



分布参数系统能控能观性问题的统一处理及应用

付晓玉

四川大学数学学院, 成都 610064

E-mail: rj-xy@163.com

指导教师: 张旭 四川大学数学学院

收稿日期: 2013-05-02; 接受日期: 2013-05-28

国家自然科学基金 (批准号: 11231007)、全国优秀博士学位论文作者专项资金 (批准号: 201213) 和教育部“创新团队发展计划” (批准号: IRT1273) 资助项目, 本学位论文荣获“全国优秀博士学位论文奖”

摘要 本文的主要目的是介绍一个统一的处理分布参数系统能控能观性问题的方法, 并给出该方法在分布参数控制理论中的应用. 为此, 本文将从一类“类抛物”偏微分算子 (即没有椭圆性条件) 的带权恒等式出发, 给出所有已知的关于抛物型方程、双曲型方程、Schrödinger 方程和板方程的基于整体 Carleman 估计的能控能观性结果. 同时, 基于该带权的恒等式, 本文还给出它在双曲型系统的稳定性问题和在拟线性复 Ginzburg-Landau 方程能控能观性等问题中的应用.

关键词 能控性 能观性 双曲方程 对数稳定性 带权的恒等式

MSC (2010) 主题分类 93B05, 93B07

1 引言

考虑如下的受控系统:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $y(t) \in Y$ 是状态变量, $u(t) \in U$ 是控制变量. Y 和 U 分别称为系统 (1.1) 的状态空间和控制空间, 它们通常取为 Hilbert 空间. A 是 Y 上某 C_0 半群 e^{At} 的生成元 (通常是无界的), 而控制算子 B 是从 U 到 Y 的一个映射. 对于控制系统 (1.1), 我们可以引入相应的能控性概念. 例如, 我们称系统 (1.1) 是精确能控的, 如果对任意给定的 $y_0, y_1 \in Y$, 可以找到一个控制 $u \in L^2(0, T; U)$, 使得系统 (1.1) 的解满足 $y(T) = y_1$. 若将要求 $y(T) = y_1$ 放宽, 则可给出各种各样的能控性概念 (如零能控、近似能控和部分能控等).

历史上, 分布参数控制系统的能控能观性理论起源于 20 世纪 60 年代, 它是分布参数控制理论的基础. 该领域经典的文献有 [1, 2] 等. 值得一提的是, Lions^[2] 引入的 Hilbert 空间唯一性方法极大地刺激了偏微分方程相关问题的深入研究, 引发了关于分布参数控制系统能控能观性的大量工作. 该方法的实质即对偶方法, 现已成为目前该领域熟知的工具. 继 Lions 之后关于分布参数系统能控能观性问题的主要工作, 可参见文献 [3–7] 及其所引文献.

熟知, 能控性问题的处理通常被转换为处理其对偶系统的能观性问题. 对于控制系统 (1.1), 其对偶系统如下:

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = -A^*z(t), & t \in (0, T), \\ z(T) = z_T. \end{cases} \quad (1.2)$$

由经典的对偶理论^[8] 知, 系统 (1.1) 零能控当且仅当如下的能观性不等式成立,

$$|e^{A^*T}z_0|_{Y^*}^2 \leq C \int_0^T |B^*e^{A^*t}z_0|_{U^*}^2 dt, \quad \forall z_0 \in Y^*. \quad (1.3)$$

所谓能观性不等式, 通俗地说, 就是用局部观测区域上的能量来估计系统的总能量. 这种类型的不等式对解决反问题也是有用的^[9]. 然而, 对于具体的偏微分方程而言, 能观性估计的证明并不是件容易的事情. 为此, 人们发展了若干方法来研究能观性估计. 对双曲型方程, 有矩量方法、乘子方法、微局部分析方法和 Carleman 估计等. 对抛物型方程, 有矩量方法和 Carleman 估计等. 然而, 矩量方法一般只适合于一维或非常特殊的高维区域, 有一定的局限性. 因此, 人们自然期望能给出不依赖于方程类型的 Carleman 估计. 本文致力用统一的观点和方法来研究确定性分布参数系统的能控能观性问题.

