



GPS 卫星钟差分析、建模及仿真

焦月, 寇艳红*

北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191

* 联系人, E-mail: buaakyh@126.com

收稿日期: 2011-03-11; 接受日期: 2011-04-14

摘要 卫星钟差是卫星导航系统中的一项重要误差源, 本文根据 IGS 观测数据分析 GPS 卫星铷钟和铯钟的噪声特性, 并对星钟误差进行建模和仿真. 首先采用修正 Allan 方差表征和分析了 GPS 卫星上不同种类原子钟随机噪声的时域特性; 然后基于最小二乘分段拟合确定了卫星钟差确定性分量的时差、频差、线性频漂参数值; 对于多项式拟合后的残差部分, 利用随机噪声幂律谱模型建立了随机性分量误差模型; 最后利用修正 Allan 方差反演的方法模拟产生了各噪声分量的独立随机序列并进行合成; 对合成序列与原始数据进行了对比分析以验证本文所提出建模与仿真方法的正确性.

关键词 卫星钟差, 修正 Allan 方差, 多形式拟合, 幂律谱, 方差反演

PACS: 91.10.Fc, 95.55. Sh, 02.70.Uu, 02.60.Cb

1 引言

在全球卫星导航系统中, 精确距离测量实际上是精确时间的测量^[1]. 时钟的准确度及频率稳定度对接收机的测距、定位和授时精度和可靠性都有直接的影响. 卫星钟差是卫星导航系统中的主要误差源之一, 在导航信号模拟器中加入更精确的卫星钟差模型, 对模拟导航信号的逼真度的提高、辅助高性能接收机的研究和系统级实验具有重要意义.

据大量文献报道, 在所有卫星星钟中都可以观测到多种呈幂率谱分布的随机噪声, 其中占主导作用的是调频随机游走噪声(RWFM)、调频闪变噪声(FFM)、调频白噪声(WFM)、调相闪变噪声(FPM)和调相白噪声(WPM)五种幂率型噪声. 由于这些幂率型噪声基本不满足平稳遍历条件, 它们的标准方差是不收敛的, 因而需要通过 Allan 方差^[2], 修正 Allan

方差^[3], Hadamard 方差^[4]等来表征它们的频率稳定度. 卫星钟差的随机特性可以通过这几种方差更直观地反映出来^[5].

本文采用修正 Allan 方差来分析 GPS 卫星原子钟频率稳定度, 因为修正 Allan 方差不仅覆盖了晶振所有的噪声过程, 且占主导作用的五种幂率型噪声能够很好地通过修正 Allan 方差区分出来, 弥补了 Allan 方差不能区分相位白噪声和相位闪变噪声的缺点^[3]. 我们将卫星钟差分为确定性分量和随机性分量, 根据实际观测数据对星钟误差进行分析、建模和仿真: 首先根据 IGS(International GNSS Service)提供的 GPS 精密卫星钟差数据, 采用基于最小二乘的分段拟合方法, 将确定性分量表示为一阶(铯原子钟)或二阶(铷原子钟)多项式的形式, 确定了时差、频差、线性频漂参数值; 对于多项式拟合后的残差部分, 基于由

引用格式: 焦月, 寇艳红. GPS 卫星钟差分析、建模及仿真. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 596-601

Jiao Y, Kou Y H. Analysis, modeling and simulation of GPS satellite clock errors (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 596-601, doi: 10.1360/132011-287

五种独立随机噪声组成的幂律谱模型, 采用修正 Allan 方差分析了给定取样间隔下各种噪声分量的存在及分布情况. 为了能够在统计意义上逼真地模拟产生卫星钟差序列, 本文给出了一种方差反演的方法来模拟产生 5 种随机噪声序列, 推导了修正 Allan 方差下各噪声序列的方差反演公式, 并通过这一系列公式模拟产生了各噪声分量的独立随机序列并进行合成. 最后, 通过仿真数据与原始观测数据的一致性, 证明了该建模和仿真方法的可行性.

2 原子钟噪声的时域特性分析

原子钟频率稳定度的时域表征, 通过修正 Allan 方差表达为^[3]

$$\text{Mod}(\sigma_y^2(n\tau_0)) = \frac{1}{2} \left\langle \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+n} - y_i) \right]^2 \right\rangle, \quad (1)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示时间平均, τ_0 为时间间隔, n 为取样个数, τ 为取样间隔 ($\tau = n\tau_0$), y_i 为第 i 次取样测得的频率误差. 若用时间或相位测量来表示则为

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\sigma_y^2(n\tau_0)) &= \frac{1}{2\tau^2} \left\langle \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i \right]^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2n^4 \tau_0^2 (N-3n+1)} \sum_{j=0}^{N-3n} \left\{ \sum_{i=j}^{j+n-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right\}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 N 为取样间隔为 τ_0 时的总取样点数, x_i 为第 i 次取样测得的时间/相位误差.

