法依然可以用于研究 G- 模  $\overline{\mathbb{C}(Z)} \otimes_{U(Z)} U(\tilde{\mathfrak{h}})$ . 因此, 存在  $a \in \overline{\mathbb{C}(Z)}^*$ ,  $b \in \overline{\mathbb{C}(Z)}$ ,  $S \subseteq \{1,2\}$  使得例 1 中的结论成立. 更进一步, 由于  $\mathfrak{g} \subset G$  在  $U(\tilde{\mathfrak{h}})$  上的作用与  $\mathfrak{g}$  在  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模  $U(\tilde{\mathfrak{h}}) = M$  上的作用一致, 因此, 我们必须有  $e \bullet 1$ ,  $f \bullet 1 \in U(\tilde{\mathfrak{h}})$ , 从而  $a,b \in U(Z)$ . 再利用例 1, 我们有  $a^{-1} \in U(Z)$ . 所以,  $a \in \mathbb{C}^*$  且  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 故引理成立.

现在把 M 分别看成下列 Lie 代数的表示:

$$\mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}f_1 + \mathbb{C}(2H_1 - rH_2) + \mathbb{C}H_2,$$
  
$$\mathbb{C}e_2 + \mathbb{C}f_2 + \mathbb{C}(sH_1 - 2H_2) + \mathbb{C}H_1,$$

利用引理 8, 我们知道仅有的可能的  $(E_1, F_1)$  和  $(E_2, F_2)$  为

$$(E_1, F_1) = \begin{cases} \left(a_1 \left(H_1 - \frac{r}{2}H_2 + b\right), a_1^{-1} \left(-H_1 + \frac{r}{2}H_2 + b\right)\right), \\ \left(a_1, -a_1^{-1} \left(\left(H_1 - \frac{r}{2}H_2\right)^2 + H_1 - \frac{r}{2}H_2 + b\right)\right), \\ \left(a_1 \left(-\left(H_1 - \frac{r}{2}H_2\right)^2 + H_1 - \frac{r}{2}H_2 + b\right), a_1^{-1}\right), \\ \left(a_2 \left(H_2 - \frac{s}{2}H_1 + c\right), a_2^{-1} \left(-H_2 + \frac{s}{2}H_1 + c\right)\right), \\ \left(a_2 \left(-\left(H_2 - \frac{s}{2}H_1\right)^2 + H_2 - \frac{s}{2}H_1 + c\right)\right), \\ \left(a_2 \left(-\left(H_2 - \frac{s}{2}H_1\right)^2 + H_2 - \frac{s}{2}H_1 + c\right), a_2^{-1}\right), \end{cases}$$

其中  $b \in \mathbb{C}[H_2]$ , 而  $c \in \mathbb{C}[H_1]$ .

在证明本节的主要结论之前, 我们还需要证明一些辅助结论.

**引理 9** 设 Kac-Moody 代数 g 的 Cartan 矩阵 A(r,s) 满足  $rs \neq 1,4$ .

- (1) 如果 s > 1, 则  $\deg_1 E_1 \deg_1 F_1 = 0$ ;
- (2) 如果 r > 1, 则  $\deg_2 E_2 \deg_2 F_2 = 0$ .

证明 只需证明 (1). 假设结论不成立, 那么不妨设

$$E_1 = a_1 \left( H_1 - \frac{r}{2} H_2 + b \right), \quad F_1 = a_1^{-1} \left( -H_1 + \frac{r}{2} H_2 + b \right),$$

其中  $b \in \mathbb{C}[H_2]$ . 如果  $E_2 = a_2$  且  $F_2 = -a_2^{-1}((H_2 - \frac{s}{2}H_1)^2 + H_2 - \frac{s}{2}H_1 + c)$  对某个  $c \in \mathbb{C}[H_1]$  成立, 则

$$0 = [e_2, f_1] \cdot 1 = E_2 \sigma_2(F_1) - F_1 \sigma_1^{-1}(E_2) = a_2(\sigma_2(F_1) - F_1).$$

这推出  $\deg_2 F_1 = 0$ . 因此,  $b = -\frac{r}{2}H_2 + b_1$ ,  $b_1 \in \mathbb{C}$ . 于是,

$$E_1 = a_1(H_1 - rH_2 + b_1), \quad F_1 = a_1^{-1}(-H_1 + b_1).$$

故

$$0 = [e_1, f_2] \cdot 1 = E_1 \sigma_1(F_2) - F_2 \sigma_2^{-1}(E_1) = a_1 a_2^{-1} r(s-1) H_2^2 + d_1 H_2 + d_0,$$

其中  $d_1, d_0 \in \mathbb{C}[H_1]$ . 这与 s > 1 矛盾. 因此,  $(\deg_2 E_2, \deg_2 F_2) \neq (0, 2)$ . 同理,

$$(\deg_2 E_2, \deg_2 F_2) \neq (2, 0).$$

现在设  $E_2=a_2(H_2-\frac{s}{2}H_1+c),\ F_2=-a_2^{-1}(H_2-\frac{s}{2}H_1-c),\$ 其中  $c=\sum_{k=0}^m\lambda_kH_1^k\in\mathbb{C}[H_1].$  如果 m>1 且  $\lambda_m\neq 0$ , 那么,

$$0 = [e_1, f_2] \cdot 1 = E_1 \sigma_1(F_2) - F_2 \sigma_2^{-1}(E_1) = a_1 a_2^{-1} \lambda_m \left( -m + \frac{r}{2} + b - \sigma_2^{-1}(b) \right) H_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k' H_1^k,$$

其中  $\lambda'_k \in \mathbb{C}[H_2]$  (k < m). 于是,

$$b = -\left(m - \frac{r}{2}\right)H_2 + b_1, \quad b_1 \in \mathbb{C}.$$

故

$$0 = [e_1, f_2] \cdot 1 = -a_1 a_2^{-1} m \left( 1 - \frac{s}{2} + \sigma_1(c) - c \right) H_2 + \lambda_0'',$$

其中  $\lambda_0'' \in \mathbb{C}[H_1]$ . 因此, 有

$$\sigma_1(c) - c = -\left(1 - \frac{s}{2}\right).$$

所以,  $m = \deg_1 c \le 1$ . 这是一个矛盾. 因此,  $\deg_1 c \le 1$ . 利用对称性, 我们同时也有  $\deg_2 b \le 1$ . 令  $b = b_1 H_2 + b_2$ ,  $c = c_1 H_1 + c_2$ , 其中  $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . 我们有

$$E_1 = a_1 \left( H_1 + \left( b_1 - \frac{r}{2} \right) H_2 + b_2 \right), \quad F_1 = a_1^{-1} \left( -H_1 + \left( b_1 + \frac{r}{2} \right) H_2 + b_2 \right),$$

$$E_2 = a_2 \left( H_2 + \left( c_1 - \frac{s}{2} \right) H_1 + c_2 \right), \quad F_2 = -a_2^{-1} \left( H_2 - \left( c_1 + \frac{s}{2} \right) H_1 - c_2 \right),$$

此时,

$$0 = [e_1, f_2] \cdot 1$$

$$= a_2^{-1} a_1 \left[ \left( \frac{-s}{2} - c_1 \right) \left( b_1 + 1 - \frac{r}{2} \right) H_1 + \left( b_1 - \frac{r}{2} \right) \left( 1 - \frac{s}{2} - c_1 \right) H_2 - b_2 \left( c_1 + \frac{s}{2} \right) - c_2 \left( b_1 - \frac{r}{2} \right) \right].$$

因此, 我们有

$$b_1 = \frac{r}{2}, \quad c_1 = \frac{-s}{2},$$

或

$$b_1 = \frac{r}{2} - 1$$
,  $c_1 = 1 - \frac{s}{2}$ ,  $b_2 = c_2$ .

如果  $b_1 = \frac{r}{2}$ ,  $c_1 = -\frac{s}{2}$ , 则

$$0 = [e_2, f_1] \cdot 1 = a_2 a_1^{-1} [-s(1-r)H_1 - r(1-s)H_2 - rc_2 + sb_2] \neq 0,$$

这是不可能成立的.

如果 
$$b_1 = \frac{r}{2} - 1$$
,  $c_1 = 1 - \frac{s}{2}$ ,  $b_2 = c_2$ , 则

$$0 = [e_2, f_1] \cdot 1 = a_2 a_1^{-1} [(2-s)(1-r)H_2 + (2-r)(1-s)H_1 + b_2(s-r)] \neq 0.$$

因此, s = r = 2, 这与假设  $sr \neq 4$  矛盾. 故引理成立.

