



一种饱和电力系统稳定域估计的降阶方法

甘德强 辛焕海* 邱家驹 韩祯祥

(浙江大学电气工程学院电机系, 杭州 310027)

摘要 基于奇异摄动理论提出一种用于估计奇异饱和系统稳定域的降阶方法. 通过构造一个低维饱和系统来估计原高维饱和系统的稳定域, 不仅可以克服高维系统的奇异性, 还可以减少稳定域估计的计算量. 此外, 从理论上证明了降阶方法的严格性, 并利用 3 机 5 节点的算例验证了此方法的有效性.

关键词 饱和非线性 电力系统稳定器 线性矩阵不等式 奇异摄动 降阶方法

由于人为设置或者物理约束, 饱和非线性在工程中普遍存在^[1~3], 电力系统也不例外^[4~6], 如励磁控制系统和 PSS(Power System Stabilizer) 控制系统, 它们的输出都存在饱和环节^[7~9]. 早在 1995 年, 著名学者 Mohler 就指出, 电力系统受扰后某些控制规律受到饱和的约束, 因而其稳定控制性能会比预期的要低^[10]. 这个断言是不奇怪的, 后来有关研究的仿真分析也证实了上述论断^[8]. 我国学者首次探讨了电力系统饱和和控制器设计的方法^[7,11]. 事实上, 电力系统中的任何非线性环节都会对其稳定性产生影响^[12,13], 电力系统中控制器的饱和和非线性环节可能会对电网稳定性造成很大的影响, 然而这点恰恰被大多数人所忽视. 因此, 分析饱和非线性对电力系统稳定性的影响十分重要, 随之而来的解析方法, 即从饱和系统稳定域的角度分析此问题越来越受人们的重视.

刻画饱和系统稳定域边界十分困难^[12], 很多学者利用 Lyapunov 直接法估计饱和系统稳定域, 在此方面已取得了很大的进展^[14,15]. 其中, 尤为引人注目的是 Hu 等, 为减少结果的保守性, 将如何选择 Lyapunov 函数转化为一个 LMI (Linear Matrix Inequality) 优化问题^[12,16]. 文献[17]已将此方法应用于电力系统, 用来判断饱和和 PSS 控制系统是否有效, 其重要意义在于, 人们可以更为准确地评价饱和和控制器的控制性能, 为深入研究电力系统控制极限对稳定性的影响提出了新思路.

这种饱和系统稳定域的估计方法针对的是普通的饱和系统, 是通用的方法, 这是它的一个优点, 但同时也是缺点. 因为对于包含快速控制器的系统, 闭环系统的最大和最小特征根相差很大^[18], 导致快变量和慢变量的衰减速度差异很大^[19,20], 所以直接利用传统的方法估计奇异饱和系统的稳定域时, 存在计算量大等一系列问题. 用于分析电力系统小干扰稳定的模型

收稿日期: 2007-05-15; 接受日期: 2007-05-30

国家自然科学基金(批准号: 50595411)和教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-04-0529)资助项目

本文由卢强编委推荐

* 联系人, E-mail: deqiang.gan@ieee.org; cexinh@163.com

通常就属于这种类型^[21]. 因此, 如何避免或减轻稳定域估计的计算量、维数灾等一些问题十分必要, 这是本文的主要工作.

奇异摄动方法是分解动力系统快慢流形的一种常用方法, 它已经成功应用于电力系统^[19,22]. 为将文献[12, 17, 23]中的稳定域估计方法更好地应用于分析饱和和非线性对电力系统小干扰稳定的影响, 本文基于奇异摄动理论, 提出一种奇异饱和系统稳定域估计的降阶方法, 并且证明了在一定条件下降阶方法的严格性. 该降阶方法根据饱和系统中快速流形全局稳定而且衰减速度快的特点, 利用低维系统来估计高维系统的稳定域, 不仅可克服系统的奇异性, 还可减少稳定域估计的计算量.

文中首先针对奇异饱和系统, 介绍稳定域估计的降阶方法及其基本原理, 然后将该方法应用于分析含饱和环节的电力系统, 估计此饱和电力系统的稳定域. 算例仿真验证了降阶方法的有效性.

符号说明 对于 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$, $\mathbf{x} \geq (\leq) \mathbf{y}$ 表示 $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 的 $x_i - y_i \geq (\leq) 0$; 矩阵 $A \geq (>) 0$ 表示 A 是半(正)定的对称矩阵; 符号“ $\Leftrightarrow$ ”表示“等价于”.

1 基本模型及稳定域估计的传统方法

1.1 电力系统的饱和奇异摄动模型

电力系统中, 发电机的励磁控制系统往往包含 PSS 控制系统, 如图 1 所示.

实际的励磁系统和 PSS 控制系统的输出往往包含饱和和非线性环节(如图 1). 饱和和非线性环节的特点如图 2 所示, 其数学表达式为

$$\text{sat}_i(\eta) = \begin{cases} \eta & |\eta| \leq \bar{u}_i \\ \bar{u}_i \text{sign}(\eta) & |\eta| > \bar{u}_i \end{cases} \quad (1)$$

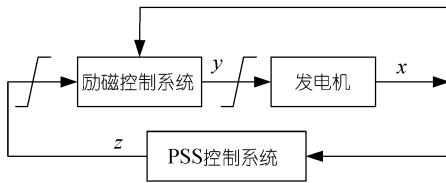


图 1 电力系统控制系统示意图

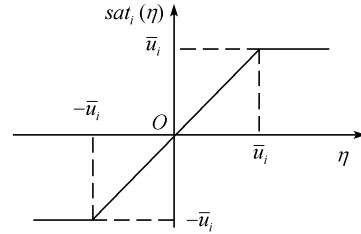


图 2 饱和函数示意图

一般情况下, 由于控制器中高增益和快速响应等因素的影响, 其状态变量的响应速度比发电机的状态变量快的多. 因此, 考虑饱和后, 用于分析闭环电力系统小干扰稳定的模型可表示为^[24]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y} + \mathbf{A}_3 \mathbf{z} + \mathbf{B}_1 \text{sat}(\mathbf{K}_1 \mathbf{y}), \quad (2)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x} + \mathbf{A}_{22} \mathbf{y} + \mathbf{A}_{23} \mathbf{z} + \mathbf{B}_2 \text{sat}(\mathbf{K}_2 \mathbf{z}), \quad (3)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{31} \mathbf{x} + \mathbf{A}_{33} \mathbf{z}, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{x} \in R^{n_1}$, $\mathbf{y} \in R^{n_2}$ 和 $\mathbf{z} \in R^{n_3}$ 分别为发电机状态变量, 励磁系统状态变量和 PSS 状态变量; $\varepsilon \in R^+$ 是引入的小参数, 为了表示控制系统状态量的衰减速度比发电机状态量衰减速度快得

多; $\text{sat}(\cdot)$ 的表达式为 $\text{sat}(\eta) = [\text{sat}_1(\eta_1), \text{sat}_2(\eta_2), \dots, \text{sat}_s(\eta_s)]^T$.

进一步, 令

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon A_{11} & \varepsilon A_{12} & \varepsilon A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

系统(2)~(4)式可记为如下的紧凑形式:

$$\dot{\xi} = A\xi + B\text{sat}(K\xi). \quad (7)$$

定义集合 F 和系统(7)式的稳定域 Ω 分别为

$$F = \{\xi \mid -\bar{u} \leq K\xi \leq \bar{u}\}, \quad (8)$$

$$\Omega = \{\xi \mid \varphi_t(\xi) \rightarrow 0\}, \quad (9)$$

其中, 向量 $\bar{u}$ 的第 i 个分量 $\bar{u}_i$ 是函数 $\text{sat}_i(\cdot)$ 的饱和上界, $i = 1, 2, \dots, m$; $\varphi_t(\xi)$ 表示系统(7)式从状态点 ξ 出发的轨迹, 由于系统(7)式中饱和函数 $\text{sat}(K\xi)$ 是连续的, 故 $\varphi_t(\xi)$ 也是连续的函数^[25].

后面的分析基于下面的假设:

假设 1 对于系统(7)式, 如不考虑饱和时, 原点是双曲稳定的平衡点且集合 F 非空, 即 $A + BK$ 是稳定的矩阵且饱和上界 $\bar{u}_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 成立.