分布参数系统的能控能观性强烈地依赖于系统本身的特性, 如时间可逆与否, 典型的例子分别是波动方程和热传导方程. 现在已经清楚, 这两类方程的能控能观性有着本质的差别. 自然地, 人们希望知道这两类不同系统的能控能观性理论是否还有某种联系. 特别地, 如能建立抛物和双曲方程在某种意义下统一的能控能观性理论, 则是一个很有意义的工作. 该问题最早由分布参数系统理论的创始人之一 Russell^[10] 提出并给出初步结果. Russell^[10] 证明了如果经典波动方程在某个控制器作用下精确能控, 则相应的热传导方程亦在同样的控制器下精确零能控. 但熟知对波动方程的精确零能控性, 其控制器必须满足比较苛刻的几何条件, 而对热传导方程的精确零能控性而言, 其控制器只要是非空开集即可, 而不需要其他任何几何条件. 因此, Russell 的结论尚不能给出两类方程的能控性理论以令人满意的统一的解释. 继 Russell 之后关于抛物型和双曲型方程能控性理论的有机联系可参见文献 [11–13]. 其中文献 [11] 是对抛物方程和双曲方程通过分别推导了各自方程的整体 Carleman 估计, 而后得到了相应的能控能观性结果. 而文献 [12] 先后在一定条件下证明了, 一方面, 对精确能控的双曲方程的奇异摄动问题取极限即得到某个抛物方程的能控性; 另一方面, 抛物方程的所有能控性结果都可以由某个双曲方程的能控性推出, 进而发现原先各自独立发展的这两类方程的能控性理论之间的有机联系. 从方法的角度看, 关于抛物型和双曲型方程能控性理论的统一问题并没有取得实质性进展. 最近, 文献 [14, 15] 发展了一套统一的不依赖于方程类型的基于整体 Carleman 估计而得到的分布参数系统能控能观性问题的方法. 本文的主要目的就是介绍该统一处理方法并给出其在分布参数控制理论中的应用. 关于分布参数系统能控能观性统一理论的更多应用, 参见文献 [16].

本文组织如下: 第 2 节给出本文的主要结果, 其内容是文献 [14] 中的主要创新性结果及其应用; 第 3 节将给出基于该统一处理方法近期所得到的后续研究成果.

2 主要结果

本节将叙述文献 [14] 中的主要结果. 本节将主要内容分为 3 小节介绍. 首先, 本文将给出一个相当于一般的关于“类抛物”偏微分算子的带权恒等式, 由此出发, 我们得到了半线性复 Ginzburg-Landau 方程的能控能观性结果; 其次, 作为带权恒等式的应用之一, 我们研究了高维半线性双曲型方程的整体

精确能控性问题; 最后, 作为带权恒等式的又一应用, 我们得到了带有位势的板方程组能观性常数的显式估计, 并证明了能观性常数的最优性.

为了方便起见, 本文首先介绍一下今后将要使用的一些记号. 设 $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 是有界区域且具 C^2 边界 Γ . 我们用 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ 表示区域 Ω 在边界 Γ 上的单位外法向量. 记 $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$. 设 ω 是 Ω 的一个适当的非空开子集, 记 χ_ω 为 ω 的特征函数. 对集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\delta > 0$, 记

$$\mathcal{O}_\delta(S) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x'| < \delta \text{ 对某个 } x' \in S\}.$$

对任意的 $c \in \mathbb{C}$, 我们用 $\bar{c}$ 表示 c 的复共轭, $\bar{\Omega}$ 表示 Ω 的闭包. 最后, 考虑到后面将要研究的偏微分方程, 我们还需要引入如下的假设条件.

条件 1 设 $p^{jk}(\cdot) \in C^1(\bar{Q}; \mathbb{R})$ 满足对称性条件 $p^{jk}(t, x) = p^{kj}(t, x)$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, 并且对某个常数 $s_1 > 0$,

$$\sum_{j,k=1}^n p^{jk}(t, x) \xi^j \xi^k \geq s_1 |\xi|^2, \quad \forall (t, x, \xi) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^n.$$

条件 2 设 $h^{jk}(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ 满足对称性条件 $h^{jk}(x) = h^{kj}(x)$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, 并且对某个常数 $s_2 > 0$,

$$\sum_{j,k=1}^n h^{jk}(x) \xi^j \xi^k \geq s_2 |\xi|^2, \quad \forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n.$$

2.1 带权的恒等式及其应用

对固定的实值函数 $\alpha, \beta \in C^2(\mathbb{R}^{1+m})$ 和 $b^{jk} \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{1+m})$ 满足 $b^{jk} = b^{kj}$, $j, k = 1, 2, \dots, m$. 我们定义二阶形式偏微分算子:

$$\mathcal{P}z \triangleq (\alpha + i\beta)z_t + \sum_{j,k=1}^m (b^{jk} z_{x_j})_{x_k}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