为了分析实际 GPS 卫星钟差的频率稳定度特性, 本文根据 2010 年 8 月 29 日到 2010 年 9 月 18 日三周的 IGS 精密卫星钟差观测数据(时间间隔为 30 秒), 计算了几颗典型的铯钟(Cs 钟, PRN: 3, 9, 10, 30)和铷钟(Rb 钟, PRN: 2, 11, 12, 22)在不同取样间隔下的修正 Allan 标准差(MDEV), 结果分别如图 1 和 2 所示.

从图 1 可以看出, 对于 Cs 钟, 当取样间隔在 30~3000 s 左右时, 主要表现为调频白噪声; 当取样间隔在 10^4 s 附近时表现得比较复杂, 存在多种噪声成分.

由图 2 可见, 对于 Rb 钟, 在开始的 30 s 取样间隔处表现为调频白噪声, 之后随着取样间隔的增加转为由调相闪变白噪声占主导地位; 当取样间隔在

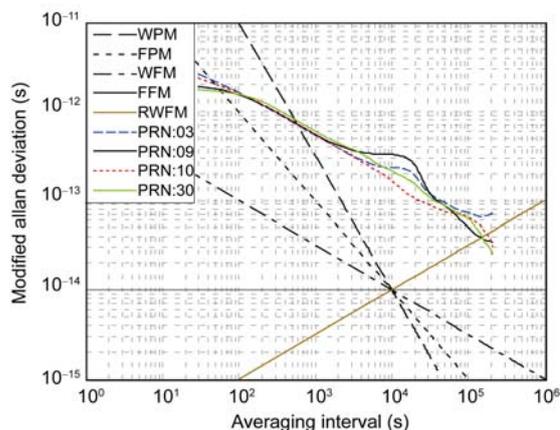


图 1 四颗 Cs 钟的卫星钟差数据的修正 Allan 标准差
Figure 1 MDEV of four Cs clocks using satellite clock error data.

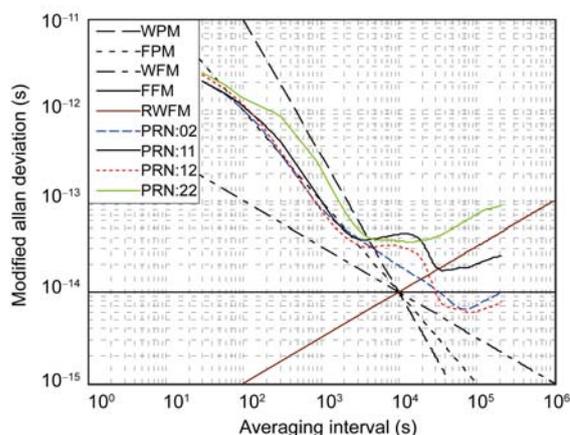


图 2 四颗 Rb 钟的卫星钟差数据的修正 Allan 标准差
Figure 2 MDEV of four Rb clocks using satellite clock error data.

10^4 s 附近时表现得也比较复杂, 存在多种噪声成分; 当时间大于 3×10^4 s 时, 存在明显的调频随机游走噪声项.

从图 1 与图 2 对比可知, 在取样间隔在 100~ 10^5 s 之间时, Rb 钟的修正 Allan 方差比 Cs 钟小, 说明取样间隔在这一区间时 Rb 钟的稳定性更好(但 Cs 钟的稳定性表现在大于 10^5 s 的取样间隔范围^[5]). 当取样间隔大于 10^5 s 之后, Rb 钟的调频随机游走噪声分量逐步占主导地位.