假设 2 矩阵 A_{22} 和 A_{33} 是稳定的(Hurtiwz).

由假设 1, 若考虑饱和因素, 稳定域 Ω 非空但可能仅仅是原点的邻域^[12,25]. 另外, 系统(7)只是在集合 F 中呈现线性系统的特性, 在 F 外很难用解析的方法获得其动态特性. 事实上, 人们往往在忽略饱和因素的情况下设计控制器, 所以实际上设计的 PSS 及励磁控制器的性能比预期的要低. 因此, 考虑饱和因素后分析闭环系统的稳定域十分必要.

1.2 饱和和稳定域估计的传统方法

如果椭球 Ω'_0 是系统(7)式的不变集且是集合 F 的子集, 由于系统(7)式在 F 中的动态特性完全由对应的线性系统来确定, 所以在假设 1 成立的前提下, 从 Ω'_0 出发的轨迹都会收敛到原点^[25], 即 Ω'_0 是系统(7)式稳定域 Ω 的一个子集. 因此, 在集合 F 中寻找系统(7)式的一个不变集可以作为其稳定域的估计, 这就是文献[12, 16]的基本思想.

进一步假设电力系统受扰动后状态变量的预想初值集合可包含于如下的椭球中:

$$X_0 = \{\xi \mid \xi^T P'_0 \xi \leq \beta^2\}, \quad (10)$$

其中, P'_0 是一个已知的正定或者半正定的对称矩阵, $\beta > 0$ 是个可变的参数.

注 1 对于电力系统的小干扰稳定模型, 虽然我们不能完全确定受扰动后系统的初始状态, 但是可以获得受扰后状态所构成集合(预想的初值集合)的大概形状; 又因为 X_0 是一个形状固定、半径可变的椭球, 所以对于此预想的初值集合, 总是能用半径足够大的 X_0 来包含, 因此,

我们考虑电力系统受扰动后状态变量的预想初值集合可用椭球 X_0 来包围的假设是合理的.

显然, 当估计的稳定域所能包含的 X_0 越大, 那么估计的稳定域所能包含预想的初始状态也越多, 这就说明了控制系统镇定干扰的能力也越强; 反之, 如果稳定域包含半径较小的 X_0 , 那么控制系统镇定干扰的能力也越弱. 因此, 为更加客观的反应控制系统的控制性能, 必须尽量减少稳定域估计的保守性, 使得估计的稳定域能包含尽可能大的 X_0 (尽可能大的预想初值集合), 即获得 β 的最大值. 基于此思想, 文献[12, 17]进一步将此过程转化为如下的优化问题:

$$\begin{aligned} \beta^* &= \max_{P>0} \beta, \\ \text{s.t. } &\text{a) } X_0 \subset \Omega'_0 = \{\xi \mid \xi^T P \xi \leq c\}, \\ &\text{b) } \Omega'_0 \subset F, \\ &\text{c) } A^T P + P A < 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中, 约束a)表示预想的初值集合 X_0 包含于估计的稳定域 Ω'_0 ; 约束b)和c)表示估计的稳定域 Ω'_0 是系统(7)式在集合 F 中的不变集.

利用矩阵 Schur 补性质可将上述问题变为简单的 LMI 优化问题^[12,17], 且其解 $\Omega'_0 = \{\xi \mid \xi^T P \xi \leq c\}$ 包含一个形状固定半径最大的椭球 X_0 , 是稳定域估计的最优结果.

2 奇异饱和系统的降阶理论

在电力系统中, 由于小参数的存在, 系统的状态变量可分为快变量和慢变量, 系统矩阵 A 表现出来的特征有两组大小差别很大的特征根. 因此, 系统(7)式本质上是奇异的. 此时若直接利用文献[12, 17]中传统的方法估计稳定域, 即求解问题(11)式, 结果保守且计算量大. 为此, 本节将针对状态变量衰减速度差别大的特点, 利用奇异摄动方法对优化问题(11)式的稳定域估计方法进行降阶处理.

2.1 奇异饱和中的积分流形理论

设矩阵 $L_y(\varepsilon)$ 和 $L_z(\varepsilon)$ 满足

$$\begin{cases} \Gamma_1 = A_{21} + A_{22}L_y + (A_{23} + B_2K_2)L_z - \varepsilon L_y A_x = 0, \\ \Gamma_2 = A_{31} + A_{33}L_z - \varepsilon L_z A_x = 0, \end{cases} \quad (12)$$

式中, $A_x = A_{11} + A_{12}L_y + A_{13}L_z + B_1K_1L_y$.

显然, Γ_1 和 Γ_2 都是 L_y 和 L_z 的光滑函数. 由假设 2, $\frac{\partial(\Gamma_1, \Gamma_2)}{\partial(L_y, L_z)} \Big|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} + B_2K_2 \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}^T$ 非奇

异, 所以由隐函数定理^[25]: 存在 $\varepsilon^* > 0$, 对 $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, 满足式(12)式的矩阵 $L_y(\varepsilon)$ 和 $L_z(\varepsilon)$ 唯一存在且是 ε 的光滑函数. 此时, 作如下的坐标变换:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -L_y & I & 0 \\ -L_z & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

考虑到 $L_y(\varepsilon)$ 和 $L_z(\varepsilon)$ 满足(12)式, 所以在新坐标系下系统(2)~(4)式的状态方程可记为

$$\dot{\mathbf{x}} = (A_{11} + A_{12}L_y + A_{13}L_z + B_1K_1L_y)\mathbf{x} + A_{12}\mathbf{y}_1 + A_{13}\mathbf{z}_1 + B_1\mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1), \quad (14)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{y}}_1 = A_{22}\mathbf{y}_1 + A_{23}\mathbf{z}_1 + B_2\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1) - \varepsilon L_y B_1\mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1), \quad (15)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}}_1 = A_{33}\mathbf{z}_1 - \varepsilon L_z B_1\mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1), \quad (16)$$

式中, $\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1) = \text{sat}(K_2\mathbf{z}_1 + K_2L_z\mathbf{x}) - K_2L_z\mathbf{x}$; $\mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) = \text{sat}(K_1\mathbf{y}_1 + K_1L_y\mathbf{x}) - K_1L_y\mathbf{x}$. 记系统(14)~(16)式轨迹中的 $\mathbf{x}$ 分量为 $\mathbf{x}(t)$. 实际上, $\mathbf{x}(t)$ 也与参数 ε 相关, 本文为了记号的简单, 在不引起混淆的前提下省略了 ε .

在奇异摄动理论中, 系统(15)~(16)式为边界层系统^[25], $\mathbf{y} = L_y\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}_1 = 0$)和 $\mathbf{z} = L_z\mathbf{x}$ ($\mathbf{z}_1 = 0$) 为系统(2)~(4)式的积分流形. 我们可以发现, $\mathbf{x}$ 的时间尺度为 t , 而 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{z}_1$ 的时间尺度为 $\tau = t/\varepsilon$, 所以当 ε 很小时, $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{z}_1$ 的衰减速度比 $\mathbf{x}$ 快得多, 故 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{z}_1$ 被称为快变量, 而 $\mathbf{x}$ 被称为慢变量. 再定义如下集合:

$$F_2(\varepsilon) = \left\{ \mathbf{x} \mid -\bar{u} \leq \begin{bmatrix} K_1L_y(\varepsilon) \\ K_2L_z(\varepsilon) \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \bar{u} \right\}. \quad (17)$$

关于系统(2)~(4)式的积分流形有如下的性质^[26].

引理 1^[26] 如果下面的条件成立:

- 1) 假设 1 和假设 2 成立;
- 2) 参数 $\varepsilon > 0$ 足够小且 $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 对 $\forall t \geq 0$ 都成立.

那么系统(15)~(16)式的轨迹指数收敛且时间尺度为 $\tau = t/\varepsilon$, 即对任意初值 $\mathbf{y}_1^0$ 和 $\mathbf{z}_1^0$, 满足

$$\|\mathbf{y}_1(t)\| \leq l e^{-\gamma_1 t/\varepsilon}, \quad \|\mathbf{z}_1(t)\| \leq l e^{-\gamma_1 t/\varepsilon}, \quad \forall t \geq 0, \quad (18)$$

其中, l 和 γ_1 都为大于零且与 ε 无关的常数.

证明: 见文献[26].