定理 3 [17, 定理 2.1] 设 $z, v \in C^2(\mathbb{R}^{1+m}; \mathbb{C})$, $\ell, \Psi \in C^2(\mathbb{R}^{1+m}; \mathbb{R})$. 记 $v = e^\ell z$, 则

$$\begin{aligned} & e^\ell (\mathcal{P}z \bar{I}_1 + \overline{\mathcal{P}z} I_1) + M_t + \sum_{k=1}^m \partial_{x_k} V^k \\ &= 2|I_1|^2 + \sum_{j,k=1}^m c^{jk} (v_{x_k} \bar{v}_{x_j} + \bar{v}_{x_k} v_{x_j}) + B|v|^2 \\ &+ i \sum_{j,k=1}^m [(\beta b^{jk} \ell_{x_j})_t + b^{jk} (\beta \ell_t)_{x_j}] (\bar{v}_{x_k} v - v_{x_k} \bar{v}) \\ &+ i \left[\beta \Psi + \sum_{j,k=1}^m (\beta b^{jk} \ell_{x_j})_{x_k} \right] (\bar{v} v_t - v \bar{v}_t) - \sum_{j,k=1}^m b^{jk} \alpha_{x_k} (v_{x_j} \bar{v}_t + \bar{v}_{x_j} v_t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &\triangleq i\beta v_t - \alpha \ell_t v + \sum_{j,k=1}^m (b^{jk} v_{x_j})_{x_k} + Av, \\ A &\triangleq \sum_{j,k=1}^m b^{jk} \ell_{x_j} \ell_{x_k} - \sum_{j,k=1}^m (b^{jk} \ell_{x_j})_{x_k} - \Psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &\triangleq [(\alpha^2 + \beta^2)\ell_t - \alpha A]|v|^2 + \alpha \sum_{j,k=1}^m b^{jk} v_{x_j} \bar{v}_{x_k} + i\beta \sum_{j,k=1}^m b^{jk} \ell_{x_j} (\bar{v}_{x_k} v - v_{x_k} \bar{v}), \\
V^k &\triangleq -i\beta \sum_{j=1}^m b^{jk} [\ell_{x_j} (\bar{v}_t v - \bar{v} v_t) + \ell_t (v_{x_j} \bar{v} - \bar{v}_{x_j} v)] - \Psi \sum_{j=1}^m b^{jk} (v_{x_j} \bar{v} + \bar{v}_{x_j} v) \\
&\quad - \alpha \sum_{j=1}^m b^{jk} (v_{x_j} \bar{v}_t + \bar{v}_{x_j} v_t) + \sum_{j=1}^m b^{jk} (2A\ell_{x_j} + \Psi_{x_j} - 2\alpha\ell_{x_j} \ell_t)|v|^2 \\
&\quad + \sum_{j,j',k'=1}^m (2b^{jk'} b^{j'k} - b^{jk} b^{j'k'}) \ell_{x_j} (v_{x_{j'}} \bar{v}_{x_{k'}} + \bar{v}_{x_{j'}} v_{x_{k'}}), \\
c^{jk} &\triangleq \sum_{j',k'=1}^m \left[2(b^{j'k} \ell_{x_{j'}})_{x_{k'}} b^{jk'} - (b^{jk} b^{j'k'} \ell_{x_{j'}})_{x_{k'}} + \frac{1}{2}(\alpha b^{jk})_t - b^{jk} \Psi \right], \\
B &\triangleq (\alpha^2 \ell_t)_t + (\beta^2 \ell_t)_t - (\alpha A)_t - 2 \left[\sum_{j,k=1}^m (\alpha b^{jk} \ell_{x_j} \ell_t)_{x_k} + \alpha \Psi \ell_t \right] \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^m (b^{jk} \Psi_{x_k})_{x_j} + 2 \left[\sum_{j,k=1}^m (b^{jk} \ell_{x_j} A)_{x_k} + A \Psi \right].
\end{aligned}$$

带权恒等式 (2.1) 的主要想法是将主算子 $\mathcal{P}z$ 与另一个带权的算子 $e^\ell I_1$ 作乘积, 将它写成散度项与能量项以及具有恰当符合的低阶项之和的形式, 通过选取适当的权函数 ℓ 和辅助函数 Ψ 来吸收不希望有的项, 这就是 Carleman 估计中最关键的想法. 为了能更深入的理解 Carleman 估计的思想, 可参见文献 [16, 第 6 页] 中的简单例子. 另外, 注意到主算子 $\mathcal{P}z$ 为复值函数, 所以, 我们在恒等式 (2.1) 中引入了共轭算子, 使得恒等式 (2.1) 中的每一项都为实值函数. 后面我们将会看到, 由定理 3 出发, 我们可推导出关于抛物方程^[4]、双曲方程^[18]、Schrödinger 方程和板方程^[19] 的所有已知的基于整体 Carleman 估计而得到的能控能观性结果. 类似于定理 3 的逐点估计式, 我们还可参见文献 [16, 20, 21].

