

金属板与介质板之间的 Casimir 效应^{*}

刘中柱 邵成刚 罗俊

(华中理工大学物理系, 武汉 430074)

摘要 利用 1+1 维有限势垒模型计算了金属板与介质板之间的 Casimir 力. 它由直接收敛的级数给出而不需采用重整化或截断函数方法. 计算结果表明, 金属板与介质板之间的 Casimir 效应除了与介质的势垒高度、厚度以及金属板与介质板的间隙 a 有关外, 还要受实验容器尺度的影响. 当间隙 a 远小于容器尺度时 Casimir 力正比于 a^{-1} , 当 a 较大时正比于 a^{-2} . 这一结果对于非理想导体之间 Casimir 效应的实验检验具有重要指导意义.

关键词 Casimir 效应 重整化 特殊计算

50 年前, Casimir 预言在理想导体平板之间存在吸引力, 即 Casimir 力^[1]. 本质上, 这种力是涨落引起的物体之间的相互作用力. 由于涨落是普遍存在的统计现象, 因此 Casimir 力在物理学中广泛出现. 很多作者对各种情况下的 Casimir 力进行了计算^[1~8]. 这些计算大致采用两种方法, 一种为有限边界的量子场论, 一种为涨落理论或其等效理论. 目前, 实验已经定性地认定了 Casimir 力的存在^[4]. 而定量上比较可靠的实验尚只有一个, 即由扭秤实验测量导体平板之间的 Casimir 力^[9]. 因此继续进行精确的实验以认定 Casimir 力的各种性质是很有必要的. 而理论研究应提供一些更适合于由实验进行验证的结果.

在量子场论中, Casimir 效应可按量子场与外场的相互作用去处理, 其精确的计算只有对具有对称性的理想导体才能完成, 这相当于用边界条件代替了外场. 对于非理想导体或介质, 可用有限势垒模型作近似的处理^[4, 5], 也可通过引入电介质对电磁波的反射系数和透射系数来进行讨论^[10~12]. 但迄今为止, 非理想导体或介质平行平板之间的 Casimir 效应还没有得到实验的精确验证. 由于电磁波对介质具有穿透性, 因此, 在测量非理想导体或介质之间的 Casimir 效应时, 必须考虑金属真空容器的器壁对实验结果的影响. 为简化起见, 本文采用如图 1 所示的 1+1 维模型计算——金属板 A (理想导体) 与一介质板 B 之间的 Casimir 力, 其中容器器壁的影响用另一金属板 C 表示. 理论分析表明, 在这种模型中 Casimir 力的表达式是直接收敛的, 而不必采用重整化或截断函数的方法. 这里, 我们将全空间考虑为 $a+b+c$, 且通常有 $a+b+c \gg a$.

介质板间的 Casimir 力在 1+1 维模型中可通过反射和透射系数的引入来讨论. 但由于这

1999-01-26 收稿, 1999-05-04 收修改稿

^{*} 国家杰出青年科学基金部分资助 (批准号: 19425008) 和塑性成形模拟及模具技术国家重点实验室开放课题资助项目

两个系数的值都与频率有较复杂的关系, 所得结果进行实验检验比较困难. 利用介质的有限势垒模型, 我们可以研究势垒的高度、宽度以及容器尺度对 Casimir 力的影响. 理论分析与数值计算表明, 由于受容器尺度的影响, 金属板与介质板之间的 Casimir 力对于距离 a 有较复杂的依赖关系. 在较大距离时 Casimir 力 $F_c \propto a^{-2}$, 对较小距离 $F_c \propto a^{-1}$. 而且在较小距离且势垒函数 $V_0(x)$ 取为 $\lambda \delta(x)$ 时 (λ 为 V_0 与 b 之积), 介质与金属平板间 Casimir 力与两金属平板间 Casimir 力之比 $e(\lambda, a)$ 在标度变换 $(\lambda, a) \rightarrow (\lambda/t, at)$ 下有不变性. 本文所有的计算均无量纲化了.