例 10 令  $\mathfrak{g}$  为  $B_2$  型 Kac-Moody 代数, 其 Cartan 矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ). 通过直接计算验证 Serre 关 系容易证明, 对任意  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in (\mathbb{C}^*)^2, S \subseteq \{1, 2\}$ , 向量空间  $M(\mathbf{a}, S) = \mathbb{C}[H_1, H_2]$  在以下作用下构 成一个  $\mathfrak{g}$ - 模: 对所有  $g \in \mathbb{C}[H_1, H_2]$ , 有

$$H_{i} \cdot g = H_{i}g, \quad i = 1, 2,$$

$$e_{1} \cdot g =\begin{cases} a_{1}\sigma_{1}(g), & 1 \in S, \\ -a_{1}\left(H_{1} - \frac{1}{2}H_{2} - \frac{3}{4}\right)\left(H_{1} - \frac{1}{2}H_{2} - \frac{1}{4}\right)\sigma_{1}(g), & 1 \notin S, \end{cases}$$

$$f_{1} \cdot g =\begin{cases} -a_{1}^{-1}\left(H_{1} - \frac{1}{2}H_{2} + \frac{3}{4}\right)\left(H_{1} - \frac{1}{2}H_{2} + \frac{1}{4}\right)\sigma_{1}^{-1}(g), & 1 \in S, \\ a_{1}^{-1}\sigma_{1}^{-1}(g), & 1 \notin S, \end{cases}$$

$$e_{2} \cdot g =\begin{cases} a_{2}\left(-2H_{1} + H_{2} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}(g), & 1, 2 \in S, \\ a_{2}\left(H_{2} - \frac{1}{2}\right)\left(2H_{1} - H_{2} + \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}(g), & 1 \in S, \quad 2 \notin S, \\ a_{2}\left(H_{2} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}(g), & 1, 2 \notin S, \end{cases}$$

$$a_{2}\sigma_{2}(g), & 1 \notin S, \quad 2 \notin S, \end{cases}$$

$$f_{2} \cdot g =\begin{cases} -a_{2}^{-1}\left(H_{2} + \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}^{-1}(g), & 1, 2 \notin S, \\ a_{2}^{-1}\sigma_{2}^{-1}(g), & 1, 2 \notin S, \end{cases}$$

$$a_{2}^{-1}\left(2H_{1} - H_{2} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}^{-1}(g), & 1, 2 \notin S, \end{cases}$$

$$a_{2}^{-1}\left(H_{2} + \frac{1}{2}\right)\left(2H_{1} - H_{2} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}^{-1}(g), & 1 \notin S, \quad 2 \in S. \end{cases}$$

$$\sigma_{2}^{-1}\left(H_{2} + \frac{1}{2}\right)\left(2H_{1} - H_{2} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}^{-1}(g), & 1 \notin S, \quad 2 \in S. \end{cases}$$

$$\sigma_{2}^{-1}\left(H_{2} + \frac{1}{2}\right)\left(2H_{1} - H_{2} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{2}^{-1}(g), & 1 \notin S, \quad 2 \in S. \end{cases}$$

这里略去大部分验证过程(部分关系式的验证将在定理 11 的证明中出现).

现在来证明秩为 2 的 Kac-Moody 代数的主要结论.

设 Kac-Moody 代数  $\mathfrak g$  的 Cartan 矩阵为  $({2\atop -s}{2\atop 2})$ , 则  $\mathcal H(\mathfrak g)\neq\emptyset$  当且仅当  $rs\leqslant 2$ . 进一 步地,

- (1) 如果 r = s = 1, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \{M(\boldsymbol{a}, b, S) \mid \boldsymbol{a} \in (\mathbb{C}^*)^2, b \in \mathbb{C}, S \subseteq \{1, 2, 3\}\}$ , 其中  $M(\boldsymbol{a}, b, S)$  是例 1 中定义的模;
- (2) 如果 r = 1, s = 2, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \{M(\boldsymbol{a}, S) \mid \boldsymbol{a} \in (\mathbb{C}^*)^2, S \subseteq \{1, 2\}\}$ , 其中  $M(\boldsymbol{a}, S)$  是例 10 中定义 的模.

根据例 1 和定理 3, 我们不妨设  $rs \neq 4$  或  $rs \neq 1$ . 于是, 我们进一步假设  $s \geq 2$ . 假设  $E_1$ 、 $F_1$ 、 $E_2$  和  $F_2$  确定一个  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$  中的模 M. 利用 Chevalley 对合和引理 8, 我们不妨设

$$E_1 = a_1, \quad F_1 = -a_1^{-1} \left[ \left( H_1 - \frac{r}{2} H_2 \right)^2 + H_1 - \frac{r}{2} H_2 + b \right],$$

其中  $b = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j H_2^j \in \mathbb{C}[H_2]$ ,而  $a_1 \in \mathbb{C}^*$ .

于是, 有  $\deg_2 F_1 \neq 0$ , 从而,  $\deg_1 E_2 \neq 0$ . 事实上, 如果  $\deg_1 E_2 = 0$ , 则  $E_2 \in \mathbb{C}$ . 根据

$$0 = [e_2, f_1] \cdot 1 = E_2(\sigma_2(F_1) - F_1),$$

我们得到  $\deg_2 F_1 = 0$ , 与  $\deg_2 F_1 \neq 0$  矛盾. 因为

$$0 = [e_1, f_2] \cdot 1 = a_1(\sigma_1(F_2) - F_2),$$

所以,  $\deg_1 F_2 = 0$ . 因此有

$$(E_2, F_2) = (a_2(H_2 - sH_1 + c_1), a_2^{-1}(-H_2 + c_1)),$$

其中  $c_1 \in \mathbb{C}$ , 或

$$(E_2, F_2) = \left(a_2\left(-\left(H_2 - \frac{s}{2}H_1\right)^2 + H_2 - \frac{s}{2}H_1 + c\right), a_2^{-1}\right),$$

其中  $c \in \mathbb{C}[H_1]$ .

情形 1  $(E_2, F_2) = (a_2(H_2 - sH_1 + c_1), a_2^{-1}(-H_2 + c_1)), c_1 \in \mathbb{C}.$  此时, 根据引理 9, 有 r = 1. 于是,

$$0 = (\operatorname{ad} f_1)^2(f_2) \cdot 1$$

$$= F_2(F_1 \sigma_1^{-1}(F_1) - 2F_1 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}(F_1) + \sigma_2^{-1}(F_1) \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}(F_1))$$

$$= a_1^{-2} F_2 \left( (b - \sigma_2^{-1}(b))^2 + \frac{1}{2} (b + \sigma_2^{-1}(b)) - \frac{3}{16} \right).$$

因此,

$$(b - \sigma_2^{-1}(b))^2 + \frac{1}{2}(b + \sigma_2^{-1}(b)) - \frac{3}{16} = 0.$$
(4.2)

如果 k>2, 那么 (4.2) 的首项为  $\lambda_k^2 k^2 H_2^{2k-2}$ , 不为零. 如果 k=1, 那么 (4.2) 的首项为  $\lambda_1 H_2$ , 这是不可能的. 所以, k=0 或 k=2.

现设  $k \leq 2$  且  $k \neq 1$ , 那么。

$$F_1 = -a_1^{-1} \left( \left( H_1 - \frac{1}{2} H_2 \right)^2 + H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \lambda_2 H_2^2 + \lambda_1 H_2 + \lambda_0 \right),$$

而且有

$$\begin{split} 0 &= [e_2, f_1] \cdot 1 \\ &= E_2(\sigma_2(F_1) - F_1) + F_1(E_2 - \sigma_1^{-1}(E_2)) \\ &= -a_2 a_1^{-1} \left[ (H_2 - sH_1 + c_1) \left( H_1 - \left( \frac{1}{2} + 2\lambda_2 \right) H_2 + \frac{3}{4} + \lambda_2 - \lambda_1 \right) \right. \\ &\quad + s \left( \left( H_1 - \frac{1}{2} H_2 \right)^2 + H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \lambda_2 H_2^2 + \lambda_1 H_2 + \lambda_0 \right) \right] \\ &= -a_2 a_1^{-1} \left( \lambda_2 + \frac{1}{4} \right) (s - 2) H_2^2 - \frac{1}{2} a_2 a_1^{-1} (2 + 4s\lambda_2 - s) H_1 H_2 \\ &\quad + \left( \lambda_1 s + c_1 - \lambda_2 s + \frac{s}{4} \right) H_1 + \left( \lambda_1 s - 2\lambda_2 c_1 + \lambda_2 - \frac{c_1}{2} + \frac{3}{4} - \lambda_1 - \frac{s}{2} \right) H_2 \\ &\quad + c_1 \left( \lambda_2 - \lambda_1 + \frac{3}{4} \right) + s\lambda_0. \end{split}$$