接下来, 作为定理 3 的一个直接的应用, 我们考虑如下的受控的复 Ginzburg-Landau 方程的零能控性:

$$\begin{cases} (1 + ib)y_t - \sum_{j,k=1}^n (p^{jk}(t, x)y_{x_j})_{x_k} = \chi_\omega u + f(y), & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ y = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ y(0) = y_0, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (2.2)$$

这里 $b \in \mathbb{R}$, $f(\cdot) \in C^1(\mathbb{C})$ 满足

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|f(s)|}{|s| \ln^{1/2} |s|} = 0,$$

系数矩阵 $(p^{jk})_{n \times n}$ 满足条件 1. 在 (2.2) 中, 我们取状态空间和控制空间分别为 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2((0, T) \times \omega)$.

为了得到系统 (2.2) 的零能控性, 我们需要考虑系统 (2.2) 的线性化方程的对偶方程

$$\begin{cases} (1 + ib)z_t + \sum_{j,k=1}^n (p^{jk}(t, x)z_{x_j})_{x_k} = q(t, x)z, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ z = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ z(T) = z_T, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $q(\cdot) \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega))$. 在定理 3 中通过选取 $\alpha = 1$, $\beta = b$, $m = n$ 和 $b^{jk}(t, x) = p^{jk}(t, x)$, 我们可以得到具有复主部的抛物算子的带权恒等式. 由此恒等式出发并采用文献 [17] 中的方法, 我们最终可得到如下的能控能观性结果.

定理 4 [17, 定理 1.1] 设条件 1 成立. 对任意的 $T > 0$ 以及 Ω 中任意的非空开子集 ω , 存在常数 $C > 0$ 使得对任意的 $z_T \in L^2(\Omega)$, 系统 (2.3) 的解满足

$$|z(0)|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + b^2) \exp(C(1 + b^2)|q|_{L^\infty(0, T; L^n(\Omega))}^2) |z|_{L^2((0, T) \times \omega)}.$$

定理 5 [17, 定理 1.2] 设条件 1 成立, 则系统 (2.2) 是零能控的.

显然, 当 $b = 0$ 时, 我们即得到抛物方程的零能控性. 注意到在定理 4 和 5 中, $T > 0$ 是任意的且控制器 ω 不需要任何的几何假设条件, 这与后面将要讨论的双曲方程的能控能观性问题有着本质的区别.

2.2 高维半线性双曲型方程的整体精确能控性

作为定理 3 的应用之一, 本小节将讨论高维半线性双曲型方程的能控能观性问题. 考虑下面的受控双曲方程:

$$\begin{cases} y_{tt} - \sum_{j,k=1}^n (h^{jk}(x)y_{x_j})_{x_k} = f(y) + \chi_\omega(x)\gamma(t, x), & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ y = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ y(0) = y_0, \quad y_t(0) = y_1, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (2.4)$$

其中系数矩阵 $(h^{jk})_{n \times n}$ 满足条件 2, $f(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ 满足

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s \ln^{1/2}|s|} = 0.$$

在系统 (2.4) 中, 我们取状态空间和控制空间分别为 $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 和 $L^2((0, T) \times \omega)$.

为了得到系统 (2.4) 的精确能控性, 通过熟知的对偶理论 (可参见文献 [2] 和 [6, 定理 3.2]), 我们需要考虑线性化系统 (2.4) 的对偶系统

$$\begin{cases} w_{tt} - \sum_{j,k=1}^n (h^{jk}(x)w_{x_j})_{x_k} = qw, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ w = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ w(0) = w_0, w_t(0) = w_1, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $q \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega))$, $(w_0, w_1) \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. 为了得到系统 (2.5) 的能观性不等式, 我们还需要如下的假设条件.