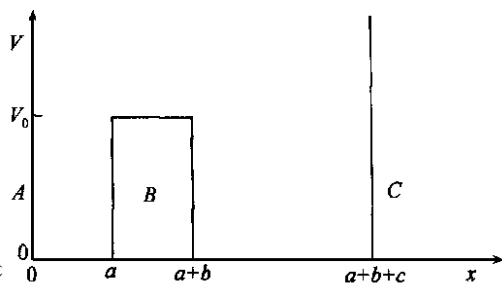


图1 金属板与介质板之间 Casimir 效应的势垒模型

其中 $x < 0$ 为金属板 A, $a < x < a+b$ 处为介质板 B. a 为金属板与介质板的间隙宽度, b 为介质板的厚度. $x > a+b+c$ 为另一金属板 C. 它代表真空容器的一壁

1 1+1 维模型的理论计算

处理像金属和介质这样的耗散系统的 Casimir 力很复杂. 当考虑电磁波对介质的穿透性时, 常采用的近似办法是有限势垒^[4,5]. 在如图 1 所示的 1+1 维模型中, 电磁场两个模的真空涨落可以由无质量粒子的 Klein-Gordon 方程的解给出,

$$\partial_t^2 \varphi - \Delta \varphi + V(x) \varphi = 0. \quad (1)$$

本文采用自然单位 $\hbar = c = 1$. 上式中的标量势 $V(x)$ 如图 1 所示, 即

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq a, \\ V_0, & a < x \leq a+b, \\ 0, & a+b < x \leq a+b+c, \\ \infty, & x > a+b+c. \end{cases} \quad (2)$$

方程(1)的解可分两种情况分别给出, 其正交化波函数为

$$\varphi_n^\pm(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(a+b+c)\omega_n}} \exp(\pm i\omega_n t) \chi_n(x).$$

当 $\omega_n^2 = k_n^2 < V_0$ 时,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} A \sin k_n x, & 0 < x \leq a, \\ B_1 e^{\mu_n x} + B_2 e^{-\mu_n x}, & a < x \leq a+b, \\ C \sin k_n (a+b+c-x), & a+b < x \leq a+b+c. \end{cases} \quad (3)$$

这里 $\mu_n = \sqrt{V_0 - k_n^2}$. 波函数的归一化由不定标量积给出, 即

$$(\varphi_n^\pm, \varphi_m^\pm) = \mp \delta_{nm}, (\varphi_n^\pm, \varphi_m^\mp) = 0, \quad (4)$$

其中归一化括号定义如下:

$$(f, g) = \int (f^* i \partial_t g - g^* i \partial_t f) dx,$$

离散谱 $\omega_n = k_n$ 由波函数和其导数在 $x = a, a+b$ 的连续性确定, 即

$$\begin{vmatrix} (\mu_n \sin k_n a + k_n \cos k_n a) e^{\frac{\mu_n b}{\mu_n}} & \mu_n \sin k_n c - k_n \cos k_n c \\ (\mu_n \sin k_n a - k_n \cos k_n a) e^{-\frac{\mu_n b}{\mu_n}} & \mu_n \sin k_n c + k_n \cos k_n c \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

同样可确定系数 A, B_1, B_2 和 C 的关系.

$$B_1 = \frac{1}{2} A \left\{ \sin k_n a + \frac{k_n}{\mu_n} \cos k_n a \right\} e^{-\frac{\mu_n b}{\mu_n}}, \quad (6)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} A \left\{ \sin k_n a - \frac{k_n}{\mu_n} \cos k_n a \right\} e^{\frac{\mu_n b}{\mu_n}}, \quad (7)$$

$$C^2 = \frac{(\mu_n \sin k_n a)^2 - (k_n \cos k_n a)^2}{(\mu_n \sin k_n c)^2 - (k_n \cos k_n c)^2} A^2. \quad (8)$$

再利用归一化条件可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+b+c} \left[A^2 \left\{ a - \frac{\sin 2k_n a}{2k_n} \right\} + C^2 \left\{ c - \frac{\sin 2k_n c}{2k_n} \right\} + A^2 [\sin^2 k_n a - \right. \\ & \left. \left(\frac{k_n}{\mu_n} \cos k_n a \right)^2 \right] b \Big] + \frac{1}{a+b+c} \left[\frac{1}{4} A^2 \left\{ \sin k_n a - \frac{k_n}{\mu_n} \cos k_n a \right\}^2 \frac{1 - e^{-2\frac{\mu_n b}{\mu_n}}}{\mu_n} + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} A^2 \left\{ \sin k_n a + \frac{k_n}{\mu_n} \cos k_n a \right\}^2 \frac{e^{2\frac{\mu_n b}{\mu_n}} - 1}{\mu_n} \right] = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

由此可确定系数 A, B_1, B_2 和 C .