3 卫星钟差的建模

为了准确表征卫星钟差的各种特性, 我们首先将卫星钟差分解为确定性分量和随机分量两部分:

$$x(t) = a_0 + a_1 \Delta t + a_2 \Delta t^2 + \varphi(t), \quad (3)$$

式中 $a_0 + a_1 \Delta t + a_2 \Delta t^2$ 表示卫星钟差确定性分量部分, 多项式系数 a_0, a_1, a_2 分别对应时差、频差、线性频漂参数值(对于 Cs 钟一般可取 a_2 为 0). $\varphi(t)$ 表示卫星钟差的随机噪声分量部分, 主要由 5 种独立幂律谱噪声引起, 总噪声可以看成是这 5 种噪声的线型叠加. 目前国际上普遍认可的幂律谱噪声模型经验公式为

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha f^\alpha, \quad (4)$$

式中 $S_y(f)$ 为频率起伏噪声的功率谱密度, f 为傅里叶频率, h_α 为噪声指数是 α 的能量谱噪声强度系数. α 取值从 -2, -1, 0, 1, 2 变化时, 分别对应于调频随机游走噪声、调频闪变噪声、调频白噪声、调相闪变噪声和调相白噪声.

对于卫星钟差的确定性分量, 对观测数据进行多项式拟合即可确定其时差、频差、线性频漂参数值. 作为示例, 这里选取 2010 年 9 月 5 日的 IGS 精密卫星钟差观测数据, 从中分别选取一颗典型的铯钟 (PRN10 号星) 和铷钟 (PRN22 号星) 的数据, 通过分段最小二乘拟合法, 得到的多项式系数 a_0, a_1, a_2 如表 1 所示.

表 1 多项式拟合的参数^{a)}

Table 1 Parameters of polynomial fitting

	a_0	a_1	a_2
PRN:10 (2h:4h)	-5.1461×10^{-5}	-1.1428×10^{-12}	-
(4h:6h)	-5.1469×10^{-5}	-1.0811×10^{-12}	-
(6h:8h)	-5.1479×10^{-5}	-0.8639×10^{-12}	-
PRN:22 (2h:4h)	1.6377×10^{-4}	-7.7645×10^{-13}	1.1425×10^{-18}
(4h:6h)	1.6377×10^{-4}	-7.539×10^{-13}	1.4157×10^{-19}
(6h:8h)	1.6376×10^{-4}	-7.385×10^{-13}	-0.4039×10^{-19}

a) Cs 为一阶多项式拟合, 故 a_2 为零

为了验证拟合后的残差分量是否保留了原始卫星钟误差数据的随机噪声特性, 我们对 2010 年 9 月 5 日 2 时到 8 时的 IGS 卫星钟差观测数据及其多项式拟合后的残差数据进行了修正 Allan 标准差的时域分析比较, 结果如图 3 所示.

由图 3 可见, 由残差数据和原始卫星钟差数据计算得到的修正 Allan 标准差几乎相同, 说明对于短期数据, 将确定性分量去除后, 不会改变卫星钟差中所包含的随机噪声成分及其分布情况.

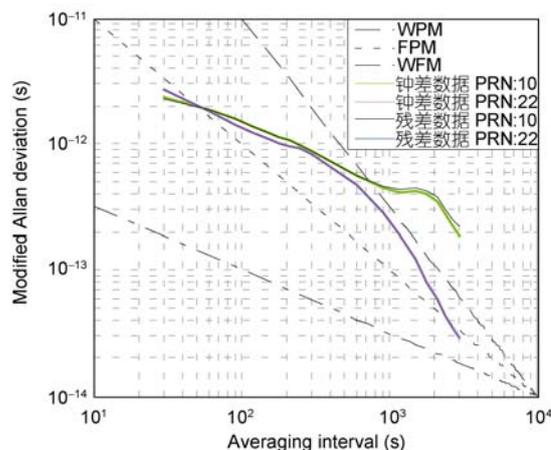


图 3 IGS 的钟差数据与残差数据的修正 Allan 标准差
Figure 3 MDEV of the IGS data and residual data.

4 卫星钟差随机分量的数值模拟方法

如上所述, 通过对卫星钟差多项式拟合后的残差数据进行修正 Allan 方差的时域分析, 可判断出给定取样间隔下, 各项噪声分量的存在及分布情况. 借鉴文献[6]中提出的 Allan 方差反演的方法, 我们根据各随机噪声过程的时域特性, 基于修正 Allan 方差进行反演, 可模拟产生各噪声分量的独立随机序列, 经线性叠加后的序列可以作为所模拟卫星钟差的随机噪声分量部分. 与文献[6]不同的是, 本文基于修正 Allan 方差来推导各噪声序列的生成方法.