条件 6 存在函数 $d(\cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$ 满足

(i) 存在常数 $\mu_0 \geq 4$, 使得对任意 $(x, \xi) = (x, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$, 有

$$\sum_{j,k=1}^n \left\{ \sum_{j',k'=1}^n [2h^{jk'}(h^{j'k}d_{x_{j'}})_{x_{k'}} - h_{x_{k'}}^{jk} h^{j'k'} d_{x_{j'}}] \right\} \xi^i \xi^j \geq \mu_0 \sum_{j,k=1}^n h^{jk} \xi^j \xi^k;$$

(ii) $d(\cdot)$ 在 $\overline{\Omega}$ 中没有临界点, 即 $\min_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla d(x)| > 0$;

(iii) $\frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^n h^{jk}(x) d_{x_j}(x) d_{x_k}(x) \geq \max_{x \in \bar{\Omega}} d(x) \geq \min_{x \in \bar{\Omega}} d(x), \forall x \in \bar{\Omega}.$

接下来, 令

$$T^* = 2 \max_{x \in \bar{\Omega}} \sqrt{d(x)}, \quad \Gamma_+ \triangleq \left\{ x \in \Gamma \mid \sum_{j,k=1}^n h^{jk}(x) d_{x_j}(x) \nu_{x_k}(x) > 0 \right\}.$$

在定理 3 中通过选取 $\alpha = \beta = 0$ 和 $b^{jk}(t, x) \equiv h^{jk}(x)$, 我们可得到类似于文献 [18] 中关于双曲算子的带权的逐点估计式, 由此出发可得到如下的能控能观性结果.

定理 7 [18, 定理 2.3] 设条件 2 和 6 成立. 设对某个 $\delta > 0$, $\omega = \mathcal{O}_\delta(\Gamma_+) \cap \Omega$, 则对任何 $T > T^*$, 存在常数 $C > 0$ 使得系统 (2.5) 的所有弱解 w 满足

$$|(w_0, w_1)|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq C \exp(C|q|_{L^\infty(0,T;L^n(\Omega))}^2) |w|_{L^2((0,T) \times \omega)}, \quad \forall (w_0, w_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

定理 8 [18, 定理 2.2] 在定理 7 假设下, 对任何 $T > T^*$, 系统 (2.4) 在时刻 T , 在控制 $\gamma \in L^2((0,T) \times \omega)$ 的作用下在空间 $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中是精确能控的.

从上述结论中我们可以看到对双曲方程的精确零能控性, 其控制器 ω 必须满足一定的几何控制条件. 另外, 由于双曲方程的解的传播速度是有限的, 所以自然要求等待时间 T 必须充分大才能保证系统 (2.4) 的精确能控性. 受启发于文献 [18] 中建立能观性估计的方法, 在后续的研究中, 我们还给出带一般双曲型记忆核的热传导方程能控性及非能控性问题较为完整的分析 [22].

2.3 带有位势板方程组的能观性不等式及其最优性

作为定理 3 中带权恒等式的又一应用, 本小节将给出带有位势的板方程组的能观性常数的显式估计.

令 $n \geq 1$ 和 $N \geq 1$ 为两个整数. 记

$$Y \triangleq \{y \in H^3(\Omega) \mid y|_\Gamma = \Delta y|_\Gamma = 0\}.$$

我们考虑如下的 $\mathbb{R}^N$ -值板方程组:

$$\begin{cases} y_{tt} + \Delta^2 y + qy = 0, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ y = \Delta y = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ y(0) = y^0, \quad y_t(0) = y^1, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 $y = (y_1, \dots, y_N)^T$, $(y^0, y^1) \in Y^N \times (H_0^1(\Omega))^N$. 对某个 $p \in [n, \infty]$, $q \in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}))$. 今后, 我们分别用 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^\infty(0, T; L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}))$ 和 $L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}))$ 的范数. 关于观测区域 ω , 我们有如下的假设条件.

条件 9 对任意固定的 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ 以及 $\delta > 0$, 我们引入下面的集合:

$$\omega = \mathcal{O}_\delta(\Gamma_0) \cap \Omega, \quad \Gamma_0 \triangleq \{x \in \Gamma \mid (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0\}.$$

在定理 3 中通过选取 $m = n$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 和 $(b^{jk})_{m \times m} = I$, 我们可以得到关于 Schrödinger 算子的带权恒等式. 同时, 注意到四阶板算子 $\partial_t^2 + \Delta^2$ 可以分解为如下两个共轭的 Schrödinger 算子的乘积:

$$\partial_t^2 + \Delta^2 = (i\partial_t + \Delta)(-i\partial_t + \Delta).$$

因此, 从 Schrödinger 算子的带权恒等式出发, 我们可以得到如下的显式能观性估计.