当 $k_n^2 = \omega_n^2 > V_0$ 时, 则有

$$\chi_n(x) = \begin{cases} A \sin k_n x, & 0 < x \leq a, \\ B_1 \sin \mu_n x + B_2 \cos \mu_n x, & a < x \leq a+b, \\ C \sin k_n (a+b+c-x), & a+b < x \leq a+b+c. \end{cases} \quad (10)$$

这里 $\mu_n = \sqrt{k_n^2 - V_0}$, 同样的方法可确定系数 A, B_1, B_2 和 C . $k_n = \omega_n$ 满足条件

$$k_n^2 \sin \mu_n b \cos k_n (a+c) + V_0 \sin k_n a \sin k_n c \sin \mu_n b + k_n \mu_n \cos \mu_n b \sin k_n (a+c) = 0. \quad (11)$$

标量场 φ 的耦合模式(3)和(10)的能量密度统一表示为

$$T_{00} = \frac{1}{2} (|\partial_t \varphi|^2 + |\partial_x \varphi|^2 + V \varphi^2). \quad (12)$$

对于模式(3)有

$$T_{00}(x) = \frac{1}{D} \begin{cases} \omega_n^2 A^2, & x \in [0, a], \\ \mu_n^2 (B_1 e^{\mu_n x} - B_2 e^{-\mu_n x})^2 + (\omega_n^2 + V_0) (B_1 e^{\mu_n x} + B_2 e^{-\mu_n x})^2, & x \in (a, a+b], \\ \omega_n^2 C^2, & x \in (a+b, a+b+c], \end{cases} \quad (13)$$

其中 $D = 2(a+b+c)\omega_n$. 总能量的表达式为

$$E_n = \int_0^{a+b+c} T_{00}(x) dx = \frac{1}{2} \omega_n \frac{1}{a+b+c} \left[A^2 a + C^2 c + \frac{V_0}{\omega_n^2} \int (2B_1^2 e^{2\mu_n x} + 2B_2^2 e^{-2\mu_n x}) dx + 4B_1 B_2 b \right] = \frac{1}{2} \omega_n, \quad (14)$$

其中 A, B_1, B_2 和 C 由(6)~(9)式确定. 对于模式(10)也有同样的结果, 即 $E_n = \omega_n/2$.

方程(1)的任意解可用 $\varphi_n^\pm$ 的线性组合来表示,

$$\varphi(x, t) = \sum_n [a_n^- \varphi_n^-(x, t) + a_n^+ \varphi_n^+(x, t)], \quad (15)$$

其系数由归一化条件(4)式确定. 量子化以后, 没有经过重整化的真空能量密度期望值为 $\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle$, 真空态的总能量为

$$E = \int_0^{a+b+c} \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle dx = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n. \quad (16)$$

上述表达式给出的总能量是无穷大. 如果我们令 $V_0 = 0$ (即, $\omega_n = n\pi / (a + b + c)$), 再通过截断函数重整化, 就能得到相距为 $a + b + c$ 的两金属间的 Casimir 能量. 但是, 这里我们要计算的是势垒为 V_0 的介质板 B 与金属板 A 之间的 Casimir 效应及另一金属板 C 对它们的影响(图1). 令 $a + b + c = L$ (常数), 则介质板 B 与金属板 A 之间的 Casimir 力可写为

$$F_c(V_0, a, b, c) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial \omega_n}{\partial a} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial k_n}{\partial a}, \quad (17)$$

这里, $c = L - a - b$, b 为常数, $\partial k_n / \partial a$ 由(5)与(11)式确定. 通过考虑(11)式中的高频部分的影响, 可以证明(17)式的收敛性.

在(11)式中, 对任意有限的 V_0 , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有离散谱 $k_n \rightarrow n\pi / (a + b + c)$, 即, $k_n = (n + \hat{q})\pi / (a + b + c)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\hat{q} \rightarrow 0$. 由(11)式可将 $\hat{q}$ 写成级数的形式为