注 2 如后文的分析, 只要初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 满足一定的条件, 那么引理 1 中的条件 2) 成立.

引理 1 说明, 如果假设 1 和假设 2 成立, 此时只要参数 ε 足够小, 那么高维系统(2)~(4)式的积分流形在集合 F_2 中不仅唯一存在, 而且快变量 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 以时间尺度 $\tau = t/\varepsilon$ 指数收敛到其积分流形.

2.2 稳定域估计的降阶理论基础

定义如下的低维系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = A_x(\varepsilon)\mathbf{x}, \quad (19)$$

其中, $A_x(\varepsilon) = A_{11} + (A_{12} + B_1K_1)L_y(\varepsilon) + A_{13}L_z(\varepsilon)$.

下面引理说明 ε 足够小时 A_x 是稳定的矩阵.

引理 2^[26] 如果假设 1 和假设 2 成立, 那么存在 $\varepsilon^* > 0$, 当 $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ 时, 矩阵 A_x 是稳定的.

证明: 见文献[26].

记低维系统(19)式轨迹为 $\mathbf{x}_l(t)$, 由引理 1 和引理 2 可得如下关于 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{x}_l(t)$ 的结论.

定理 1^[26] 假设下面的条件成立:

- 1) 假设 1 和假设 2 成立;
- 2) 低维系统(19)式与高维系统(14)~(16)式的初始状态满足 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}^0$;
- 3) 参数 $\varepsilon > 0$ 足够小且 $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 对 $\forall t \geq 0$ 都成立.

那么 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{x}_l(t)$ 满足

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + O(\varepsilon), \quad \forall t \geq 0, \quad (20)$$

且当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_l(t)$.

特别地, 如果条件 3) 变为: $\varepsilon > 0$ 足够小且存在 $t' > 0$, 使得 $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 对 $\forall t \in [0, t']$ 成立, 那么

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + O(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, t']. \quad (21)$$

证明: 见文献[26].

为将定理 1 和引理 1 中条件(如果 $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 对 $\forall t \geq 0$ 都成立)转化为系统(19)式的初值 $\mathbf{x}_l(0)$ 所满足的条件, 再定义如下集合:

$$F_3(\varepsilon) = \left\{ \mathbf{x} \left| -\sigma \bar{u} \leq \begin{bmatrix} K_1 L_y(\varepsilon) \\ K_2 L_z(\varepsilon) \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \sigma \bar{u} \right. \right\}, \quad (22)$$

其中, $0 < \sigma < 1$ 为经验值, 如可取 $\sigma = 0.95$.

定理 1 说明, 当 ε 足够小时, 如果轨迹 $\mathbf{x}_l(t) \in F_3$ 对 $\forall t \geq 0$ 恒成立, 由于 $\mathbf{x}_l(t)$ 和 $\mathbf{x}(t)$ 之间的误差可足够小, 故 $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 也恒成立. 如下的引理说明此结论是成立的.

引理 3 如果下面的条件成立:

- 1) 假设 1 和假设 2 成立;
- 2) 初始状态满足 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}^0$;
- 3) 参数 $\varepsilon > 0$ 足够小且对 $\forall t \geq 0$ 满足 $\mathbf{x}_l(t) \in F_3$.

那么系统(14)~(16)式的轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 不超出 F_2 .

证明: 用反证法, 假设存在某个 $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, 使得 $\mathbf{x}_l(t) \in F_3$ 恒成立但 $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 不恒成立, 其中, ε^* 是一个足够小的正数, 大小由后文确定.

因为 $\mathbf{x}(0) \in F_2$, 所以由 F_2 的定义以及 $\mathbf{x}(t)$ 对 t 的连续性, 存在 $t' > 0$ 使得 $\mathbf{x}(t')$ 首次穿越 F_2 的边界 ∂F_2 , 即 $\mathbf{x}(t') \in \partial F_2$, 且当 $t \leq t'$ 时 $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 成立, 故由定理 1, 存在与 ε 无关的正常数 a_0 满足

$$\|\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}_l(t')\| \leq a_0 \varepsilon. \quad (23)$$

另一方面, 因为 $\mathbf{x}(t') \in \partial F_2$, 所以存在下标 i 使得 $|(K_1 L_y(\varepsilon) \mathbf{x}(t'))_i| = \bar{u}_i$ 或 $|(K_1 L_z(\varepsilon) \mathbf{x}(t'))_i| = \bar{u}_i$ 成立 (F_2 的定义), 其中, 符号 $(\cdot)_i$ 表示取第 i 个分量.

因为 $\mathbf{x}_l(t') \in F_3$ 成立, 故 $|(K_1 L_y(\varepsilon) \mathbf{x}(t'))_i| \leq \sigma \bar{u}_i$ 和 $|(K_1 L_z(\varepsilon) \mathbf{x}(t'))_i| \leq \sigma \bar{u}_i$ 都成立.

因此, 当 $|(K_1 L_y(\varepsilon) \mathbf{x}(t'))_i| = \bar{u}_i$ 时,

$$\begin{aligned} \|(K_1 L_y(\varepsilon))_i\| \cdot \|\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}_l(t')\| &\geq |(K_1 L_y(\varepsilon) \mathbf{x}(t'))_i - (K_1 L_y(\varepsilon))_i \mathbf{x}_l(t')| \\ &\geq |(K_1 L_y(\varepsilon) \mathbf{x}(t'))_i| - |(K_1 L_y(\varepsilon) \mathbf{x}_l(t'))_i| \\ &\geq (1 - \sigma) \bar{u}_i. \end{aligned} \quad (24)$$

因为 $L_y(\varepsilon)$ 是 ε 的连续函数, 所以当 $\varepsilon \in [0, \varepsilon']$ 时, $\|(K_1 L_y(\varepsilon))_i\| \leq b_0$, 其中 b_0 是与 ε 无关的正

常数, $\varepsilon' > 0$ 是足够小的正数. 从而由(24)式可得

$$\|\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}_l(t')\| \geq b_0^{-1}(1 - \sigma)\bar{u}_i. \quad (25)$$

同理, 当 $|(K_1 L_z(\varepsilon)\mathbf{x}(t'))_i| = \bar{u}_i$ 成立时, 同样可得 $\|\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}_l(t')\| \geq b_0^{-1}(1 - \sigma)\bar{u}_i$.

综上, 令 ε^* 满足 $\varepsilon^* \leq \min\{a_0^{-1}b_0^{-1}(1 - \sigma)\bar{u}_i, \varepsilon'\}$. 此时, (23)式与(25)式相矛盾. 因此, 当 $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ 时(ε 足够小时), $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 也恒成立.

引理 3 说明, 当 ε 足够小时, 对于定理 1 所要求的条件($\mathbf{x}(t) \in F_2$ 对 $\forall t \geq 0$ 恒成立), 我们只需保证系统(19)式的轨迹不逃出集合 F_3 即可. 又因为 ε 足够小时, 引理 2 可保证系统(19)式在集合 F_3 中存在不变集 Ω_0 , 即如果 $\mathbf{x}_l(0) \in \Omega_0$, 那么 $\mathbf{x}_l(t) \in F_3$, 所以定理 1 所要求的条件确实能够满足. 在此基础上, 我们还可得如下的结论.

定理 2 如果下面的条件成立:

- 1) 假设 1 和 2 都成立;
- 2) 经验常数 $\sigma \in (0, 1)$ 是确定的;
- 3) 对于低维系统(19), $\Omega_0 \subset F_3$ 是不变集.

那么存在 $\varepsilon^* > 0$, 使得对 $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, 积集合 $\bar{\Omega} = \Omega_0 \times \Omega_{yz}$ 是系统(14)~(16)式稳定域的子集. 其中, Ω_{yz} 是 $n_2 + n_3$ 维欧氏空间中足够大的有界集合.

证明: 对于系统(19), 因为 $\Omega_0 \subset F_3$ 是此系统的不变集, 又因为当 ε 足够小时 A_x 是稳定的矩阵(引理 2), 所以不变集 Ω_0 是系统(19)稳定域的子集^[12], 即 $\forall \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_l(0) \in \Omega_0$, $\mathbf{x}_l(t) \in \Omega_0 \subset F_3$ 对 $\forall t \geq 0$ 恒成立, 且 $\mathbf{x}_l(t) \rightarrow 0$, 因此, 对 $\forall \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(0) \in \Omega_0$, 当 ε 足够小时, $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 对 $\forall t \geq 0$ 也恒成立(引理 3)从而当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_l(t)$ 成立(定理 1), 因此, 当 ε 足够小时, 系统(14)~(16)式的轨迹 $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$.