定理 10 [19, 定理 1] 设条件 9 成立, 则对任意的 $T > 0$, 存在常数 $C > 0$ 使得系统 (2.6) 的弱解 y 满足

$$|\Delta y^0|_{(H_0^1(\Omega))^N}^2 + |y^1|_{(H_0^1(\Omega))^N}^2 \leq P(T, a) \int_0^T \int_{\omega} (|\nabla y|^2 + |\nabla \Delta y|^2) dt dx, \quad \forall (y^0, y^1) \in Y^N \times (H_0^1(\Omega))^N,$$

其中能观性常数 $P(T, q) > 0$ 满足

$$P(T, q) \leq \exp \left[C \left(1 + \frac{1}{T} + T \|q\|_p^{\frac{1}{2-n/2p}} + \|q\|_p^{\frac{1}{3-5n/2p}} \right) \right].$$

在定理 10 的基础上, 我们还进一步证明了当 $p = \infty$ 时, 当位势 q 在偶数维空间 $n \geq 2$ 且系统至少包含两个方程时, 能观性常数 $P(T, q)$ 中的项 $\|q\|_p^{\frac{1}{3-5n/2p}}$ (即 $\|q\|_{\infty}^{1/3}$) 是最优的 [19, 定理 3].

3 后续研究成果

本节将扼要介绍一下基于前面的工作, 近期我们所取得了一些后续研究成果. 首先, 我们将给出定理 3 在双曲方程的对数稳定性问题中的应用; 其次, 受定理 3 的启发, 我们得到了两种边界条件下一维板方程能观性常数的最佳估计; 最后, 我们讨论高维拟线性复 Ginzburg-Landau 方程的局部零能可控性问题.

3.1 双曲方程的对数稳定性

熟知, 对有限初始能量, 波动方程解的能量指数衰减充分必要条件是控制区域 ω 满足 Bardos 等人 [23] 给出的几何控制条件. 而当几何控制条件不满足时, Lebeau 和 Robbiano [24] 率先研究了具有任意小边界阻尼项的波动方程的稳定性, 他们的方法是基于局部的 Carleman 估计来实现的. 受文献 [24] 的启发, 我们采用整体 Carleman 估计的方法来研究在关于系数和区域边界很弱的正则性假设条件下, 具有任意小边界阻尼项的双曲方程的对数衰减问题.

对固定的非负函数 $a \in L^{\infty}(\Gamma)$, 假定 $\{x \in \Gamma \mid a(x) > 0\} \neq \emptyset$. 我们考虑如下的具任意小边界阻尼项的双曲方程:

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum_{j,k=1}^n (h^{jk}(x) u_{x_j})_{x_k} = 0, & \text{在 } \mathbb{R}^+ \times \Omega \text{ 中,} \\ \sum_{j,k=1}^n h^{jk} u_{x_j} \nu_{x_k} + a(x) u_t = 0, & \text{在 } \mathbb{R}^+ \times \Gamma \text{ 上,} \\ (u(0), u_t(0)) = (u^0, u^1), & \text{在 } \Omega \text{ 中.} \end{cases} \quad (3.1)$$

定义

$$H \triangleq \left\{ (f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} f dx = 0 \right\},$$

则它是一个 Hilbert 空间. 对任意的 $(f, g) \in H$, 我们定义其上的范数为

$$\|(f, g)\|_H^2 = \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k=1}^n h^{jk} f_{x_j} \overline{f_{x_k}} + |g|^2 \right] dx.$$

接下来, 令 $U = (f, g)$, 我们定义无界算子 $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ 为

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) \triangleq \left\{ U \in H; \mathcal{A}U \in H; \left(\sum_{j,k=1}^n h^{jk} f_{x_j} \nu_{x_k} + ag \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}, \\ \mathcal{A}U = \left(g, \sum_{j,k=1}^n (h^{jk} f_{x_j})_{x_k} \right). \end{cases}$$

容易证明, $\mathcal{A}$ 生成 H 上的 C_0 半群 $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \in \mathbb{R}}$. 因此, 系统 (3.1) 在 H 中是适定的. 通过经典的能量估计方法可以验证, 当扩散项作用在边界的任意非空开子集上时, 随着时间增长波动方程任何解的能量都趋向于零. 在定理 3 中选取 $m = 1 + n$ 以及

$$\alpha = \beta = 0, \quad t = s, \quad (b^{jk}(t, x))_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (h^{jk}(x))_{n \times n} \end{pmatrix},$$

通过简单的计算, 我们可以得到文献 [25, 引理 2.2] 中的关于椭圆算子的带权的不等式. 由此出发, 我们可以得到下面的对数衰减结果.

定理 11 [25, 定理 1.1] 设条件 2 成立, 则系统 (3.1) 的解

$$e^{t\mathcal{A}}(u^0, u^1) \equiv (u, u_t) \in C(\mathbb{R}; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}; H)$$

满足

$$\|e^{t\mathcal{A}}(u^0, u^1)\|_H \leq \frac{C}{\ln(2+t)} \|(u^0, u^1)\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall (u^0, u^1) \in D(\mathcal{A}), \quad \forall t > 0.$$

对于具有任意小内部阻尼项的双曲方程的对数稳定性结果可参见文献 [26]. 最近, 我们还讨论了具有混合边界条件下的双曲方程的对数稳定性问题 [27]. 关于弱耦合双曲型系统的对数稳定性问题, 也有相应的结果 [28].