$$\hat{q} = \frac{a + b + c}{2n\pi^2} V_0 b - (-1)^n \frac{(a + b + c)^2}{2n^2\pi^3} V_0 \cos\left(n\pi \frac{c - a}{a + b + c}\right) \sin\left(n\pi \frac{a}{a + b + c}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (18)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 将(11)式对 a 求导, 再利用(18)式, 则 $\partial k_n / \partial a$ 也可写成级数的形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_n}{\partial a} = & (-1)^{n+1} \frac{V_0}{n\pi} \sin\left(n\pi \frac{c - a}{a + b + c}\right) \sin\left(n\pi \frac{b}{a + b + c}\right) + \\ & (-1)^n \frac{V_0^2 b (a + b + c)}{2n^2\pi^2} \sin\left(n\pi \frac{c - a}{a + b + c}\right) \cos\left(n\pi \frac{b}{a + b + c}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \\ & (-1)^{n+1} \frac{V_0}{2n\pi} \left[\cos\left(n\pi \frac{c - a - b}{a + b + c}\right) - \cos\left(n\pi \frac{c - a + b}{a + b + c}\right) \right] + \\ & (-1)^n \frac{V_0^2 b (a + b + c)}{4n^2\pi^2} \left[\sin\left(n\pi \frac{c - a - b}{a + b + c}\right) + \sin\left(n\pi \frac{c - a + b}{a + b + c}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

由公式 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n} = \ln\left[2\cos\frac{x}{2}\right]$, $-\pi < x < \pi$, 易证级数 $\sum \partial k_n / \partial a$ 是收敛的. 所以由(17)式给出的 Casimir 力是有限的, 这里并不需要引入截断函数.

2 数值计算

2.1 $F_c - V_0$ 关系

系统的 Casimir 力根据(17)式计算. 在实验装置中, 通常有 $a + b + c \gg a$. 在我们的模型中, 金属板与介质板之间的 Casimir 力与理想导体平板间的 Casimir 力之比记为

$$e(V_0, a, b, c) \equiv \frac{F_c(V_0, a, b, c)}{-\pi / (24a^2)}. \quad (20)$$

这里, $-\pi/(24a^2)$ 为 1+1 维相距为 a 的两理想导体板之间的 Casimir 力. 根据(5)和(11)式, 对任意实数 $t > 0$, 显然有 $e(V_0, a, b, c) = e(V_0/t^2, ta, tb, tc)$, 即函数 $e(V_0, a, b, c)$ 有标度变换的不变性, 所以可以取一个技术上的假定: $a+b+c=1$ (真空容器的尺度为长度单位). 为了便于数值计算, 我们用

$$F_c(V_0, a, b, c) = \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} \frac{\sum_{n=1}^M \omega_n \left(V_0, a + \frac{\Delta a}{2}, b, c - \frac{\Delta a}{2} \right) - \sum_{n=1}^M \omega_n \left(V_0, a - \frac{\Delta a}{2}, b, c + \frac{\Delta a}{2} \right)}{\Delta a} \quad (21)$$

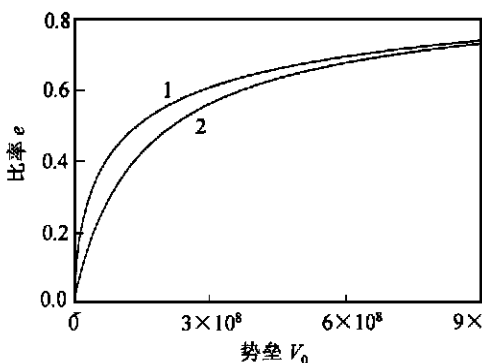


图 2 函数 $e(V_0, a, b, c)$ 随 V_0 趋于无穷大而趋于 1

其中 $a=0.0002$, $a+b+c=1$, 两条曲线分别对应于 $b=0.6$ (1) 和 $b=0.00006$ (2)

代替(17)式, 这里 $a+b+c=L=1$, $\omega_n(V_0, a, b, c)$ 由(5)与(11)式确定. M 和 Δa 的取值依 V_0 和相应的计算精度要求而定.

图 2 中的曲线 1 代表 $a=0.0002$, $b=0.6$, $c=0.3998$ 时 $e(V_0, a, b, c)-V_0$ 的关系. 在实际测量时, 可取 $a=1 \mu\text{m}$, $b=3 \text{ mm}$, 借助辅助机械设施可使 $c=2 \text{ mm}$, 这样用同等比例关系 $a=0.0002$, $b=0.6$, $c=0.3998$ 来描述是合理的. 曲线 2 代表 $a=0.0002$, $b=0.00006$, $c=0.99974$ 时 $e(V_0, a, b, c)-V_0$ 的关系. 计算表明只有当介质的厚度 b 接近或小于 a 时, 参量 b 对函数 $e(V_0, a, b, c)$ 才会有明显影响, 而且当 a 取相同值时, $b=0.0006$ 时的曲线基本上与曲线 1 相重合. 另

外, 对于给定的 a 和 b , 对于 3+1 维模型, 同样可以定义 $e(V_0, a, b, c)$, 它将是实验可测量的.