修正 Allan 方差和功率谱密度间的转换关系为

$$\text{Mod}(\sigma_y^2(\tau)) = \frac{2}{n^4 \pi^2 \tau_0^2} \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^6(\pi \tau f)}{f^2 \sin^2(\pi \tau_0 f)^2} df. \quad (5)$$

由(4)和(5)式可以推出^[7]:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\sigma_y^2(\tau)) = & h_{-2} \frac{11\pi^2 \tau}{20} + h_{-1} [27 \ln 3 - 32 \ln 2] / 8 \\ & + h_0 \frac{1}{4\tau} + h_1 \frac{1}{8\pi^2 \tau^2} (24 \ln 2 - 9 \ln 3) \\ & + h_2 \frac{3}{8\pi^2 \tau^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

由于调频随机游走噪声、调频闪变噪声、调频白噪声、调相闪变噪声、调相白噪声是相互独立的随机过程, 其和之方差可以表示为各项方差之和:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\sigma_y^2(\tau)) = & \sigma_{-2}^2(\tau) + \sigma_{-1}^2(\tau) + \sigma_0^2(\tau) \\ & + \sigma_1^2(\tau) + \sigma_2^2(\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\sigma_{-2}^2(\tau), \sigma_{-1}^2(\tau), \sigma_0^2(\tau), \sigma_1^2(\tau), \sigma_2^2(\tau)$ 分别代

表调频随机游走噪声、调频闪变噪声、调频白噪声、调相闪变噪声和调相白噪声对修正 Allan 方差的贡献。

在已知多个(≥ 5)时间间隔 τ 上的修正 Allan 方差值的条件下, 采用最小二乘法可求解 h_{-2} , h_{-1} , h_0 , h_1 , h_2 的值. 由此可得到任意取样间隔下各项噪声的修正 Allan 方差.

将 5 项随机噪声方差分开之后, 可以利用其各自的噪声特性进行噪声序列的反演. 对于调相白噪声、调频白噪声和调频随机游走噪声, 根据其噪声特性可以推出相应的正态分布随机序列的方差. 可以在计算机中模拟产生所需的正态分布随机数, 然后经过一定的递推产生相应噪声项的频率误差序列; 对于闪烁噪声, 采用均匀分布的随机序列进行几何插值的方法合成闪烁特性的噪声序列^[8].

先产生方差为 1 的标准正态分布随机数 p_k , 则方差为 σ_a^2 的正态分布随机数为 $a_k = \sigma_a p_k$. 以下记取样间隔为 τ , 模拟产生的频率数据为 y_k , 相位数据为 x_k , 则有:

$$x_k = x_{k-1} + y_k \tau, \quad y_k = (x_k - x_{k-1}) / \tau. \quad (8)$$

4.1 调相白噪声模拟

将 $x_k = a_k$ 代入(2)式, 可以推得调相白噪声 x_k 的方差为 $\sigma_x^2 = \sigma_a^2 = (n\tau^2 / 3)\sigma_2^2(\tau)$, 则模拟调相白噪声项的相位数据为 $x_k = \sigma_a p_k$, 频率数据为 $y_k = \sigma_a(p_k - p_{k-1}) / \tau$.

4.2 调频白噪声的模拟

将 $y_k = a_k$ 代入(1)式, 或将 $x_k = x_{k-1} + a_k \tau$ 代入(2)式, 可以推出调频白噪声项的方差为 $\sigma_y^2 = \sigma_a^2 = n\sigma_0^2(\tau)$, 则模拟调频白噪声项的频率数据为 $y_k = \sigma_a p_k$, 相位数据为 $x_k = x_{k-1} + \sigma_a p_k \tau$.

4.3 调频随机游走噪声的模拟

调频随机游走项的频率可以采用时间常数为无穷大的高斯-马尔科夫一阶延迟噪声模型来模拟. 将 $y_k = y_{k-1} + a_k$ 代入(1)式, 可以推得 $\sigma_a^2 = 2n\sigma_2^2(\tau)$, 则模拟频率数据为 $y_k = y_{k-1} + \sigma_a p_k$, 相位数据为 $x_k = 2x_{k-1} - x_{k-2} + \sigma_a p_k \tau$.

4.4 闪烁噪声的模拟

闪烁噪声最显著的特征是功率谱呈幂函数, 具有分型结构和长程相关性或自相似性. 本文采用对均匀分布的随机序列进行几何插值的方法合成闪烁特性的噪声序列, 然后通过以下方法对调频闪变噪声和调相闪变噪声进行模拟, 以达到给定的频率范围内较好的逼近效果.