因为当 ε 足够小时, $\mathbf{x}(t) \in F_2$ 恒成立(引理 3), 再由引理 1 得, 对 $\forall (\mathbf{y}_1^0, \mathbf{z}_1^0) \in \Omega_{yz}$, 系统(15)~(16)式的轨迹满足 $(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{z}_1(t)) \rightarrow (0, 0)$.

综上, 当 ε 足够小时, 对 $\forall (\mathbf{x}^0, \mathbf{y}_1^0, \mathbf{z}_1^0) \in \Omega_0 \times \Omega_{yz}$, 系统(14)~(16)式的轨迹 $[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}_1(t), \mathbf{z}_1(t)]$ 将收敛到原点, 即存在 $\varepsilon^* > 0$, 当 $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ 时, $\bar{\Omega} = \Omega_0 \times \Omega_{yz}$ 是系统(14)~(16)式稳定域的子集.

由此定理可得, 当 ε 很小时, 如果 $\Omega_0 \subset F_3$ 是系统(19)式的不变集, 那么 $\bar{\Omega} = \Omega_0 \times \Omega_{yz}$ 是系统(14)~(16)式稳定域的子集, 故估计高维系统(14)~(16)式稳定域的问题就可以转化为系统(19)式在集合 F_3 中寻找一个不变集 Ω_0 . 又由引理 2 可得假设 1 成立, 因此, 转化后的问题就是文献[12]和[17]讨论的问题: 利用 LMI 优化方法寻找一个不变集.

2.3 初值集合的降阶理论

考虑到系统(2)~(4)式的初始状态包含在如下 $n_1 + n_2 + n_3$ 维的椭球中((10)式):

$$X_0 = \{\xi \in R^{n_1+n_2+n_3} \mid \xi^T P_0' \xi \leq \beta^2\}. \quad (26)$$

再作如下的变量代换:

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = [y_1^T, z_1^T]^T, \quad L_{yz} = [L_y^T, L_z^T]^T. \quad (27)$$

综合(10), (13)式以及(27)式, 在坐标 (ξ_1, ξ_2) 下 X_0 可表示为

$$X_0 = \left\{ \xi' \mid \xi'^T P_0 \xi' \leq \beta^2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \leq \beta^2 \right\}, \quad (28)$$

$$\text{其中, } \xi' = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad P_0' = \begin{bmatrix} P_{11}^{0'} & P_{12}^{0'} \\ P_{21}^{0'} & P_{22}^{0'} \end{bmatrix},$$

$$P_{11}^0 = P_{11}^{0'} + 2P_{12}^{0'} L_{yz} + L_{yz}^T P_{22}^{0'} L_{yz}, \quad P_{22}^0 = P_{22}^{0'}, \quad P_{12}^0 = (P_{21}^{0'})^T = P_{12}^{0'} + L_{yz}^T P_{22}^{0'}.$$

由上节的结论, 估计高维系统(14)~(16)式稳定域的问题可以转化为: 系统(19)式在集合 F_3 中寻找一个不变集 Ω_0 . 为此, 类似文献[12, 17]中的方法, 建立如下的优化模型可得到稳定域的最优估计:

$$\begin{aligned} \beta^* &= \max_{P_x > 0} \beta, \\ \text{s.t. a) } &X_0 \subset \Omega_0 \times \Omega_{yz} = \{x \mid x^T P_x x \leq c\} \times \Omega_{yz}, \\ \text{b) } &\Omega_0 \subset F_3, \\ \text{c) } &A_x^T P_x + P_x A_x < 0, \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $\Omega_{yz} \in R^{n_2+n_3}$ 是足够大的有界集; 约束a)表示估计的稳定域包含预想的初值集合; 约束b)和c)表示估计的稳定域 Ω_0 是 F_3 中的不变集.

在优化(29)式中, 约束a)仍然涉及高维的不等式, 为此引入用下面的引理简化此不等式.

引理 4^[26] 设椭球 $E(P, \rho)$ 可表示为

$$E(P, \rho) = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \mid \left\| \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \right\| \leq \rho \right\}.$$

记它在平面 ξ_1 中的投影为 $E_{\xi_1}(P, \rho)$, 那么如下结论成立:

(i) $E_{\xi_1}(P, \rho)$ 仍然是椭球且可表示为

$$E_{\xi_1} = \left\{ \xi_1 \mid \xi_1^T (P_{11} - P_{12}^T P_{22}^{-1} P_{12}) \xi_1 \leq \rho \right\};$$

(ii) $E(P, \rho) \subset E(P_1, \rho_1) \times \Omega_{\xi_2}$ 成立等价于 ξ_2 有界且 $E_{\xi_1}(P, \rho) \subset E_{\xi_1}(P_1, \rho_1)$ 成立, 其中, $E(P_1, \rho_1)$ 和 ξ_1 的维数相等, Ω_{ξ_2} 是足够大的有界集合.

证明: 见文献[26].

由引理 4, 优化(29)式中约束a)可变为

$$X_0 \subset \Omega_0 \times \Omega_{yz} \Leftrightarrow E_{\xi_1}(P_1^0, \beta) \subset \Omega_0 \Leftrightarrow \beta^{-2} P_1^0 - c^{-1} P_x > 0, \quad (30)$$

其中, $P_1^0 = P_{11}^0 - P_{12}^0 (P_{22}^0)^{-1} P_{21}^0$; 矩阵 P_{11}^0 、 P_{12}^0 和 P_{22}^0 为(28)式中的矩阵 P_0 按 n_1 和 $n_2 + n_3$ 维的分块

$$\text{子矩阵, 即 } P^0 = \begin{bmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

值得一提的是, 如果初始集合不是椭球而是多棱体, 我们也能得到类似引理 4 中的结论.

3 饱和稳定域估计的降阶方法

3.1 稳定域估计的优化降阶模型

综上所述, 当 ε 足够小时, 传统估计饱和稳定域的方法可以简化为如下的降阶优化模型

$$\begin{aligned} \beta_x^* &= \max_{P_x > 0} \beta_x, \\ \text{s.t. a)} \quad & \beta_x^{-2} P_1^0 - c^{-1} P_x > 0, \\ \text{b)} \quad & \mathcal{Q}_0 \subset F_3, \\ \text{c)} \quad & A_x^T P_x + P_x A_x < 0. \end{aligned} \quad (31)$$

作如下变量代换:

$$\gamma_x = \beta_x^{-2}, \quad R_x = c^{-1} P_x. \quad (32)$$

由矩阵Schur性质和(32)式可得, 优化(31)式可等价变换为如下的优化问题求解^[12,17]:

$$\begin{aligned} \gamma_x^* &= \min_{R_x > 0} \gamma_x, \\ \text{s.t. a)} \quad & \gamma_x P_1^0 - R_x > 0, \\ \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} \sigma \bar{u}_i & g_i \\ g_i^T & R_x \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \sigma^2 \bar{u}_i^2 - g_i R_x^{-1} g_i^T \geq 0, \\ \text{c)} \quad & R_x A_x^T + A_x R_x < 0, \end{aligned} \quad (33)$$

其中, g_i 为集合 $F_3(F_2)$ 的定义中矩阵 $\begin{bmatrix} K_1 L_y(\varepsilon) \\ K_2 L_z(\varepsilon) \end{bmatrix}$ 的第 i 行行向量.

注 3 (i) 经过降阶后, 优化问题的复杂度被降低, 从原来求解一个 $n_1 + n_2 + n_3$ 维的优化问题转化为一个 n_1 维的优化问题, 从而减少了计算量; (ii) 矩阵 A_x 是经过快慢流形解耦后的子系统矩阵, 小参数 ε 被剔除, 所以降阶方法克服了高维系统矩阵的奇异性; (iii) 由于降阶系统的稳定域估计结果无需考虑快变量 y_1 和 z_1 , 即估计的稳定域包含了任意有界的 y_1 和 z_1 分量, 但基于高维系统的稳定域估计方法则没有此结论. 因此, 降阶方法还可以减少稳定域估计结果的保守程度.