2.2 F_c - a 关系

由于势垒的有限性, Casimir 力对距离有较复杂的依赖关系. 如图 3 所示, 对于给定的势垒 V_0 , $e(V_0, a, b, c)$ 随 a 的减小而减小. 从图中可以看出当 $V_0=10^8$, $a > 0.001$ 时, $F_c \propto a^{-2}$, 当 $a < 0.001$ 时, $F_c \propto a^{-1}$.

另外, 若将势函数取为 δ 函数, 即令 $b \rightarrow 0$, $V(x) = \lambda \delta(x-a)$, $x \in (0, a+c)$, 将(20)式中的 $e(V_0, a, b, c)$ 简记为 $e(\lambda, a)$, 则 $e(\lambda, a)$ 随 $\lambda \rightarrow \infty$ 而趋于 1.

图 4 给出的结果指出, 对于给定的 λ , $e(\lambda, a)$ 随 a 的减小而减小. 这可解释为当平板靠得愈来愈近时, 势垒的穿透性增强了. 仔细的分析指出, 曲线 2, 3, 4 分别相当于曲线 1 在横轴上拉长了 10 倍, 100 倍, 1 000 倍. 所以当 a 较小时, $e(\lambda, a)$ 对任意的 $t > 0$, 在标度变换 $(\lambda, a) \rightarrow (\lambda/t, at)$ 下是近似不变的. 这说明了 λ 与 a 有反比关系.

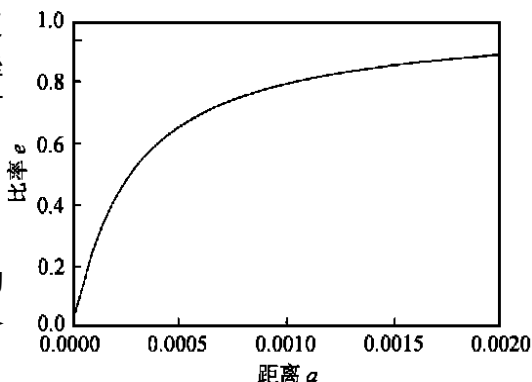


图 3 函数 $e(V_0=10^8, a, b, c)$ 随 a 趋于 0 而趋于 0
其中 $a+b+c=1$, $b=10^{-4}$

所以, 当 a 较小时, $e(\lambda, a)$ 对任意的 $t > 0$, 在标度变换 $(\lambda, a) \rightarrow (\lambda/t, at)$ 下是近似不变的. 这说明了 λ 与 a 有反比关系.

3 物理解释

Casimir 力的实验检验是在真空容器中进行。由于低频电磁波对于一般的介质有一定的透射深度,除了考虑势垒所带来的影响外,还应考虑真空容器的尺度对实验的影响。按照量子场论的观点,Casimir 力与空间的几何结构有关。对于理想导体,两平板间的空间与外部是隔离的,Casimir 力显然只由两板间距 a 决定。对于非理想导体,两平板间的内部与外部是连通的,Casimir 力除与两板间距 a 相关外,显然还与容器的几何结构有关。

在(2)式中,当 V_0 很大, $a+b+c \gg a$, b 趋于 0 时(近似于 δ 势垒)。在空间 $0 < x < a$ 内,总能量 $E_a \approx \frac{1}{2} \sum_n \frac{n\pi}{a}$, 在空间 $a+b < x < a+b+c$ 内,总能量 $E_c \approx \frac{1}{2} \sum_n \frac{n\pi}{c}$, 全空间的总能量为 $E = E_a + E_c$ 。当 a 减小为 $a - \Delta a$ 时,空间 $0 < x < a$ 内每一模式 $n\pi/a$ 增为 $n\pi/(a - \Delta a)$, $E_{a-\Delta a} \approx E_a(1 + \Delta a/a)$, 同理,空间 $a+b < x < a+b+c$ 内每一模式 $n\pi/c$ 减为 $n\pi/(c - \Delta a)$, $E_{c+\Delta a} \approx E_c(1 - \Delta a/c)$ 。由于空间 $a+b < x < a+b+c$ 内态密度是空间 $0 < x < a$ 的 c/a 倍,