设产生的归一化的闪烁噪声序列为 b_k , 由(1)式直接计算其修正 Allan 方差 $\sigma_b^2(\tau)$, 则模拟调频闪变噪声的频率数据取为 $y_k = [\sqrt{n}\sigma_{-1}(\tau) / \sigma_b(\tau)]b_k$, 相位数据为 $x_k = x_{k-1} + [\sqrt{n}\sigma_{-1}(\tau) / \sigma_b(\tau)]b_k \tau$.

设 $c_k = b_k - b_{k-1}$ 的修正 Allan 方差为 $\sigma_c^2(\tau)$, 则模拟调相闪变噪声的频率数据取为 $y_k = [\sqrt{n}\sigma_1(\tau) / \sigma_c(\tau)]c_k$, 相位数据由(8)式可得 $x_k = x_{k-1} + [\sqrt{n}\sigma_1(\tau) / \sigma_c(\tau)]c_k \tau$.

4.5 模拟仿真结果

按照上述方法对前面得到的经分段多项式拟合后的 6 小时残差数据进行处理, 得到的 h_{-2} , h_{-1} , h_0 , h_1 , h_2 的最小二乘拟合结果如表 2 所示. 所模拟的噪声序列及合成的总随机噪声序列分别如图 4(Cs 钟)和图 5(Rb 钟)所示.

表 2 修正 Allan 方差的 h_α 参数值

Table 2 Parameter h_α of modified Allan variance

h_α	h_{-2}	h_{-1}	h_0	h_1	h_2
PRN10 $\times 10^{-22}$	-	0.0018	6.8869	6.8226	6.7911
PRN22 $\times 10^{-22}$	-	-	8.3348	5.7898	5.8227

由图 4 和 5 可以看出, 对于 PRN10 号 Cs 钟的随机噪声起支配作用的是调频闪变噪声, 对于 PRN22 号 Rb 钟起支配作用的是调频白噪声, 这与图 3 中对残差数据的修正 Allan 方差时域分析的结果相符, 说明该方法对卫星钟差中随机噪声的模拟是正确的. 选定 4 个取样时间间隔下残差数据及仿真的总噪声序列的修正 Allan 标准差值如表 3 所示.

比较表 3 中的残差数据及仿真的总噪声序列的修正 Allan 标准差值看出, 两组数据结果很接近, 误差在可允许范围以内. 说明所使用的修正 Allan 方差反演及合成方法, 可较好地模拟 5 种随机噪声序列,

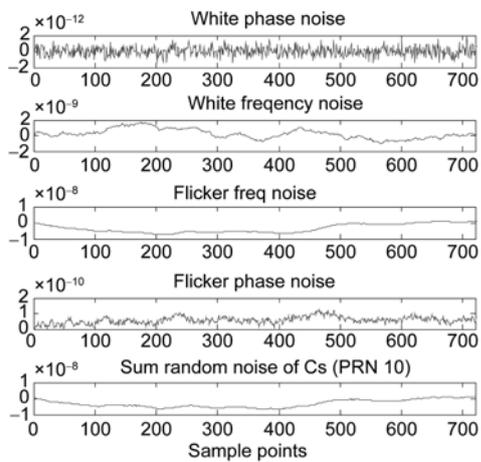


图 4 模拟的噪声序列及合成的总的随机噪声序列(PRN: 10)
 Figure 4 Simulated noise sequences and superposed sequence of the random noise (PRN: 10).

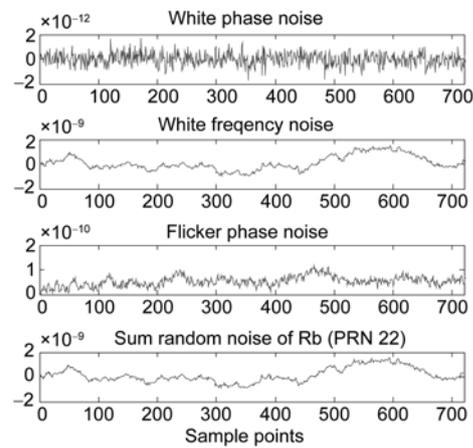


图 5 模拟的噪声序列及合成的总的随机噪声序列(PRN: 22)
 Figure 5 Simulated noise sequences and superposed sequence of the random noise (PRN: 22).