所以,

$$\left(\lambda_2 + \frac{1}{4}\right)(s-2) = 0,$$

$$2 + 4s\lambda_2 - s = 0,$$

$$\lambda_1 s + c_1 - \lambda_2 s + \frac{s}{4} = 0,$$

$$\lambda_1 s - 2\lambda_2 c_1 + \lambda_2 - \frac{c_1}{2} + \frac{3}{4} - \lambda_1 - \frac{s}{2} = 0,$$

$$c_1 \left(\lambda_2 - \lambda_1 + \frac{3}{4}\right) + s\lambda_0 = 0.$$

因此, 根据前两个等式和  $s\geqslant 2$ , 有 s=2 和  $\lambda_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2s}=0$ . 从而,  $\lambda_1=0$  且

$$s = 2$$
,  $c_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{16}$ ,

即

$$F_1 = -a_1^{-1} \left( H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \frac{3}{4} \right) \left( H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{4} \right),$$

$$E_2 = a_2 \left( H_2 - 2H_1 - \frac{1}{2} \right).$$

因此, r = 1, s = 2 且  $M \cong M((a_1, a_2), \{1, 2\})$ .

情形 2  $(E_2, F_2) = (a_2(-(H_2 - \frac{s}{2}H_1)^2 + H_2 - \frac{s}{2}H_1 + c), \ a_2^{-1}),$  其中  $c = \sum_{j=0}^{k'} \mu_j H_1^j \in \mathbb{C}[H_1].$  利用  $[e_2, f_1] = 0$ , 我们得到

$$\left(r\left(H_{1} - \frac{r}{2}H_{2}\right) + \frac{r^{2}}{4} + \frac{r}{2} + \sigma_{2}(b) - b\right) \left(-\left(H_{2} - \frac{s}{2}H_{1}\right)^{2} + H_{2} - \frac{s}{2}H_{1} + c\right) 
= \left(\left(H_{1} - \frac{r}{2}H_{2}\right)^{2} + H_{1} - \frac{r}{2}H_{2} + b\right) \left(s\left(H_{2} - \frac{s}{2}H_{1}\right) - \frac{s^{2}}{4} - \frac{s}{2} + \sigma_{1}^{-1}(c) - c\right).$$
(4.3)

如果 k > 2, 那么从 (4.3) 可推出

$$(s-k)H_2^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} d_i H_2^i = 0,$$

其中  $d_i \in \mathbb{C}[H_1]$ . 所以, k = s. 再次利用 (4.3), 有

$$\left(\lambda_s \left(-\frac{s^2}{2} H_1 - \frac{s^2}{4} + c - \sigma_1^{-1}(c)\right) - \lambda_{s-1} - \delta_{s,3}(s-2) \frac{r^2}{4}\right) H_2^s + (\cancel{\xi} + H_2) \mathring{\mathfrak{g}} \mathring{\mathfrak{g}} \mathring{\mathfrak{g}} \mathring{\mathfrak{g}} \mathring{\mathfrak{g}} = 0.$$

故

$$c - \sigma_1^{-1}(c) = \frac{s^2}{2}H_1 + \frac{s^2}{4} + \lambda_s^{-1} \left(\lambda_{s-1} + \delta_{s,3}(s-2)\frac{r^2}{4}\right),$$

从而,

$$c = -\frac{s^2}{4}H_1^2 - \lambda_s^{-1} \left(\lambda_{s-1} + \delta_{s,3}(s-2)\frac{r^2}{4}\right)H_1 + \mu_0, \quad \mu_0 \in \mathbb{C}.$$

此时,将 (4.3) 展开成关于  $H_1$  的多项式,得到

$$s^2(2-r)H_1^3 + (关于H_1$$
的低次项) = 0.

于是, r = 2. 比较 (4.3) 中  $H_1^2$  的系数, 我们可以得到

$$\frac{s^2}{2}(H_2 - 2 + b - \sigma_2(b)) + 2\left(sH_2 - \frac{s}{2} - \lambda_s^{-1}(\lambda_{s-1} + \delta_{s,3})\right)$$
$$= sH_2 - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2} - \lambda_s^{-1}(\lambda_{s-1} + \delta_{s,3}) + (2H_2 - 1)s^2,$$

从而, k=s=2, 这与假设  $rs \neq 4$  矛盾. 所以,  $k \leq 2$  (注意, 在证明  $k \leq 2$  时, 我们并没有用到假设  $s \geq 2$ ).

利用符号变换:  $e_1 \leftrightarrow f_2$ ,  $e_2 \leftrightarrow f_1$ ,  $h_1 \leftrightarrow -h_2$ ,  $r \leftrightarrow s$ , 我们同样有  $k' \leqslant 2$ .

此时, (4.3) 中  $H_1^3$  和  $H_2^3$  的系数分别为

$$\frac{1}{4}(4\mu_2 - s^2)(r-2)$$
  $\pi$   $-\frac{1}{4}(s-2)(4\lambda_2 + r^2),$ 

它们均为零. 又因为r和s均不等于2, 所以,  $r \neq 2$ 或 $s \neq 2$ .

如果  $s \neq 2$ , 那么有  $\lambda_2 = -\frac{r^2}{4}$ . 此时, (4.3) 中  $H_2^2H_1$  的系数为 r(s-1), 从而 s=1, 这与  $s \geq 2$  矛盾. 因此,  $r \neq 2$ , 进而有  $\mu_2 = \frac{s^2}{4}$ . 此时, (4.3) 中  $H_2H_1^2$  的系数为 s(r-1), 从而 r=1. 如果  $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ , 那么 (4.3) 中  $H_2^2H_1$  的系数为 s-1, 由此 s=1, 这与假设  $rs \neq 1$  矛盾. 故  $\lambda_2 \neq -\frac{1}{4}$ . 于是, s=2. 综上所述, 有 r=1, s=2,  $\mu_2=1$ .

分别计算 (4.3) 中  $H_2^2H_1$  和  $H_1H_2$  的系数, 我们有  $\lambda_2=0$ , 而  $\mu_1=4\lambda_1$ . 此时 (4.3) 化简为

$$\left(\frac{1}{4} - 4\lambda_1^2 + \mu_0\right)H_1 - 2\lambda_1H_2^2 + \left(2\lambda_1 - \frac{1}{2}\mu_0 - 2\lambda_0 + \frac{1}{4} - 4\lambda_1^2\right)H_2 + \lambda_0 + \frac{3}{4}\mu_0 - \lambda_1\mu_0 - 4\lambda_0\lambda_1 = 0.$$

从而,  $\mu_0 = -1/4$ ,  $\lambda_0 = 3/16$ . 因此,

$$r = 1$$
,  $s = 2$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\mu_0 = -\frac{1}{4}$ ,  $\lambda_0 = \frac{3}{16}$ ,  $\mu_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

进一步地,

$$b = \frac{3}{16}, \quad c = H_1^2 - \frac{1}{4},$$

$$F_1 = -a_1^{-1} \left( H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \frac{3}{4} \right) \left( H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{4} \right),$$

$$E_2 = a_2 \left( H_2 - \frac{1}{2} \right) \left( 2H_1 - H_2 + \frac{1}{2} \right).$$

所以,  $M \cong M(\{a_1, a_2\}, \{1\})$ .

### 5 有限型 Kac-Moody 代数的表示

本节将用完全不同的方法重新证明 Nilsson 在文献 [16] 中的结果, 即确定有限型 Kac-Moody 代数的范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ .

A 是有限型, 所以 A 可逆. 因此, 我们可以取  $\mathfrak{h}$  的一组基为

$$(H_1, \dots, H_l)^{\mathrm{T}} = A^{-1}(\alpha_1^{\vee}, \dots, \alpha_l^{\vee})^{\mathrm{T}}.$$

那么有

$$[H_i, e_j] = \delta_{ij} e_j, \quad [H_i, f_j] = -\delta_{ij} f_j, \quad i, j = 1, \dots, l,$$

$$([e_1, f_1], [e_2, f_2], \dots, [e_l, f_l])^{\mathrm{T}} = (\alpha_1^{\vee}, \dots, \alpha_l^{\vee})^{\mathrm{T}} = A(H_1, H_2, \dots, H_l)^{\mathrm{T}},$$

$$[e_i, f_j] = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, l.$$

有限型广义 Cartan 矩阵的分类是一个经典的结果 (参见文献 [20,21]):  $A_l, B_l$   $(l \ge 2), C_l$   $(l \ge 2), D_l$   $(l \ge 4), E_l$   $(l = 6, 7, 8), F_4, G_2$ .