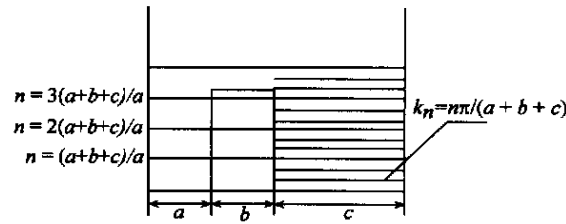


图 5 从全空间来看,所有模式均在 $n\pi/(a+b+c)$ 附近

其中 n 为 $(a+b+c)/a$ 的整数倍的模式与非整数倍的模式之间的非平衡关系形成了 Casimir 力。当 a 迅速减小时,为 $(a+b+c)/a$ 的整数倍的模式迅速上升到势垒高度以上,要想使 e 保持不变,则当 a 减小到原来的 $1/10$ 时, V_0 需增高为原来的 10 倍

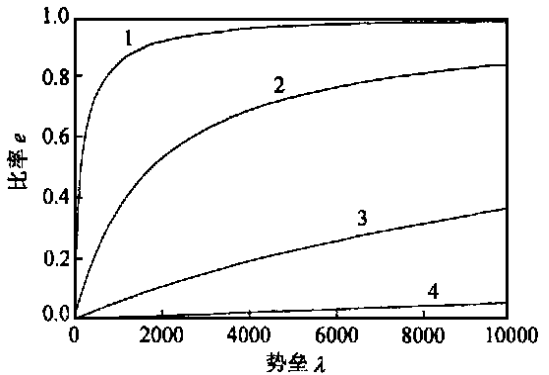


图 4 函数 $e(\lambda, a)$ 随 λ 趋于无穷大而趋于 1 其中 $a+c=1$, 曲线 1, 2 3 和 4 中的 a 分别为 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001

全空间的总能量随 a 的改变将大致上维持不变。事实上,对于任意给定的有限势垒 V_0 ,它主要是对于低频模式有明显影响。计算表明当 a 减小时,全空间的总能量将随之少量减小,显示出平板间的吸引力,即 Casimir 力。当 V_0 不变时,随着 a 的继续减小,函数 $e(V_0, a, b, c)$ 将变小,且有 $a \rightarrow 0$ 时 $e(V_0, a, b, c) \rightarrow 0$ 。这主要是因为随着 a 的急剧减小,在空间 $0 < x < a$ 中原来比势垒低的模式迅速升到势垒高度以上,从而对 Casimir 力的贡献迅速减小而成,而空间 $a+b < x < a+b+c$ 中的各模式基本上不变。

由于受实验容器尺度的影响,当导体和介质板靠得很近时,Casimir 力将由 $1/a^2$ 变为 $1/a$ 形式。对于三维情况也应有类似的结论。

致谢 感谢葛墨林教授的鼓励与帮助,并感谢与刘辽教授进行的有益讨论。

参 考 文 献

- 2 Lifshitz E M. Theory of molecular attracting force between solid bodies. *Sov Phys JETP*, 1956, 2: 73
- 3 Schwinger J, DeRaad L L, Milton K A. Casimir effect in dielectrics. *Ann Phys*, 1978, 115: 1~22
- 4 Mostepanenko V M, Trunov N N. Casimir effect and its applications. *Sov Phys Usp*, 1988, 31: 965~987
- 5 Mostepanenko V M, Trunov N N. Quantum field theory of the Casimir effect for real media. *Sov J Nucl Phys*, 1985, 42(5): 818~822
- 6 郑泰玉. 内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献. *高能物理与核物理*, 1990, 14: 796~801
- 7 郑泰玉. 有限温度下的 Casimir 效应. *高能物理与核物理*, 1995, 19: 241~244
- 8 倪光炯, 张 敏, 宫家文. Casimir 效应的一种严格计算方法. *高能物理与核物理*, 1991, 15: 695~700
- 9 Lamoreaux S K. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 μm range. *Phys Rev Lett*, 1997, 78: 5~8
- 10 Kupiszewska D, Mostowski J. Casimir effect for dielectric plates. *Phys Rev A*, 1990, 41: 4 636~4 644
- 11 Kupiszewska D. Casimir effect in absorbing media. *Phys Rev A*, 1992, 46: 2 286~2 294
- 12 Lambrecht A, Jackel M T, Reynaud S. The casimir force for passive mirrors. *Phys Lett A*, 1997, 225: 188~194