此外, 在优化问题(31)式中, 集合 F_3 中经验系数 σ 的选择对结果会产生影响, 而且在实际系统中小参数 ε 并不是任意小, 可能要通过调整参数 σ 的大小使得满足引理 3 和定理 2 的条件. 但是调整 σ 后优化问题(33)式又要重新计算, 这势必带来了多余的计算量. 幸运的是, 当 $\sigma > 0$ 时, 我们可以得到关于优化问题(31)式的一个重要结论.

引理 5^[26] 对于优化问题(31)式, 最优解 β_x^* 和集合 F_3 中的经验常数 σ 成线性关系, 即当 $\sigma' = \rho\sigma$ 时, 对应的最优解满足 $\beta_x'^* = \rho\beta_x^*$, 其中 $\rho > 0$.

证明: 见文献[26].

此引理说明 β^* 和 σ 呈线性的关系, 所以在计算优化问题(31)式时可随意选择 $\sigma > 0$ 的值, 只需利用线性关系就可直接得到不同的 σ 值对应的最优值 β^* , 而无需重复计算.

3.2 稳定域估计的降阶算法

由前面的分析, 如果求出矩阵 L_y 和 L_z 后, 通过解(31)式很容易得到对应原来的高维系统 β 的最优值. 然而, 当小参数 ε 足够小时, 虽然由2.1节中的分析可保证 $L_y(\varepsilon)$ 和 $L_z(\varepsilon)$ 都惟一存在, 但其解析表达式很难直接求取. 考虑到 $L_y(\varepsilon)$ 和 $L_z(\varepsilon)$ 都是 ε 的光滑函数, 为此利用泰勒级数, 令

$$\begin{cases} L_y(\varepsilon) = L_y^0 + L_y^1 \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ L_z(\varepsilon) = L_z^0 + L_z^1 \varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (34)$$

将(34)式代入(12)式, 比较等式两端 ε 的各阶次的系数, 得

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad & A_{21} + A_{22}L_y^0 + (A_{23} + B_2K_2)L_z^0 = 0, \\ & A_{31} + A_{33}L_z^0 = 0, \\ \varepsilon^1: \quad & A_{22}L_y^1 + (A_{23} + B_2K_2)L_z^1 - L_y^0C_0 = 0, \\ & A_{31} + A_{33}L_z^1 - L_z^0C_0 = 0, \end{aligned}$$

式中, $C_0 = A_{11} + A_{13}L_z^0 + (A_{12} + B_1K_1)L_y^0$.

解上面的方程, 得

$$L_z^0 = -A_{33}^{-1}A_{31}, \quad L_z^1 = A_{33}^{-1}(L_z^0C_0 - A_{31}), \quad (35)$$

$$L_y^0 = A_{22}^{-1}(A_{23} + B_2K_2)A_{33}^{-1}A_{31} - A_{22}^{-1}A_{21}, \quad (36)$$

$$L_y^1 = -A_{22}^{-1}(A_{23} + B_2K_2)L_z^1 + A_{22}^{-1}L_y^0C_0. \quad (37)$$

所以, 由(35)~(37)式能得到积分流形的一阶近似解. 当然, 为了提高精度, 可以将(34)式展开为 ε 的更高次项, 得到高阶近似解.

至此, 稳定域估计的降阶方法所需要的变量已经全部求出. 总结上面的分析, 当 ε 足够小时, 传统稳定域估计算法可以利用更简单的降阶方法来实现, 其步骤为(算法1)

- (i) 选择快慢变量, 并建立(2)~(4)式的模型;
- (ii) 判断假设1和2是否成立, 成立则利用降阶方法估计稳定域, 否则利用传统的估计方法来估计高阶系统的稳定域;
- (iii) 利用(36)~(37)式计算积分流形, 从而可得 $L_y(\varepsilon)$ 和 $L_z(\varepsilon)$;
- (iv) 建立(31)式的优化模型, 并作(32)式的变量代换, 然后将优化(31)式转化为简单的LMI凸优化问题求解得 β_x^* 和对应的稳定域.

4 应用于电力系统

本节将前面的饱和稳定域的估计方法应用于含饱和 PSS 控制器的电力系统中, 并在此基础上分析系统的小干扰稳定性及饱和 PSS 控制器性能.

4.1 含扰动和饱和特性的 PSS 模型

电力系统由 N 节点和 ng 台发电机组成, 其中第 ng 台发电机为参考机. 不失一般性, 为了简化后文记号, 按惯性时间常数 H_i 减小的顺序将发电机编号为 $1, 2, \dots, ng$, 即当 $i < j$ 时,

$$H_i \geq H_j.$$

与传统稳定域估计方法比较, 元件都采用文献[17]的模型. 具体为, 发电机采用三阶实用模型, 励磁系统和 PSS 系统的模型分别如图 3 和 4 所示; 网络为线性网络, 负荷为恒阻抗模型.

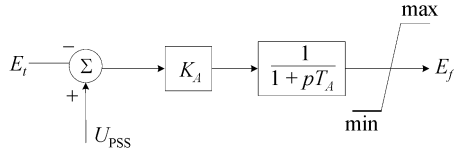


图 3 发电机励磁模型

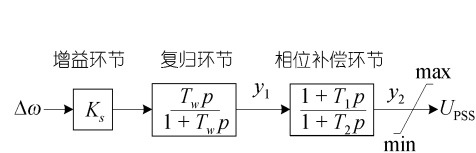


图 4 PSS 传递函数框图

模型中考虑的饱和约束为

(i) 发电机励磁输出电压 ΔE_f 的饱和约束;

(ii) PSS 输出 y_2 的饱和约束.

即饱和的约束方程为

$$-\Delta \bar{E}_f \leq \Delta E_f \leq \Delta \bar{E}_f, \quad -\bar{y}_2 \leq y_2 \leq \bar{y}_2. \quad (38)$$

因此, 考虑饱和后闭环系统可表示为^[17,24]

$$\Delta \dot{\delta} = \Delta \omega, \quad (39)$$

$$\omega_0^{-1} M \Delta \dot{\omega} = -K_1 \Delta \delta - D \omega_0^{-1} \Delta \omega - K_2 \Delta E'_q, \quad (40)$$

$$T'_{do} \Delta \dot{E}'_q = -K_4 \Delta \delta - K_3 \Delta E'_q + \text{sat}(\Delta E_f), \quad (41)$$

$$T_A \Delta \dot{E}_f = -K_A K_5 \Delta \delta - K_A K_6 \Delta E'_q - \Delta E_f + K_A \text{sat}(y_2), \quad (42)$$

$$T_w \dot{y}_1 = -K_w K_1 \Delta \delta - K_w D \omega_0^{-1} \Delta \omega - K_w K_2 \Delta E'_q - y_1, \quad (43)$$

$$T_2 \dot{y}_2 = -K_{TM} K_1 \Delta \delta - K_{TM} \omega_0^{-1} D \Delta \omega - K_{TM} K_2 \Delta E'_q + (I - T_1 T_w^{-1}) y_1 - y_2, \quad (44)$$

其中, (38)~(41)式表示发电机三阶模型, (41)式是励磁系统的状态方程, (43)~(44)式是PSS系统的状态方程; $K_{TM} = \text{diag}\{T_{li} K_{si} / M_i\}$, $M = \text{diag}\{2H_i\}$, $\omega_0 = 2\pi f$, $K_w = \text{diag}\{T_{wi} K_{si} / M_i\}$, 其他变量的物理意义可见文献[24].