下面结论是显然成立的.

**引理 12** 设 g 是有限  $X_l$  型单 Lie 代数,  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 对任意  $g \in M = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_l]$  和  $i \in \mathfrak{l}$ , 有

$$H_i \cdot g = H_i g,$$
  

$$e_i \cdot g = E_i \sigma_i(g),$$
  

$$f_i \cdot g = F_i \sigma_i^{-1}(g),$$

因此, 要确定  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ , 只需确定  $\mathbb{C}[H_1,\ldots,H_l]$  中所有可能的 2l- 元组  $(E_1,\ldots,E_l,F_1,\ldots,F_l)$ . 类似引理 8, 我们可以证明如下引理:

**引理 13** 设  $\mathfrak{g}$  和  $\mathbb{Z}$  分别是  $\mathbb{C}$  上 Kac-Moody 代数和交换 Lie 代数.

(1) 设  $\mathfrak{g}$  是  $A_l$  型且  $l \ge 2$ . 对任意  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_l) \in (\mathbb{C}^*)^l$ ,  $b \in U(Z)$  和  $S \subseteq \mathfrak{l} \cup \{l+1\}$ , 向量空间  $M(\mathbf{a}, b, S) = U(\tilde{\mathfrak{h}})$  在下列作用下构成一个  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模: 对所有  $\tilde{\mathfrak{g}} \in U(\tilde{\mathfrak{h}})$ , 有

$$H_{i} \cdot \tilde{g} = H_{i}\tilde{g}, \quad z \cdot \tilde{g} = z\tilde{g}, \quad i \in I, \quad \forall z \in Z,$$

$$e_{i} \cdot \tilde{g} = \begin{cases} a_{i}(H_{i+1} - H_{i} - b)\sigma_{i}(\tilde{g}), & i, i+1 \in S, \\ a_{i}\sigma_{i}(\tilde{g}), & i \in S, \quad i+1 \notin S, \\ a_{i}(H_{i} - H_{i-1} - b - 1)(H_{i+1} - H_{i} - b)\sigma_{i}(\tilde{g}), & i \notin S, \quad i+1 \in S, \\ a_{i}(H_{i} - H_{i-1} - b - 1)\sigma_{i}(\tilde{g}), & i, i+1 \notin S, \end{cases}$$

$$f_{i} \cdot \tilde{g} = \begin{cases} a_{i}^{-1}(H_{i} - H_{i-1} - b)\sigma_{i}^{-1}(\tilde{g}), & i, i+1 \in S, \\ a_{i}^{-1}(H_{i} - H_{i-1} - b)(H_{i+1} - H_{i} - b - 1)\sigma_{i}^{-1}(\tilde{g}), & i \notin S, \quad i+1 \notin S, \\ a_{i}^{-1}\sigma_{i}^{-1}(\tilde{g}), & i \notin S, \quad i+1 \in S, \\ a_{i}^{-1}(H_{i+1} - H_{i} - b - 1)\sigma_{i}^{-1}(\tilde{g}), & i, i+1 \notin S, \end{cases}$$

其中  $H_{l+1} = H_0 = 0$ . 而且, 我们有

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \{ M(\boldsymbol{a}, b, S) \mid \boldsymbol{a} \in (\mathbb{C}^*)^l, b \in U(Z), S \subseteq \mathfrak{l} \cup \{l+1\} \}.$$

(2) 设  $\mathfrak{g}$  是  $B_2$  型. 令  $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ , 并设  $E_{i,S} = e_i \cdot 1$ ,  $F_{i,S} = f_i \cdot 1$   $(i = 1, 2, S \subseteq \{1, 2\})$  为 (4.1) 中定义的多项式. 向量空间  $M(\boldsymbol{a}, S) = U(\tilde{\mathfrak{h}})$  在下列作用下构成一个  $\tilde{\mathfrak{g}}$ - 模: 对所有  $\mathfrak{g} \in U(\tilde{\mathfrak{h}})$ ,  $z \in Z$  和 i = 1, 2, 有

$$H_{i} \cdot g = H_{i}g,$$

$$z \cdot g = zg,$$

$$e_{i} \cdot g = E_{i,S}\sigma_{i}(g),$$

$$f_{i} \cdot g = F_{i,S}\sigma_{i}^{-1}(g).$$

$$(5.1)$$

而且, 我们有  $\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \{ M(\boldsymbol{a}, S) \mid \boldsymbol{a} \in (\mathbb{C}^*)^2, S \subseteq \{1, 2\} \}.$ 

(3)  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$  当且仅当  $\mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \emptyset$ .

利用这个引理, 我们可以证明下面的命题:

命题 14 如果  $\mathfrak{g} \not\in D_4$  型 Kac-Moody 代数, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

证明 设g的 Dynkin 图如下:

$$\bigcirc$$
 4  $\bigcirc$  3

如果命题不成立, 假设  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$ , 并取  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 对 k = 1, 3, 4, 令  $\mathfrak{g}_k$  分别为由  $\{e_i, f_i, \mathfrak{h} \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq k\}$  生成的  $\mathfrak{g}$  的子代数, 则

$$\mathfrak{g}_k \cong \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}H_k$$
,

其中  $[\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}), H_k] = 0$ . 记  $M_k = \operatorname{Res}_{\mathfrak{g}_k}^{\mathfrak{g}} M$ , k = 1, 3, 4. 设  $\mathfrak{h}_k$  (k = 1, 3, 4) 分别为由  $\{\alpha_i^{\vee} \mid i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{k\}\}$  生成的  $\mathfrak{h}$  的子代数.

取  $\bar{H}_i \in \mathfrak{h}_4$  满足

$$[\bar{H}_i, e_i] = \delta_{ij}e_i, \quad [\bar{H}_i, f_i] = -\delta_{ij}f_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

那么,由

$$\begin{split} 2\bar{H}_1 - \bar{H}_2 &= \alpha_1^{\vee} = 2H_1 - H_2, \\ -\bar{H}_1 + 2\bar{H}_2 - \bar{H}_3 &= \alpha_2^{\vee} = -H_1 + 2H_2 - H_3 - H_4, \\ -\bar{H}_2 + 2\bar{H}_3 &= \alpha_3^{\vee} = -H_2 + 2H_3, \end{split}$$

我们有

$$\bar{H}_3 = H_3 - \frac{1}{2} H_4, \quad \bar{H}_i = H_i - \frac{i}{2} H_4, \quad i = 1, 2.$$

考察  $M_4$ , 根据引理 13, 我们知道  $(E_1, F_1)$  只有以下四种可能

$$\begin{cases} \left(a_1\left(H_2-H_1-\frac{1}{2}H_4-b\right),a_1^{-1}\left(H_1-\frac{1}{2}H_4-b\right)\right),\\ \left(a_1,\ a_1^{-1}\left(H_1-\frac{1}{2}H_4-b\right)\left(H_2-H_1-\frac{1}{2}H_4-b-1\right)\right),\\ \left(a_1\left(H_1-\frac{1}{2}H_4-b-1\right)\left(H_2-H_1-\frac{1}{2}H_4-b\right),a_1^{-1}\right),\\ \left(a_1\left(H_1-\frac{1}{2}H_4-b-1\right),a_1^{-1}\left(H_2-H_1-\frac{1}{2}H_4-b-1\right)\right),\end{cases}$$

而  $(E_3, F_3)$  只能是以下四种可能之一:

$$\begin{cases} \left(-a_3\left(H_3 - \frac{1}{2}H_4 + b\right), a_3^{-1}\left(H_3 - H_2 + \frac{1}{2}H_4 - b\right)\right), \\ \left(-a_3\left(H_3 - H_2 + \frac{1}{2}H_4 - b - 1\right)\left(H_3 - \frac{1}{2}H_4 + b\right), a_3^{-1}\right), \\ \left(a_3, -a_3^{-1}\left(H_3 - H_2 + \frac{1}{2}H_4 - b\right)\left(H_3 - \frac{1}{2}H_4 + b + 1\right)\right), \\ \left(a_3\left(H_3 - H_2 + \frac{1}{2}H_4 - b - 1\right), -a_3^{-1}\left(H_3 - \frac{1}{2}H_4 + b + 1\right)\right), \end{cases}$$

其中  $a_1, a_3 \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}[H_4]$ . 因此有