3.2 两种边界条件下板方程的能观性常数的最佳估计

第 2.3 小节讨论了具有低阶项的板方程组在某一种边界条件下的显式的能观性不等式. 本小节将研究具有位势的一维板方程在两种不同边界条件下的能观性常数的显式估计. 受到前面建立带权恒等式方法的启发, 我们将直接对四阶板算子作适当的逐点估计, 由此出发建立两种边界条件下板方程的能观性常数的显式估计, 并发现类似于波动方程的能观性估计, 在一维情形下板方程的能观性常数也可以得到进一步的改进.

为方便起见, 我们仍使用前面引入的记号 Ω 和 Γ 等. 注意到对 1 维板方程而言, 这时 Ω 表示 $\mathbb{R}$ 中的有界开区间, 边界 Γ 即区间的两 endpoint. 我们考虑如下的具有位势的板方程:

$$\begin{cases} w_{tt} + w_{xxxx} + q_1 w = 0, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ w = w_{xx} = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ w(0) = w^0, \quad w_t(0) = w^1, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $q_1 \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$. 类似地, 我们也考虑如下的具有不同于 (3.2) 中边界条件的板方程:

$$\begin{cases} w_{tt} + w_{xxxx} + q_2 w = 0, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ w = w_x = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ w(0) = w^0, \quad w_t(0) = w^1, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 $q_2 \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))$. 令

$$W_1 = \{w \in H^3(\Omega) \mid w|_\Gamma = w_{xx}|_\Gamma = 0\}, \quad W_2 = \{w \in H^3(\Omega) \mid w|_\Gamma = w_x|_\Gamma = 0\}.$$

我们定义系统 (3.2) 的解的能量为

$$E_1(t) = \frac{1}{2} [|w_{tx}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + |w_{xxx}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + |q_1|_\infty |w_x(t, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2].$$

接下来定义 $L^2(\Omega)$ 中的无界算子 $\mathcal{B}$ 如下:

$$\mathcal{B} \triangleq \partial_{xxxx}, \quad D(\mathcal{B}) \triangleq H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega). \quad (3.4)$$

系统 (3.3) 的解的能量定义为

$$E_2(t) = \frac{1}{2} [|\mathcal{B}^{\frac{1}{4}} w_t(t, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\mathcal{B}^{\frac{3}{4}} w(t, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + |q_2|_\infty |\mathcal{B}^{\frac{1}{4}} w(t, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2].$$

我们用 $|\cdot|_\infty$ 和 $|\cdot|_{1, \infty}$ 分别表示 $L^\infty(Q)$ 和 $L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))$ 的范数.

定理 12 [29, 定理 2.1 和 2.2] 设条件 9 成立, 则存在 $C > 0$ 使得对任意的 $T > 0$ 和

$$q_j \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega)), \quad j = 1, 2,$$

系统 (3.2) 和 (3.3) 的弱解分别满足

$$E_j(0) \leq P(T, q_j) \int_0^T \int_\Omega (w_x^2 + w_{tx}^2 + w_{xxx}^2) dx dt, \quad \forall (w^0, w^1) \in W_j \times H_0^1(\Omega),$$

这里

$$P(T, q_j) \leq \exp \left[C \left(1 + \frac{1}{T} + T |q_j|_{1, \infty} + |q_j|_\infty^{\frac{2}{3}} + |q_j|_\infty^{-1} \right) \right], \quad j = 1, 2.$$

在定理 10 中, 我们可以看到对于偶数维板方程, 能观性常数中的项 $|q_j|_\infty^{\frac{1}{3}}$ 的指标是最优的. 然而, 对一维板方程, 由定理 12, 我们发现能观性常数中该项的指标可以改进到 $|q_j|_\infty^{\frac{2}{3}}$.