在电力系统中, 励磁参数 T_A 很小而 K_A 很大, PSS的参数中 T_2 比 T_w 小很多. 根据典型参数 (见附录), 再比较(39)~(44)式中的时间常数可得: 变量 ΔE_f 和 y_2 可归类为快变量, 变量 y_1 、 $\Delta E'_q$ 和 $\Delta \delta$ 可归为慢变量. 又因 $M_i = 2H_i$, 所以如果 H_i 不是非常大时, $\Delta \omega_i$ 可作为快变量, 但当 H_i 较大时, 变量 $\Delta \omega_i$ 和 $y_{1(i)}$ 都要归为慢变量. 为了推导简单, 下面将 $\Delta \omega$ 统一作为慢变量处理. 记

$$\mathbf{x} = [\Delta \delta^T \Delta \omega^T \Delta E'_q{}^T y_1^T]^T, \quad \mathbf{y} = \Delta E_f, \quad \mathbf{z} = y_2, \quad (45)$$

将(45)式代入(39)~(44)式, 系统方程可变为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \text{sat}(\mathbf{y}), \quad (46)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{A}_{22} \mathbf{y} + \mathbf{B}_2 \text{sat}(\mathbf{z}), \quad (47)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{31} \mathbf{x} + \mathbf{A}_{33} \mathbf{z}, \quad (48)$$

其中,

$$\mathbf{A}_{11} = - \begin{bmatrix} 0 & -L & 0 & 0 \\ M^{-1}K_1 & M^{-1}D & M^{-1}K_2 & 0 \\ T_{do}^{-1}K_4 & 0 & T_{do}^{-1}K_3 & 0 \\ M^{-1}K_5K_1 & M^{-1}K_5D & M^{-1}K_5K_2 & T_w^{-1} \end{bmatrix};$$

$$L = [I_{(ng-1, ng-1)} \quad \vdots \quad -\mathbf{e}^T]; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{do}^{-1} & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$\mathbf{A}_{21} = -\varepsilon T_A^{-1} K_A [K_5 \quad 0 \quad K_6 \quad 0]; \quad \mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1];$$

$$\mathbf{A}_{22} = -\varepsilon T_A^{-1}; \quad \mathbf{B}_2 = \varepsilon T_A^{-1} K_A; \quad \mathbf{A}_{33} = -\varepsilon T_2^{-1};$$

$$\mathbf{A}_{31} = -\varepsilon T_2^{-1} \begin{bmatrix} K_{TM}K_1 & K_{TM}D & K_{TM}K_2 & (T_1T_w^{-1} - I) \end{bmatrix}.$$

显然, 经过变换后, 系统(46)~(48)式可变为(2)~(4)式的形式. 又因为 T_{Ai} 、 T_{2i} 和 M_i 都是正数, 故 $\mathbf{A}_{22}$ 和 $\mathbf{A}_{33}$ 都是稳定的矩阵, 即满足假设 2, 从而可以利用降阶方法估计此饱和电力系统的稳定域. 因为小参数 ε 都具有 εT_{Ai}^{-1} 和 εT_{2i}^{-1} 的形式, 所以降阶方法消除了系统(46)~(48)式状态矩阵的奇异性.

注 3 (i) 如果 M_i 较小时, 相应的变量 $\Delta\omega_i$ 要归类为快速变量, 甚至 y_{li} 也要作为快速变量, 由于这两类变量对应的状态方程中不含饱和变量, 此时如果将这两种变量看成变量 $\mathbf{z}$ 的一部分, 那么矩阵 $\mathbf{A}_{33}$ 的结构可表示为

$$\mathbf{A}_{33} = -\varepsilon \begin{bmatrix} (M^{-1}D)_K & & \\ * & (T_w^{-1})_K & \\ * & * & T_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

其中, $(M^{-1}D)_K$ 表示由归类为快变量的发电机变量构成的对角矩阵; (ii) 如果负荷中包含电动机等动态模型, 对应的快变量也能增加到(49)式中. 很容易验证, 重新分类后系统(39)~(44)式仍然可以写成(2)~(4)式的形式, 而且矩阵 $\mathbf{A}_{33}$ 仍然具有(49)式的结构, 因此只要 $D_i > 0$, $\mathbf{A}_{33}$ 也是稳定的矩阵, 所以假设 2 可以满足, 从而不会影响降阶方法的应用.

4.2 算例分析

采用文献[17]中讨论的 3 机 5 节点算例, 如图 5 所示, 具体数据见附录.

4.2.1 降阶模型的校验

选择参数 $\varepsilon = 0.1$ 和 $\sigma = 0.95$, 利用(36)~(37)式可得到降阶模型. 对同一初值, 图 6 给出了降阶前后发电机的功角和角速度的时域仿真曲线, 图 7 给出快变量迅速收敛到其积分流形上的示意图.

由图 6 可发现, 对于功角和角速度这些慢变量, 时域仿真的结果表明降阶前后的误差十分小, 而且随着时间的推移误差越来越小, 此结论和定理 1 的结论一致, 降阶前后轨迹之间只相差一个无穷小量 $O(\varepsilon)$ 的误差, 且当时间趋于无穷时该误差趋于零. 因此, 快速变量对慢变量的影响可以忽略不计, 换句话说, 此测试算例中的小参数 ε 满足定理 1 所需 ε 足够小的条件.

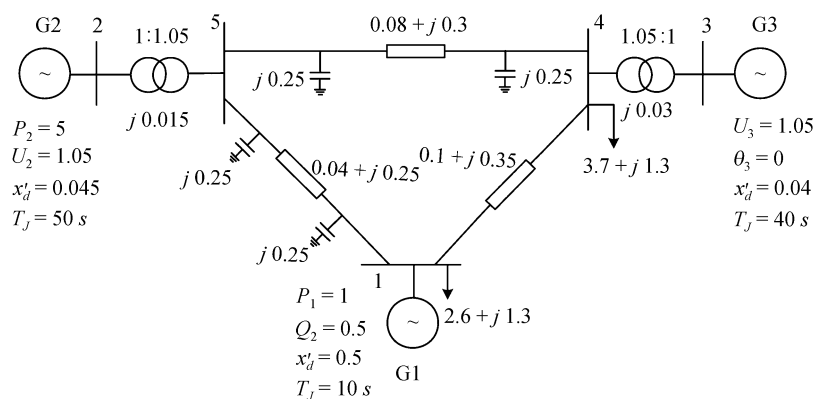


图 5 3 机 5 节点的电力系统

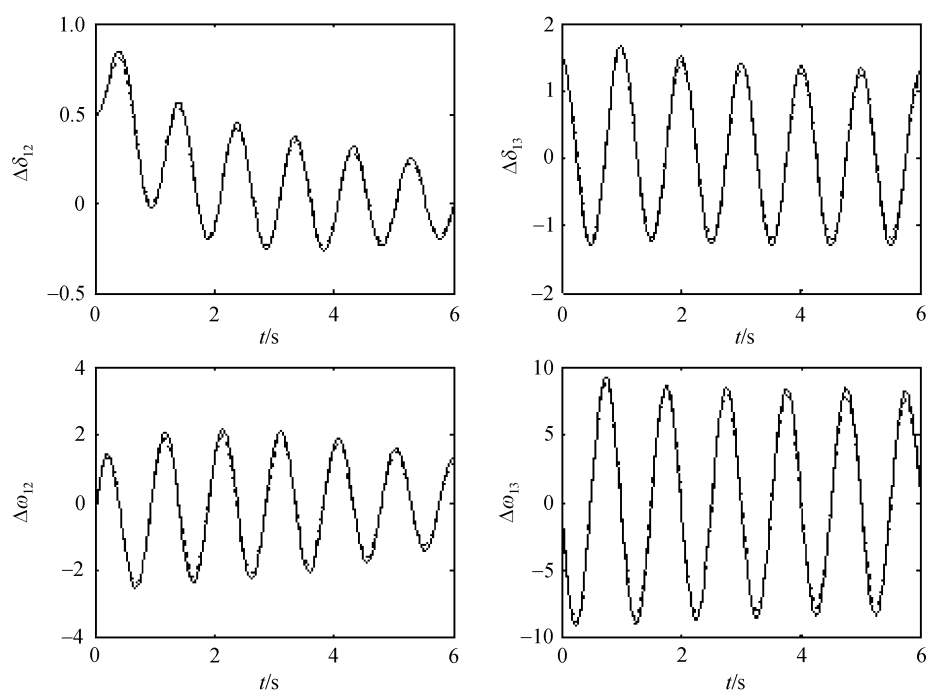


图 6 降阶前后发电机功角和角速度时域仿真图

—— 降阶前轨迹 - - - - - 降阶后轨迹

再观察图 7 还可以发现, 相对于积分流形这种慢变量, 快速变量的变化速度快得多, 在 0.5 s 后快变量基本上完全收敛到其积分流形上, 这和引理 1 的结论完全一致, 快变量全局收敛到其积分流形而且时间尺度为 t/ε . 在统一的时间尺度 t 下, 这种现象表现为对应快变量的特征根的实部比对应慢变量的特征根实部小得多, 如表 1 所示, 其中表 1 给出的是高维系统和降阶系统的特征根.