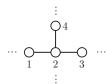
$$\deg_3 E_1 = \deg_3 F_1 = \deg_1 E_3 = \deg_1 F_3 = 0.$$

类似地, 考察  $M_1$ , 有

$$\deg_4 E_3 = \deg_4 F_3 = 0.$$

这是不可能的. 故 M 不存在, 也就是说,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

如果 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的 Dynkin 图 Γ包含一个  $D_4$  型子图, 也就是说 Γ 形如下图:



 $\Gamma$  的一个子图是指  $\Gamma$  的顶点集的一个子集及连接它们的所有边组成的图. 于是,  $\{e_i, f_i, \mathfrak{h} \mid i=1,2,3,4\}$  生成  $\mathfrak{g}$  的子代数  $\mathfrak{g}_1$ , 且存在交换 Lie 代数 Z, 使得  $\mathfrak{g}_1$  同构于  $\mathfrak{o}_8(\mathbb{C}) \oplus Z$ . 因此, 对任意  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ , 有

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{g}_1}^{\mathfrak{g}} M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}_1) = \emptyset.$$

由此, 我们有下面的引理:

引理 15 设 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的 Dynkin 图为  $\Gamma$ . 如果  $\Gamma$  包含  $D_4$  型子图, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ . 根据这个引理, 我们容易得到下面的推论:

推论 16 设  $\mathfrak{g}$  为有限  $D_l$  ( $l \ge 4$ ) 型或有限  $E_l$  (l = 6, 7, 8) 型 Kac-Moody 代数, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ . 接下来, 我们考虑 Dynkin 图包含  $B_3$  型子图的 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$ .

引理 17 设 g 为  $B_l$  ( $l \ge 3$ ) 型或  $F_4$  型 Kac-Moody 代数, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

证明 由于  $\mathfrak{g}$  的 Dynkin 图包含  $B_3$  型子图, 与引理 15 的证明一样, 我们只需证明引理对  $B_3$  型 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  成立即可.

设g的 Dynkin 图如下:

$$0 \longrightarrow 0$$

$$1 \quad 2 \quad 3$$

假设  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$ , 并取  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 对 k = 1, 3, 令  $\mathfrak{g}_k$  分别为由  $\{e_i, f_i, \mathfrak{h} \mid i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}\}$  生成的  $\mathfrak{g}$  的子代数, 则有

$$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{o}_5(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}H_1, \quad [\mathfrak{o}_5(\mathbb{C}), H_1] = 0,$$

且

$$\mathfrak{g}_3 \cong \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}H_3, \quad [\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}), H_3] = 0.$$

记  $M_k = \operatorname{Res}_{\mathfrak{g}_k}^{\mathfrak{g}} M$ , 并令  $\mathfrak{h}_k$  (k=1,3) 分别为由  $\{\alpha_i^{\vee} \mid i \neq k\}$  生成的  $\mathfrak{h}$  的子代数. 对 i=1,2, 取  $\bar{H}_i \in \mathfrak{h}_3$  满足

$$[\bar{H}_i, e_j] = \delta_{ij}e_j, \quad [\bar{H}_i, f_j] = -\delta_{ij}f_j, \quad i, j = 1, 2.$$

利用

$$2\bar{H}_1 - \bar{H}_2 = \alpha_1^{\vee} = 2H_1 - H_2,$$
  
$$-\bar{H}_1 + 2\bar{H}_2 = \alpha_2^{\vee} = -H_1 + 2H_2 - H_3,$$

我们得到

$$\bar{H}_i = H_i - \frac{i}{3}H_3, \quad i = 1, 2.$$

考察  $M_3$ , 由引理 13, 我们知道  $(E_2, F_2)$  只能取下列四种情形之一:

$$\begin{cases}
\left(a\left(H_{2} - \frac{2}{3}H_{3} + b\right), -a^{-1}\left(H_{2} - H_{1} - \frac{1}{3}H_{3} - b\right)\right), \\
\left(a, -a^{-1}\left(H_{2} - H_{1} - \frac{1}{3}H_{3} - b\right)\left(H_{2} - \frac{2}{3}H_{3} + b + 1\right)\right), \\
\left(-a\left(H_{2} - H_{1} - \frac{1}{3}H_{3} - b - 1\right)\left(H_{2} - \frac{2}{3}H_{3} + b\right), a^{-1}\right), \\
\left(a\left(H_{2} - H_{1} - \frac{1}{3}H_{3} - b - 1\right), -a^{-1}\left(H_{2} - \frac{2}{3}H_{3} + b + 1\right)\right),
\end{cases} (5.2)$$

其中  $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}[H_3]$ .

类似地, 考察  $M_1$ , 我们知道  $(E_2, F_2)$  只有下列两种取法:

$$\begin{cases}
\left(a, -a^{-1}\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{1}{2}H_1 - \frac{3}{4}\right)\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{1}{2}H_1 - \frac{1}{4}\right)\right), \\
\left(-a\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{1}{2}H_1 + \frac{3}{4}\right)\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{4}\right), a^{-1}\right),
\end{cases} (5.3)$$

其中  $a \in \mathbb{C}^*$ .

比较 (5.2) 与 (5.3), 我们得到

$$(\deg_1 E_2, \deg_1 F_2) = (0, 1) = (0, 2)$$

或

$$(\deg_1 E_2, \deg_1 F_2) = (1, 0) = (2, 0).$$

两式均不可能成立. 因此, M 不存在, 即  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

至此, 对有限型 Kac-Moody 代数的讨论, 我们只剩下  $C_l$  (l > 2) 型.  $\mathcal{H}(C_l)$  中的全部表示如下 (我们列出 Nilsson 在文献 [16] 中没有全部列出的具体模作用):

命题 18 设  $\mathfrak{g}$  是  $C_l$   $(l \ge 2)$  型 Kac-Moody 代数. 对任意  $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_l) \in (\mathbb{C}^*)^l$ ,  $S \subseteq \mathfrak{l}$ , 向量空间  $M(\boldsymbol{a}, S) = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_l]$  在下列作用下构成一个  $\mathfrak{g}$ - 模: 对所有  $g \in \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_l]$ ,  $1 \le k \le l-2$ , 有

$$H_{i} \cdot g = H_{i}g, \quad i \in \mathfrak{l},$$

$$e_{k} \cdot g = \begin{cases} a_{k} \left( H_{k+1} - H_{k} + \frac{1}{2} \right) \sigma_{k}(g), & k, k+1 \in S, \\ a_{k} \sigma_{k}(g), & k \in S, \quad k+1 \notin S, \\ a_{k} \left( H_{k} - H_{k-1} - \frac{1}{2} \right) \left( H_{k+1} - H_{k} + \frac{1}{2} \right) \sigma_{k}(g), & k \notin S, \quad k+1 \in S, \\ a_{k} \left( H_{k} - H_{k-1} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{k}(g), & k, k+1 \notin S, \end{cases}$$

$$f_{k} \cdot g = \begin{cases} a_{k}^{-1} \left( H_{k} - H_{k-1} + \frac{1}{2} \right) \sigma_{k}^{-1}(g), & k, k+1 \in S, \\ a_{k}^{-1} \left( H_{k} - H_{k-1} + \frac{1}{2} \right) \left( H_{k+1} - H_{k} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{k}^{-1}(g), & k \notin S, \quad k+1 \notin S, \\ a_{k}^{-1} \sigma_{k}^{-1}(g), & k \notin S, \quad k+1 \notin S, \\ a_{k}^{-1} \left( H_{k+1} - H_{k} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{k}^{-1}(g), & k, k+1 \notin S, \end{cases}$$

$$e_{l-1} \cdot g = \begin{cases} a_{l-1} \left( 2H_l - H_{l-1} + \frac{1}{2} \right) \sigma_{l-1}(g), & l-1, l \in S, \\ a_{l-1} \sigma_{l-1}(g), & l-1 \in S, & l \notin S, \\ a_{l-1} \left( H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{1}{2} \right) \left( 2H_l - H_{l-1} + \frac{1}{2} \right) \sigma_{l-1}(g), & l-1 \notin S, & l \in S, \\ a_{l-1} \left( H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{l-1}(g), & l-1, l \notin S, \end{cases}$$

$$f_{l-1} \cdot g = \begin{cases} a_{l-1}^{-1} \left( H_{l-1} - H_{l-2} + \frac{1}{2} \right) \sigma_{l-1}^{-1}(g), & l-1, l \in S, \\ a_{l-1}^{-1} \left( H_{l-1} - H_{l-2} + \frac{1}{2} \right) \left( 2H_l - H_{l-1} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{l-1}^{-1}(g), & l-1 \in S, & l \notin S, \\ a_{l-1}^{-1} \sigma_{l-1}^{-1}(g), & l-1 \notin S, & l \in S, \\ a_{l-1}^{-1} \left( 2H_l - H_{l-1} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{l-1}^{-1}(g), & l-1, l \notin S, \end{cases}$$

$$e_l \cdot g = \begin{cases} a_l \sigma_l(g), & l \in S, \\ -a_l \left( H_l - \frac{1}{2} H_{l-1} - \frac{3}{4} \right) \left( H_l - \frac{1}{2} H_{l-1} - \frac{1}{4} \right) \sigma_l(g), & l \notin S, \\ a_l^{-1} \sigma_l^{-1}(g), & l \notin S, \end{cases}$$

$$f_l \cdot g = \begin{cases} -a_l^{-1} \left( H_l - \frac{1}{2} H_{l-1} + \frac{3}{4} \right) \left( H_l - \frac{1}{2} H_{l-1} + \frac{1}{4} \right) \sigma_l^{-1}(g), & l \in S, \\ a_l^{-1} \sigma_l^{-1}(g), & l \notin S, \end{cases}$$