表 3 给定取样间隔对应的修正 Allan 标准差值

Table 3 Modified Allan deviations at the fixed sample intervals

取样间隔 (s)	PRN10 $\times 10^{-12}$	仿真值 $\times 10^{-12}$	PRN22 $\times 10^{-12}$	仿真值 $\times 10^{-12}$
30	2.3355	2.6189	2.7038	2.6794
60	1.8828	1.9050	1.8390	1.8706
150	1.2476	1.2477	1.1126	1.1520
300	0.87704	1.0527	0.8218	0.8189

因此该方法可用于对 GPS 卫星钟差的随机分量部分的仿真。

5 结论

本文采用修正 Allan 方差分析了 GPS 卫星钟的随机噪声特性, 结果表明不同类型的原子钟表现出不同的随机噪声分量及分布特性, 而同一类型的原子钟在不同取样间隔下表现出不同的随机噪声分量. 在 $100 \sim 10^5$ s 之间的取样间隔上, Rb 钟的稳定性优于 Cs 钟, 而当取样间隔大于 10^5 s 之后, Rb 钟的调频随机游走噪声分量逐步占主导地位, Cs 钟表现出更好的稳定性. 文中基于观测数据对卫星钟差进行了建模和仿真, 将星钟误差数据分为确定性分量和随机性分量两部分; 对于确定性分量部分采用分段最小二乘的方法拟合出其时差、频差和频漂参数; 对于随机性分量部分给出了基于修正 Allan 方差反演的 5 项主要噪声序列生成方法; 通过仿真结果与真实数据的分析比较, 证明了该方法的正确性和可行性. 这些研究为卫星钟差特性的提取和计算机数值仿真提供了有用的参考.

参考文献

- 1 Guo H R. Study on the analysis theories and algorithms of the time and frequency characterization for atomic clocks of navigation satellites (in Chinese). Dissertation for the Doctoral Degree. Zhengzhou: The PLA Information Engineering University, 2006 [郭海荣. 导航卫星原子钟时频特性分析理论与方法研究. 博士学位论文. 郑州: 解放军信息工程大学, 2006]
- 2 Allan D W, Weiss M A. A frequency-domain view of time-domain characterization of clocks and time and frequency distribution systems. In: Proc. 45th Annual Frequency Control Symposium, Los Angeles, CA, 1991. 667-678
- 3 Allan D W, Barnes J A. A modified allan variance with increased oscillator characterization ability. In: Proc. 35th Annual Frequency Control Symposium, Fort Monmouth, NJ, 1981. 470-475
- 4 Howe D A, Beard R L. Enhancements to GPS operations and clock evaluations using a total Hadamard deviation. IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Frequency Control, 2005, 52(8): 1253-1261
- 5 Senior K L, Ray J R, Beard R L. Characterization of periodic variations in the GPS satellite clocks. GPS Solutions, 2008, 12(3): 211-225

- 6 Kou Y H, Zhang Q S. A method for simulating the crystal oscillator errors in GPS receiver (in Chinese). *J Electron Info Technol*, 2004, 26(8): 1319–1324 [寇艳红, 张其善. GPS接收机中晶振误差的模拟方法. *电子与信息学报*, 2004, 26(8): 1319–1324]
- 7 Vernotte F, Lantz E, Gros Lambert J, et al. Oscillator noise analysis: Multivariance measurement. *IEEE Trans Instrument Measur*, 1993, 42(2): 342–350
- 8 Feng A M, Lin M. Application of geometry interpolation to synthesize $1/f$ noises (in Chinese). *J China Inst Metrol*, 2002, 13(2): 109–112 [冯爱明, 林敏. 利用几何插值法合成 $1/f$ 噪声. *中国计量学院报*, 2002, 13(2): 109–112]

Analysis, modeling and simulation of GPS satellite clock errors

JIAO Yue & KOU YanHong*

School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

The satellite clock error is an essential error source for a navigation satellite system. This paper analyses the noise characteristics of the Rb/Cs clocks onboard GPS satellites based on IGS observations, and establish the model of clock error simulation. First, different Rb/Cs clocks are characterized and analyzed using modified Allan variance in the time-domain. Next, the time offset, frequency offset and linear frequency drift parameters are determined using a piecewise least-square polynomial fitting method. And the residual random noises after the polynomial fitting are modelled by a power law spectrum. Finally, an Allan variance decomposition and inversion method is proposed to generate the independent random sequence and then the sequences are superposed together. The synthesized clock error sequence is compared with the original data to validate the modeling and simulation methodology.

satellite clock error, modified Allan variance, polynomial fitting, power law, variance inversion

PACS: 91.10.Fc, 95.55. Sh, 02.70.Uu, 02.60.Cb

doi: 10.1360/132011-287