由表 1 还可看出, 相比高维系统, 降阶系统的特征根分布更均匀, 故降阶方法大大地减弱系统的奇异性. 不仅如此, 由此表我们还能发现, 降阶系统全部保留了高维系统较小的特征根,

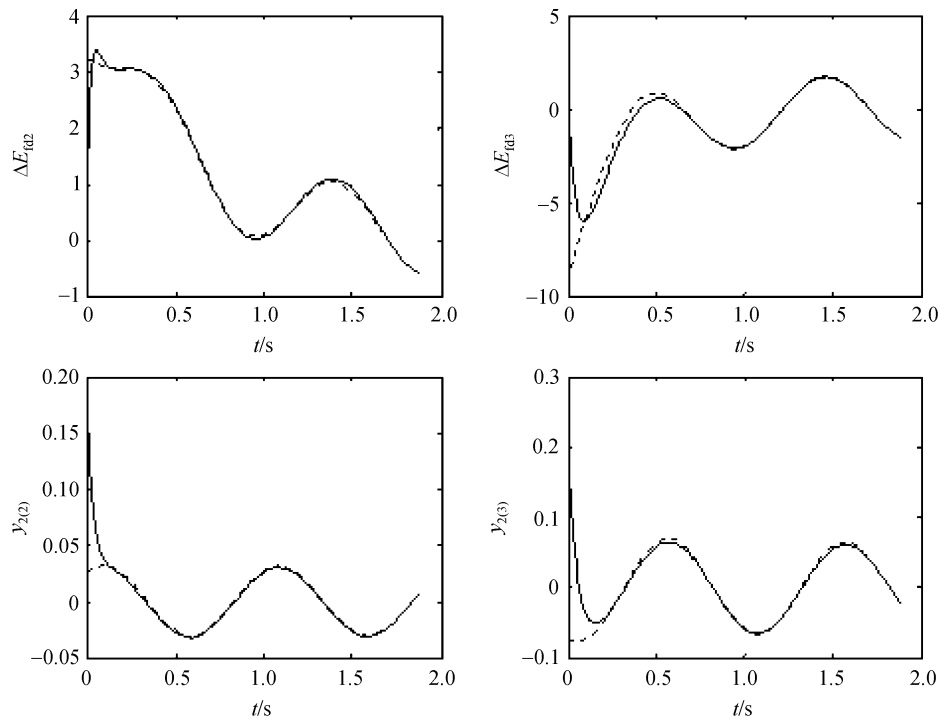


图7 快速变量迅速收敛到积分流形示意图

—— 降阶前轨迹 - - - - 积分流形

表1 模型降阶前后系统矩阵的特征根

降阶前系统的特征根	降阶后系统的特征根
-49.8653, -48.6570, -46.3741, -33.2216, -33.0554, -18.5341	/
-4.8264, -1.8397	-4.6831, -1.8353
-0.6689, -0.3899, -0.1217, -0.1889	-0.6687, -0.3917, -0.1217, -0.1889
-0.0595±6.7262i, -0.1506±6.2715i	-0.0610±6.7269i, -0.1706±6.2615i

而这些小特征根对应的是电力系统的慢振荡模式, 所以降阶方法不会丢失慢变量的振荡模式(发电机的功角和角速度的振荡), 仅仅将全局稳定的快变量剔除, 这也说明了此算例中快慢流形的分类是正确的。

4.2.2 降阶系统稳定域估计的结果

前面的理论分析以及时域仿真都表明, 此算例的降阶模型是正确的, 下面基于降阶模型讨论稳定域估计的结果。

为比较降阶前后稳定域估计的结果, 本文考虑的预想初值集合形状为文献[17]考虑的单位球, 但要注意的是, 本文的参考机是附录中的第1台发电机, 而在文献[17]中是第3台发电机。另外, 本文考虑的角速度 $\Delta\omega$ 是有名值而非标么值。换句话说, 文献[17]中的状态变量为 $\xi' = [\Delta\delta_{13}, \Delta\delta_{23}, \Delta\omega'_{13}, \Delta\omega'_{23}, \dots]^T$, 而本文为 $\xi = [\Delta\delta_{21}, \Delta\delta_{31}, \Delta\omega_{21}, \Delta\omega_{31}, \dots]^T$ 且 $\xi' = H\xi$ 。因此, 本文考虑的预想初始集合为 $\xi^T H^T H \xi \leq 1$, 即(10)式中的常数矩阵 P'_0 满足 $P'_0 = H^T H$ 。其中,

在前面的基础上, 利用引理 4 可得经过降阶后低维系统的初始集合, 再利用 4.2 节中的算法 1 可得优化问题(31)式的最优解为 $\beta_x^* = 7.95 \times 10^{-2}$, 即估计的稳定域最多能包含半径为 7.95% 的球体. 基于高维系统直接计算的结果为 $\beta^* = 8.22 \times 10^{-2}$, 所以基于降阶模型的计算结果误差很小, 而且它们的稳定域在慢状态空间中的投影相差也很小, 如图 8 所示, 其中实线椭圆是基于降阶系统估计的稳定域在相关坐标平面上的投影, 虚线包围的椭圆是基于高维系统估计的稳定域投影.

由图 8 可以发现, 在慢变量 $\Delta\delta$ 和 $\Delta\omega$ 平面上, 降阶前后稳定域的投影变化不大, 但由定理 2 可知, 利用降阶方法所估计的稳定域在快变量状态空间中的投影实质是整个空间, 而利用文献[17]的方法得到的投影仅仅是快变量状态空间中的一个很小的椭圆, 如图 9 所示. 换句话说, 在图 9 中, 椭圆包围的面积是高维系统估计的稳定域在励磁电压 ΔE_f 和 PSS 输出 y_2 轴上的投影图, 而基于降阶系统的稳定域投影是整个坐标平面, 因此, 稳定域估计的降阶方法更符合实际情况.

如果考虑的初始状态集合仅包含快变量而和慢变量无关, 即(10)式中, 常数矩阵 P_0' 的结构具有 $P_0' = \text{diag}\{0, P_{22}^0\}$ 这种特殊形式, 那么由定理 2, 降阶方法估计的稳定域可以包含任意大的预想初值集合, 但传统稳定域估计方法并不能得到此结论. 此结论的物理意义在于, 在特定条件下, 在电力系统稳定运行时, 我们无需关心瞬时干扰量对励磁电压 ΔE_f 和 PSS 输出信号 y_2 这些快变量的影响.