其中  $H_0 = 0$ . 而且, 我们有

$$\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \{ M(\boldsymbol{a}, S) \mid \boldsymbol{a} \in (\mathbb{C}^*)^l, S \subseteq \mathfrak{l} \}.$$

进一步地, 对任意 a 和 S, M(a,S) 都是单的.

证明 假设 g 的 Dynkin 图如下:

l=2 时的结论即定理 11(2). 现在假设  $l\geqslant 3$  且  $M\in\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 令  $\mathfrak{g}_1$  为由  $\{e_i,f_i,\mathfrak{h}\mid i=1,\ldots,l-1\}$  生成的  $\mathfrak{g}$  的子代数, 而  $\mathfrak{g}_2$  为由  $\{e_{l-1},e_l,f_{l-1},f_l,\mathfrak{h}\}$  生成的  $\mathfrak{g}$  的子代数, 则

$$\begin{split} &\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{sl}_l(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} H_l, \quad [\mathfrak{sl}_l(\mathbb{C}), H_l] = 0, \\ &\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{o}_5(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} H_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} H_{l-2}, \quad [\mathfrak{o}_5(\mathbb{C}), H_i] = 0, \quad i = 1, \dots, l-2. \end{split}$$

记  $M_i = \operatorname{Res}_{\mathfrak{g}_i}^{\mathfrak{g}} M$ , i = 1, 2. 设  $\mathfrak{h}_1$  为由  $\{\alpha_i^{\vee} \mid i = 1, \dots, l - 1\}$  生成的  $\mathfrak{h}$  的子代数, 而  $\mathfrak{h}_2$  为由  $\{\alpha_{l-1}^{\vee}, \alpha_l^{\vee}\}$  生成的  $\mathfrak{h}$  的子代数.

取  $\bar{H}_i \in \mathfrak{h}_1$  满足

$$[\bar{H}_i, e_j] = \delta_{ij} e_j, \quad [\bar{H}_i, f_j] = -\delta_{ij} f_j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant l - 1,$$

则有

$$\bar{H}_i = H_i - \frac{2i}{l}H_l.$$

根据引理 13(1), 在  $M_1$  上, 对  $1 \le i \le l-2$ , 有

$$(E_{i}, F_{i}) = \begin{cases} \left(a_{i}\left(H_{i+1} - H_{i} - \frac{2}{l}H_{l} - b\right), a_{i}^{-1}\left(H_{i} - H_{i-1} - \frac{2}{l}H_{l} - b\right)\right), & i, i + 1 \in S, \\ \left(a_{i}, a_{i}^{-1}\left(H_{i} - H_{i-1} - \frac{2}{l}H_{l} - b\right)\left(H_{i+1} - H_{i} - \frac{2}{l}H_{l} - b - 1\right)\right), & i \in S, \quad i + 1 \notin S, \\ \left(a_{i}\left(H_{i} - H_{i-1} - \frac{2}{l}H_{l} - b - 1\right)\left(H_{i+1} - H_{i} - \frac{2}{l}H_{l} - b\right), a_{i}^{-1}\right), & i \notin S, \quad i + 1 \in S, \\ \left(a_{i}\left(H_{i} - H_{i-1} - \frac{2}{l}H_{l} - b - 1\right), a_{i}^{-1}\left(H_{i+1} - H_{i} - \frac{2}{l}H_{l} - b\right)\right), & i, i + 1 \notin S, \end{cases}$$

而

$$(E_{l-1}, F_{l-1})$$

$$= \begin{cases} \left(a_{l-1} \left(\frac{2(l-1)}{l} H_l - H_{l-1} - b\right), a_{l-1}^{-1} \left(H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{2}{l} H_l - b\right)\right), & l-1, l \in S, \\ \left(a_{l-1}, a_{l-1}^{-1} \left(H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{2}{l} H_l - b\right) \left(\frac{2(l-1)}{l} H_l - H_{l-1} - b - 1\right)\right), & l-1 \in S, \quad l \notin S, \quad (5.4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(a_{l-1} \left(H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{2}{l} H_l - b - 1\right) \left(\frac{2(l-1)}{l} H_l - H_{l-1} - b\right), a_{l-1}^{-1}\right), & l-1 \notin S, \quad l \notin S, \\ \left(a_{l-1} \left(H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{2}{l} H_l - b - 1\right), a_{l-1}^{-1} \left(\frac{2(l-1)}{l} H_l - H_{l-1} - b - 1\right)\right), & l-1, l \notin S. \end{cases}$$
举权地 在  $M_2$  上 根据引理 13(2) 有

类似地, 在 M<sub>2</sub> 上, 根据引理 13(2), 有

$$(E_{l-1}, F_{l-1}) = \begin{cases} \left(a_{l-1}\left(2H_{l} - H_{l-1} + \frac{1}{2}\right), a_{l-1}^{-1}\left(H_{l-1} - H_{l-2} + \frac{1}{2}\right)\right), & l-1, l \in S, \\ \left(a_{l-1}, a_{l-1}^{-1}\left(H_{l-1} - H_{l-2} + \frac{1}{2}\right)\left(2H_{l} - H_{l-1} - \frac{1}{2}\right)\right), & l-1 \in S, \quad l \notin S, \\ \left(a_{l-1}\left(H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{1}{2}\right)\left(2H_{l} - H_{l-1} + \frac{1}{2}\right), a_{l-1}^{-1}\right), & l-1 \notin S, \quad l \in S, \\ \left(a_{l-1}\left(H_{l-1} - H_{l-2} - \frac{1}{2}\right), a_{l-1}^{-1}\left(2H_{l} - H_{l-1} - \frac{1}{2}\right)\right), & l-1, l \notin S, \end{cases}$$

$$(E_{l}, F_{l}) = \begin{cases} \left(a_{l}, -a_{l}^{-1}\left(H_{l} - \frac{1}{2}H_{l-1} + \frac{3}{4}\right)\left(H_{l} - \frac{1}{2}H_{l-1} + \frac{1}{4}\right)\right), & l \in S, \\ \left(-a_{l}\left(H_{l} - \frac{1}{2}H_{l-1} - \frac{3}{4}\right)\left(H_{l} - \frac{1}{2}H_{l-1} - \frac{1}{4}\right), a_{l}^{-1}\right), & l \notin S. \end{cases}$$

$$(5.5)$$

比较 (5.4) 与 (5.5), 我们得到

$$b = -\frac{2}{l}H_l - \frac{1}{2},$$

从而, 存在  $\mathbf{a} \in (\mathbb{C}^*)^l$  和  $S \subseteq \mathfrak{l}$ , 使得  $M \cong M(\mathbf{a}, S)$ 

下证不可约性, 我们只对 a = (1, ..., 1) = 1, S = l, 即 M(1, l) 的单性进行证明, 其余情形可类似 证明.

在  $M(\mathbf{1}, \mathfrak{l})$  上定义如下算子:

$$\Delta_i := e_i - 1, \quad i \in \mathfrak{l}.$$

设  $W \subseteq M(1, \mathfrak{l})$  为非零子模, 并取  $0 \neq g \in W$ . 用  $\Delta_l$  作用有限多次, 我们得  $g_1 \in W \cap (\mathcal{P}_l \setminus \{0\})$ . 然后 用  $\Delta_l \circ e_{l-1}$  作用, 得到  $\sigma_{l-1}(g_1) \in W$ . 于是,  $\sigma_{l-1}(g_1) - g_1 \in W$ . 因此, 我们有

$$0 \neq g_2 \in W \cap \mathcal{P}_l \cap \mathcal{P}_{l-1}.$$

依次运用  $\Delta_i \circ e_{i-1}$  重复以上过程, 我们知道, 存在  $g' \in \mathbb{C}^* \cap W$ . 所以,  $1 \in W$ , 从而,  $W = M(\mathbf{1}, \mathbf{I})$ .  $\square$  综合例 1、定理 11、推论 16、引理 17 和命题 18, 我们得到下面的定理:

定理 19 设  $\mathfrak{g}$  是有限型 Kac-Moody 代数, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$  当且仅当  $\mathfrak{g}$  为  $A_l$   $(l \geq 1)$  或  $C_l$   $(l \geq 2)$  型.

# 6 一般 Kac-Moody 代数的表示

本节将确定任意 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的范畴  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 事实上, 我们将证明下面的定理:

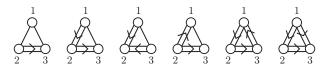
定理 20 设  $\mathfrak{g}$  是任意 Kac-Moody 代数, 则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$  当且仅当  $\mathfrak{g}$  是有限  $A_l$   $(l \geq 1)$  型或有限  $C_l$   $(l \geq 2)$  型.

设 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的 Cartan 矩阵为  $A=(a_{ij})$ , 其 Dynkin 图为  $\Gamma$  且  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})\neq\emptyset$ , 那么, 根据定理 3、11、19 和引理 13,  $\Gamma$  满足下列性质:

- (1)  $\Gamma$  不能包含三线边、四线边、粗线边或是双箭头边, 即  $a_{ij}a_{ji} \leq 2$ , 见定理 11.
- (2)  $\Gamma$  不能包含下列形状的子图:  $D_4$ 、 $B_3^{(1)}$ 、 $A_3^{(2)}$ 、 $C_2^{(1)}$ 、 $A_4^{(2)}$  和  $D_3^{(2)}$ , 见定理 3.
- (3) 如果  $\Gamma$  是单链, 则  $\Gamma$  只能是  $A_l$  型, 这是因为  $A_1^{(1)}$  型 Kac-Moody 代数的范畴  $\mathcal{H}$  为空集.
- (4) 如果 Γ 至少含有超过 3 个顶点、不含 3 点圈而且含有一条双线边, 则 Γ 只能是  $C_l$  ( $l \ge 4$ ) 型; 否则, Γ 将包含一个  $B_3$  型子图或一个满足  $\mathcal{H} = \emptyset$  的仿射型子图.

为了完成对定理 20 的证明, 我们只需证明下面关于所有可能的 3 点圈且至少含有一条双线边 Dynkin 图的引理.

引理 21 设 Kac-Moody 代数  $\mathfrak{g}$  的 Dynkin 图为  $\Gamma$ . 如果  $\Gamma$  为下列之一:



则  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

证明 相应  $\mathfrak{g}$  的 Cartan 矩阵 A 分别如下:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

显然, A 是可逆的. 设  $\{H_1, H_2, H_3\}$  为  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  的对偶基. 对 k = 1, 2, 3, 分别设  $\mathfrak{g}_k$  为由  $\{e_i, f_i, \mathfrak{h} \mid i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}\}$  生成的子代数. 假设  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$ , 并设  $M \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . 对 k = 1, 2, 3 分别定义  $M_k = \operatorname{Res}_{\mathfrak{g}_k}^{\mathfrak{g}} M$ , 而记  $E_i = e_i \cdot 1$ ,  $F_i = f_i \cdot 1$ . 我们将分类地给出证明.

第一类: 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
.

在  $M_3$  上, 根据引理 8, 我们知道  $(E_2, F_2)$  只有以下四种可能:

$$\begin{cases}
(a(H_2 - H_3 + b), \ a^{-1}(H_1 - H_2 + b)), \\
(a, -a^{-1}(H_2 - H_1 - b)(H_2 - H_3 + b + 1)), \\
(-a(H_2 - H_1 - b - 1)(H_2 - H_3 + b), \ a^{-1}), \\
(a(H_2 - H_1 - b - 1), a^{-1}(H_3 - H_2 - b - 1)),
\end{cases}$$

其中  $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}[H_3]$ . 因此,

$$(\deg_1 E_2, \deg_1 F_2) = (0,1)$$
  $\mathbb{R}$   $(\deg_1 E_2, \deg_1 F_2) = (1,0).$ 

但是, 在  $M_1$  上, 根据引理 13, 存在  $c \in \mathbb{C}^*$ , 使得  $(E_2, F_2)$  为以下两种可能之一:

$$\begin{cases}
\left(c, -c^{-1}\left(H_2 - \frac{1}{2}H_1 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{3}{4}\right)\left(H_2 - \frac{1}{2}H_1 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{1}{4}\right)\right), \\
\left(-c\left(H_2 - \frac{1}{2}H_1 - \frac{1}{2}H_3 + \frac{3}{4}\right)\left(H_2 - \frac{1}{2}H_1 - \frac{1}{2}H_3 + \frac{1}{4}\right), c^{-1}\right).
\end{cases}$$

所以,  $(\deg_1 E_2, \deg_1 F_2)$  等于 (0,2) 或 (2,0). 这与上面结果矛盾. 从而,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})=\emptyset$ .

第二类: 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
.

在  $M_3$  上, 存在  $a \in \mathbb{C}^*$  使得  $(E_1, F_1)$  只有以下两种可能:

$$\begin{cases}
\left(a, -a^{-1}\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{3}{4}\right)\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{1}{4}\right)\right), \\
\left(-a\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 + \frac{3}{4}\right)\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 + \frac{1}{4}\right), a^{-1}\right).
\end{cases}$$

因此,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,2) 或 (2,0).

在  $M_2$  上, 存在  $c \in \mathbb{C}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}[H_2]$  使得  $(E_1, F_1)$  为以下四种可能之一:

$$\begin{cases}
\left(c\left(H_3 - H_1 - \frac{1}{3}H_2 - b\right), c^{-1}\left(H_1 - \frac{4}{3}H_2 - b\right)\right), \\
\left(c, c^{-1}\left(H_1 - \frac{4}{3}H_2 - b\right)\left(H_3 - H_1 - \frac{1}{3}H_2 - b - 1\right)\right), \\
\left(c\left(H_1 - \frac{4}{3}H_2 - b - 1\right)\left(H_3 - H_1 - \frac{1}{3}H_2 - b\right), c^{-1}\right), \\
\left(c\left(H_1 - \frac{4}{3}H_2 - b - 1\right), c^{-1}\left(H_3 - H_1 - \frac{1}{3}H_2 - b - 1\right)\right).
\end{cases}$$

从而,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,1) 或 (1,0). 这与上面结果矛盾. 所以,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

第三类: 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
.

在  $M_3$  上, 存在  $a \in \mathbb{C}^*$ , 使得  $(E_1, F_1)$  只有以下两种可能:

$$\begin{cases}
\left(a, -a^{-1}\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{3}{4}\right)\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 - \frac{1}{4}\right)\right), \\
\left(-a\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 + \frac{3}{4}\right)\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_3 + \frac{1}{4}\right), a^{-1}\right).
\end{cases}$$

因此,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,2) 或 (2,0).

在  $M_2$  上, 存在  $c \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}[H_2]$  使得  $(E_1, F_1)$  只能是以下四种可能之一:

$$\begin{cases}
(c(H_3 - H_1 - b), c^{-1}(H_1 - H_2 - b)), \\
(c, c^{-1}(H_1 - H_2 - b)(H_3 - H_1 - b - 1)), \\
(c(H_1 - H_2 - b - 1)(H_3 - H_1 H_2 - b), c^{-1}), \\
(c(H_1 - H_2 - b - 1), c^{-1}(H_3 - H_1 - b - 1)).
\end{cases}$$

从而,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,1) 或 (1,0). 这与上面结果矛盾. 所以,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

第四类: 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
.

在  $M_3$  上, 存在  $a \in \mathbb{C}^*$  使得  $(E_1, F_1)$  只有以下四种可能:

$$\begin{cases}
\left(a\left(2H_{2}-H_{1}-H_{3}+\frac{1}{2}\right),a^{-1}\left(H_{1}-2H_{3}+\frac{1}{2}\right)\right),\\ \left(a,-a^{-1}\left(H_{1}-2H_{3}+\frac{1}{2}\right)\left(2H_{2}-H_{1}-H_{3}-\frac{1}{2}\right)\right),\\ \left(a\left(H_{1}-2H_{3}-\frac{1}{2}\right)\left(2H_{2}-H_{1}-H_{3}+\frac{1}{2}\right),a^{-1}\right),\\ \left(a\left(H_{1}-2H_{3}-\frac{1}{2}\right),a^{-1}\left(2H_{2}-H_{1}-H_{3}-\frac{1}{2}\right)\right).
\end{cases}$$

因此,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,2), (2,0) 或 (1,1).