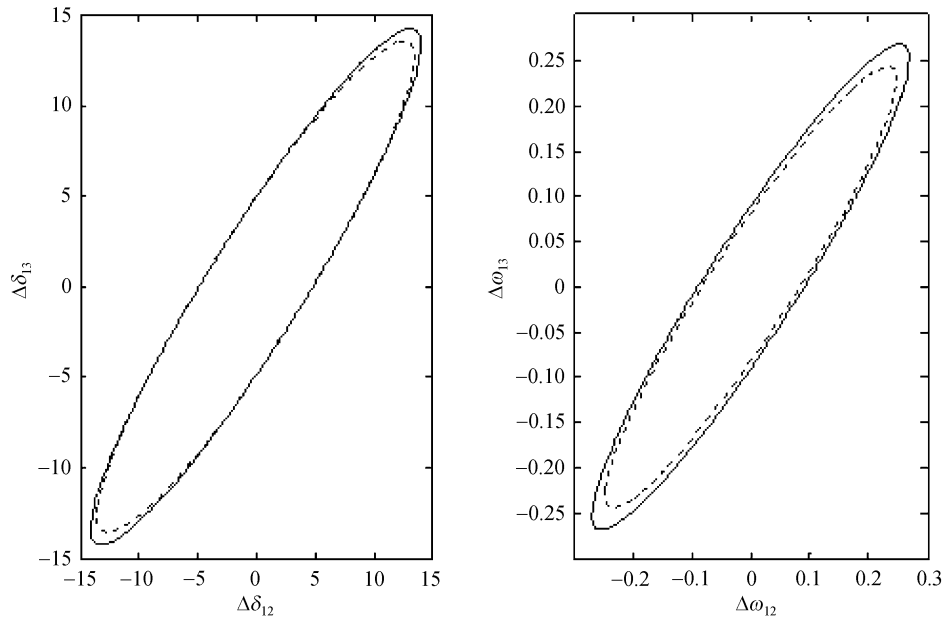


图 8 系统降阶前后稳定域投影图

—— 原始系统的稳定域投影 - - - - - 降阶系统的稳定域投影

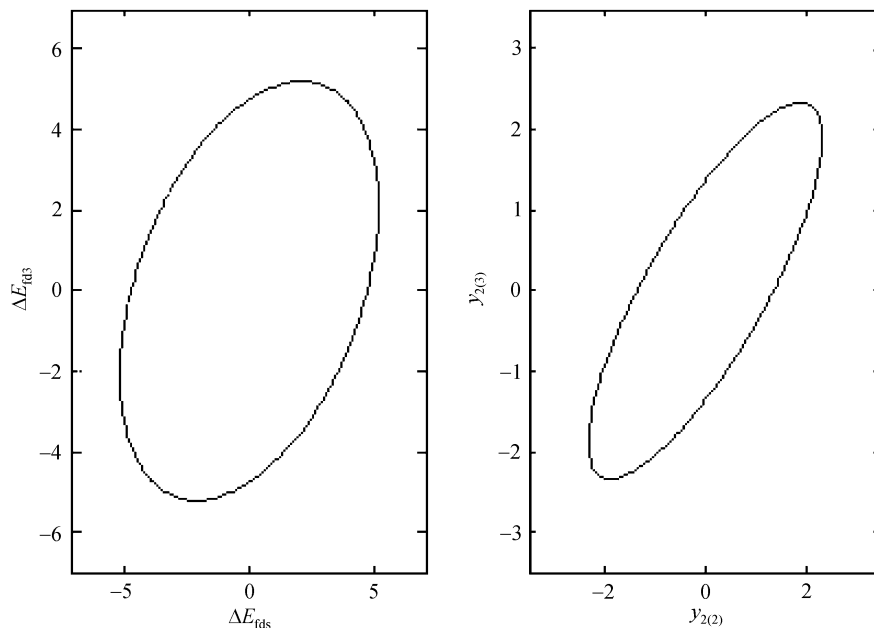


图 9 高阶系统的稳定域在快流形上投影图

5 结论

针对一种奇异的饱和线性系统, 基于奇异摄动理论提出了一种稳定域估计的降阶方法. 当传统的稳定域估计方法处理高维、奇异的系统时, 不可避免地会出现计算量大、奇异和保守等一些困难, 而本方法一定程度上可以解决这些问题. 本文以饱和 PSS 系统为例说明了此降阶方法在电力系统中的应用, 算例仿真验证了方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 Hu T, Lin Z, Chen B M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 2002, 38(2): 351—359[DOI]
- 2 Hindi H, Boyd S. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, New York: Piscataway NJ, 1998. 903—908
- 3 Cao Y, Lin Z, Ward D G. An anti-windup approach to enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation. *IEEE T Automat Contr*, 2002, 47(1): 140—145[DOI]
- 4 Crow M L, Ayyagari J. The effect of excitation limits on voltage stability. *IEEE T Circuits-I*, 1995, 42(12): 1022—1026[DOI]
- 5 Ji W, Venkatasubramanian V. Hard-limit induced chaos in a fundamental power system model. *Int J Elec Power*, 1996, 18(5): 279—295[DOI]
- 6 Escarela-Perez R, Niewierowicz T, Campero-Littlewood E. A study of the variation of synchronous machine parameters due to saturation: a numerical approach. *Electr Pow Syst Res*, 2004, 72(1): 1—11[DOI]
- 7 Xi Z, Feng G, Cheng D, et al. Nonlinear decentralized saturated controller design for power systems. *IEEE T Contr Syst T*, 2003, 11(4): 539—547[DOI]
- 8 Gan D, Qu Z, Cai H. Multi-machine system excitation control via theories of feedback linearization control and nonlinear robust control. *Int J Syst Sci*, 2000, 31(4): 519—527[DOI]
- 9 余贻鑫, 贾宏杰, 王成山. 电力系统中的混沌现象与小扰动稳定域. *中国科学 E 辑, 技术科学*, 2001, 31(5): 431—441
- 10 Rajkumar V, Mohler R R. Nonlinear control methods for power systems: a comparison. *IEEE T Contr Syst T*, 1995, 3(2):

- 231—237[DOI]
- 11 Lu Q, Sun Y Z, Mei S W. Nonlinear Control Approach and Implementation in Power System Dynamics. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 68—76
 - 12 Hu T, Lin Z. Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design. Boston: Birkhauser, 2001. 157—191
 - 13 Dobson I, Lu L. Voltage collapse precipitated by the immediate change in stability when generator reactive power limits are encountered. IEEE T Circuits-I, 1992, 39(9): 762—766[DOI]
 - 14 Gutman P O, Hangander P. A new design of constrained controllers for linear systems. IEEE T Automat Contr, 1985, 30(1): 22—33[DOI]
 - 15 Venkatasubramanian V. Stability boundary analysis of nonlinear dynamics subject to state limits. Proceedings of the 34th Hawaii International Conference on System Science, Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2001. 1—6
 - 16 Hu T S, Lin Z L. Exact characterization of invariant ellipsoids for single input linear systems subject to actuator saturation. IEEE T Automat Contr, 2002, 47(1): 164—169[DOI]
 - 17 Xin H, Gan D, Chung T S, et al. A method for evaluating the performance of PSS with saturated input. Electr Pow Syst Res, 2007, 77(10): 1284—1291[DOI]
 - 18 Tse C T, Wang K W, Chung C Y, et al. Robust PSS design by probabilistic eigenvalue sensitivity analysis. Electr Pow Syst Res, 2001, 59(1): 47—54[DOI]
 - 19 Kokotovic P V, Khalil H K, O'Reilly J. Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. London: Academic Press, 1986. 47—68
 - 20 Singh H, Brown R H, Naidu D S, et al. Robust stability of singularly perturbed state feedback systems using unified approach. IEE P-Contr Theor Ap, 2001, 148(5): 391—396[DOI]
 - 21 Kundur P. Power System Stability and Control. New York: McGraw-Hill, 1994. 315—335
 - 22 刘永强, 严正, 倪以信. 双时间尺度电力系统动态模型降阶研究(一)——电力系统奇异摄动模型. 电力系统自动化, 2002, 26(18): 1—5
 - 23 Hu T S, Lin T L. Exact characterization of invariant ellipsoids for single input linear systems subject to actuator saturation. IEEE T Automat Contr, 2002, 47(1): 164—169[DOI]
 - 24 倪以信, 陈寿孙, 张宝霖. 动态电力系统的理论和分析. 北京: 清华大学出版社, 2002. 235—251
 - 25 Khalil H K. Nonlinear Systems. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 78—81
 - 26 辛焕海. 参数不确定性和饱和非线性对电力系统稳定影响的研究. 博士学位论文. 杭州: 浙江大学, 2007. 97—123

附录

此附录给出图 5 网络的运行点, 励磁系统和 PSS 控制系统的参数. 具体为

G1:

$P_1 = 1$, $Q_1 = 0.5$, $x'_d = 0.5$, $H = 5$ s, $D = 0.005$, $T'_{do} = 5.35$; $K_A = 6$, $T_A = 0.02$ s;

$K_S = 1.0$, $T_w = 5.0$ s, $T_1 = 0.35$ s, $T_2 = 0.03$ s; $\Delta \bar{E}_{f1} = 6.2$, $\bar{y}_2 = 3.0$.

G2:

$P_2 = 5$, $U_2 = 1.05$, $x'_d = 0.045$, $H = 25$ s, $D = 0.025$, $T'_{do} = 5.35$; $K_A = 10$, $T_A = 0.02$ s;

$K_S = 1.0$, $T_w = 8.3$ s, $T_1 = 0.35$ s, $T_2 = 0.03$ s; $\Delta \bar{E}_{f1} = 5.2$, $\bar{y}_2 = 3.0$.

G3:

$\theta_3 = 0$, $U_3 = 1.05$, $x'_d = 0.04$, $H = 20$ s, $D = 0.020$, $T'_{do} = 3.76$; $K_A = 17.5$, $T_A = 0.02$ s;

$K_S = 1.0$, $T_w = 8.0$ s, $T_1 = 0.45$ s, $T_2 = 0.05$ s; $\Delta \bar{E}_{f1} = 5.2$, $\bar{y}_2 = 3.0$.