在  $M_2$  上, 存在  $c \in \mathbb{C}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}[H_2]$  使得  $(E_1, F_1)$  只能是以下四种可能之一:

$$\begin{cases}
(c(H_3 - H_1 - b), c^{-1}(H_1 - 2H_2 - b)), \\
(c, c^{-1}(H_1 - 2H_2 - b)(H_3 - H_1 - b - 1)), \\
(c(H_1 - 2H_2 - b - 1)(H_3 - H_1 - b), c^{-1}), \\
(c(H_1 - 2H_2 - b - 1), c^{-1}(H_3 - H_1 - b - 1)).
\end{cases}$$

因此,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,1) 或 (1,0). 这与上面结果矛盾. 所以,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

第五类: 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
.

在  $M_3$  上, 存在  $a \in \mathbb{C}^*$  使得  $(E_1, F_1)$  只有以下两种可能:

$$\begin{cases}
\left(a, -a^{-1}\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - H_3 + \frac{3}{4}\right)\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - H_3 + \frac{1}{4}\right)\right), \\
\left(-a\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - H_3 - \frac{3}{4}\right)\left(H_1 - \frac{1}{2}H_2 - H_3 - \frac{1}{4}\right), a^{-1}\right).
\end{cases}$$

因此,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,2) 或 (2,0).

在  $M_2$  上, 存在  $c \in \mathbb{C}^*$  使得  $(E_1, F_1)$  只能是以下四种可能之一:

$$\begin{cases}
\left(c\left(2H_3 - H_1 - 2H_2 + \frac{1}{2}\right), c^{-1}\left(H_1 - 3H_2 + \frac{1}{2}\right)\right), \\
\left(c, c^{-1}\left(H_1 - 3H_2 + \frac{1}{2}\right)\left(2H_3 - H_1 - 2H_2 - \frac{1}{2}\right)\right), \\
\left(c\left(H_1 - 3H_2 - \frac{1}{2}\right)\left(2H_3 - H_1 - 2H_2 + \frac{1}{2}\right), c^{-1}\right), \\
\left(c\left(H_1 - 3H_2 - \frac{1}{2}\right), c^{-1}\left(2H_3 - H_1 - 2H_2 - \frac{1}{2}\right)\right).
\end{cases}$$

从而,  $(\deg_3 E_1, \deg_3 F_1)$  等于 (0,1) 或 (1,0). 这与上面结果矛盾. 所以,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

第六类: 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
.

在  $M_1$  上, 存在  $a \in \mathbb{C}^*$  使得  $(E_2, F_2)$  只有以下两种可能:

$$\begin{cases}
\left(a, -a^{-1}\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - H_1 - \frac{3}{4}\right)\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - H_1 - \frac{1}{4}\right)\right), \\
\left(-a\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - H_1 + \frac{3}{4}\right)\left(H_2 - \frac{1}{2}H_3 - H_1 + \frac{1}{4}\right), a^{-1}\right).
\end{cases}$$

因此,  $(\deg_1 E_2, \deg_1 F_2)$  等于 (0,2) 或 (2,0).

在  $M_3$  上, 存在  $c \in \mathbb{C}^*$  使得  $(E_2, F_2)$  只能是以下四种可能之一:

$$\begin{cases}
\left(c\left(2H_{1}-H_{2}-H_{3}+\frac{1}{2}\right),c^{-1}\left(H_{2}-2H_{3}+\frac{1}{2}\right)\right),\\
\left(c,c^{-1}\left(H_{2}-2H_{3}+\frac{1}{2}\right)\left(2H_{1}-H_{2}-H_{3}-\frac{1}{2}\right)\right),\\
\left(c\left(H_{2}-2H_{3}-\frac{1}{2}\right)\left(2H_{1}-H_{2}-H_{3}+\frac{1}{2}\right),c^{-1}\right),\\
\left(c\left(H_{2}-2H_{3}-\frac{1}{2}\right),c^{-1}\left(2H_{1}-H_{2}-H_{3}-\frac{1}{2}\right)\right).
\end{cases}$$

因此,  $(\deg_1 E_2, \deg_1 F_2)$  等于 (0,1) 或 (1,0). 这与上面结果矛盾. 所以,  $\mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ .

### 参考文献

- 1 Block R. The irreducible representations of the Lie algebra \$\infty(2)\$ and of the Weyl algebra. Adv Math, 1981, 139: 69–110
- 2 Mathieu O. Classification of irreducible weight modules. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2000, 50: 537-592

- 3 Dimitrov I, Grantcharov D. Classification of simple weight modules over affine Lie algebras. ArXiv:0910.0688, 2009
- 4 Futorny V, Tsylke A. Classification of irreducible nonzero level modules with finite-dimensional weight spaces for affine Lie algebras. J Algebra, 2001, 238: 426–441
- 5 Adamović D, Lü R, Zhao K. Whittaker modules for the affine Lie algebra  $A_1^{(1)}$ . Adv Math, 2016, 289: 438–479
- 6 Bekkert V, Benkart G, Futorny V, et al. New irreducible modules for Heisenberg and affine Lie algebras. J Algebra, 2013, 373: 284–298
- 7 Christodoulopoulou K. Whittaker modules for Heisenberg algebras and imaginary Whittaker modules for affine Lie algebras. J Algebra, 2008, 320: 2871–2890
- 8 Futorny V, Grantcharov D, Martins R. Localization of free field realizations of affine Lie algebras. Lett Math Phys, 2015, 105: 483–502
- 9 Guo X, Zhao K. Irreducible representations of non-twisted affine Kac-Moody algebras. ArXiv:1305.4059, 2013
- 10 Liu G, Zhao Y. Irreducible  $A_1^{(1)}$ -modules from modules over two-dimensional non-abelian Lie algebra. Front Math China, 2016, 11: 353–363
- 11 Mazorchuk V, Zhao K. Characterization of simple highest weight modules. Canad Math Bull, 2013, 56: 606-614
- 12 Rao S. Classification of loop modules with finite-dimensional weight spaces. Math Ann, 1996, 305: 651-663
- 13 Rao S. Classification of irreducible integrable modules for multi-loop algebras with finite-dimensional weight spaces. J Algebra, 2001, 246: 215–225
- 14 Nilsson J. Simple  $\mathfrak{sl}_{n+1}$ -module structures on  $U(\mathfrak{h})$ . J Algebra, 2015, 424: 294–329
- 15 Cai Y, Liu G, Nilsson J, et al. Generalized Verma modules over  $\mathfrak{sl}_{n+2}$  induced from  $U(\mathfrak{h}_n)$ -free  $\mathfrak{sl}_{n+1}$ -modules. ArXiv:1510.04129, 2015
- 16 Nilsson J.  $U(\mathfrak{h})$ -free modules and coherent families. J Pure Appl Algebra, 2016, 220: 1475–1488
- 17 Tan H, Zhao K.  $W_n^+$  and  $W_n$ -module structures on  $U(\mathfrak{h}_n)$ . J Algebra, 2015, 424: 357–375
- 18 Chen H, Guo X. Modules over the Heisenberg-Virasoro and W(2,2). ArXiv:1401.4670, 2014
- 19 Cai Y, Zhao K. Module structure on U(H) for basic Lie superalgebras. Toyama Math J, 2015, 37: 55-72
- 20 Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 21 Humphreys J. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 9. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1972

# Module structures on $U(\mathfrak{h})$ for Kac-Moody algebras

CAI YanAn, TAN HaiJun & ZHAO KaiMing

**Abstract** Let  $\mathfrak{g}$  be an arbitrary Kac-Moody algebra with a Cartan subalgebra  $\mathfrak{h}$ . In this paper, we determine the category of  $\mathfrak{g}$ -modules that are free  $U(\mathfrak{h})$ -modules of rank 1. More precisely, this category of  $\mathfrak{g}$ -modules is not empty if and only if  $\mathfrak{g}$  is of type  $A_l$  or  $C_l$  for any positive integer l.

Keywords Kac-Moody algebras, non-weight module, irreducible module

 ${\rm MSC(2010)} \quad 17{\rm B}10,\,17{\rm B}20,\,17{\rm B}65,\,17{\rm B}66,\,17{\rm B}68$ 

doi: 10.1360/N012016-00181