3.3 高维拟线性复 Ginzburg-Landau 方程的局部零能控性

本小节将给出高维拟线性复 Ginzburg-Landau 方程的局部零能控性. 我们考虑如下的受控的拟线性复 Ginzburg-Landau 方程:

$$\begin{cases} (a_1 - ia_2)y_t - \sum_{j,k=1}^n (a^{jk}(|y|^2)y_{x_j})_{x_k} + f(|y|^2)y = \chi_\omega u, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ y = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ y(0) = y_0, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (3.5)$$

这里 y 和 u 都是复值函数. 在 (3.5) 中, $a_1 > 0$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $f(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ 是一个实值函数, 满足 $f(0) = 0$, 主部系数 $a^{jk}(\cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ ($j, k = 1, 2, \dots, n$) 是实值函数, 满足对称性条件 $a^{jk} = a^{kj}$, 且存在 $h_0 > 0$,

$$\sum_{j,k=1}^n a^{jk}(s) \xi_j \bar{\xi}_k \geq h_0 |\xi|^2, \quad \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n.$$

据我们所知, 仅有少数的文献讨论了拟线性抛物型系统的能控性问题, 关于拟线性抛物方程的能控性可参见文献 [21].

通过熟知的对偶理论, 我们首先讨论系统 (3.5) 的线性化方程的对偶方程

$$\begin{cases} (a_1 + ia_2)z_t + \sum_{j,k=1}^n (p^{jk} z_{x_j})_{x_k} + qz = 0, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ z = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ z(T) = z_T, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (3.6)$$

其中 $q \in C(\overline{Q})$, 矩阵 $(p^{jk})_{n \times n}$ 满足条件 1. 设 ω_0 和 ω_1 是 ω 中任意给定的两非空开子集且满足 $\overline{\omega_0} \subseteq \omega_1$ 和 $\overline{\omega_1} \subseteq \omega$. 由文献 [4] 知, 存在一个实值函数 $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ 使得

$$\begin{cases} \psi > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \psi = 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \\ |\nabla \psi(x)| > 0, & \text{在 } \overline{\Omega} \setminus \omega_0 \text{ 中.} \end{cases}$$

对参数 $\lambda, \mu \geq 1$, 我们选取如下形式的权函数:

$$\ell = \lambda\rho, \quad \rho(x, t) = \frac{e^{\mu\psi(x)} - e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}, \quad \varphi(x, t) = \frac{e^{\mu\psi(x)}}{t(T-t)},$$

令

$$h \triangleq 1 + \sum_{j,k=1}^n |p^{jk}|_{C^{1,1}(\overline{Q})} + |q|_{C(\overline{Q})}.$$

在定理 3 中通过选取 $\alpha = a_1, \beta = a_2, m = n$ 和 $b^{jk}(t, x) = p^{jk}(t, x)$, 我们可以得到复 Ginzburg-Landau 算子的带权恒等式, 由此恒等式出发并采用文献 [17] 中的方法, 我们最终可得到如下的能观性结果.

定理 13 [15, 定理 4.1] 存在 $\mu_0 > 0$ 使得对所有的 $\mu \geq \mu_0 = Ch^2$, 我们可以找到一个 $\lambda_0 > 0$, 对所有的

$$\lambda \geq \lambda_0 = C(1 + a_1^2 + a_2^2)a_1^{-1}he^{2\mu|\psi|_{C(\overline{\Omega})}},$$

系统 (3.6) 的解满足

$$\int_{\Omega} |z(0)|^2 dx \leq C \exp\{e^{C(1+a_1^2+a_2^2)a_1^{-1}h}\} \int_0^T \int_{\omega_1} e^{2\lambda\rho(t,x)} \varphi^3 |z|^2 dx dt. \quad (3.7)$$

由定理 13 出发并结合不动点理论, 我们可以得到系统 (3.5) 的局部能控性结果.

定理 14 [15, 定理 1.1] 设存在正常数 γ_0 使得对任意给定的初值 $y_0 \in C^{2+\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ 满足 $|y_0|_{C^{2+\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})} \leq \gamma_0$ 和一阶相容性条件, 我们可以找到一个控制 $u \in C^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\omega \times [0, T])$ 使得系统 (3.5) 的解 y 满足 $y(T) = 0$ 在 Ω 中. 并且,

$$|u|_{C^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\overline{Q})} \leq C(1 + a_1^2 + a_2^2)a_1^{-1}|y_0|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.8)$$

致谢 作者对导师张旭教授多年来的悉心指导、教诲和鼓励表示深深的感谢.

参考文献

- 1 Russell D L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open problems. *SIAM Rev*, 1978, 20: 639–739
- 2 Lions J L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Rev*, 1988, 30: 1–68
- 3 Coron J M. Control and Nonlinearity. *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 136. Providence, RI: Amer Math Soc, 2007
- 4 Fursikov A V, Imanuvilov O Y. Controllability of Evolution Equations. *Lecture Notes Series*, vol. 34. Seoul: Seoul National University, 1996
- 5 Li T T. Controllability and Observability for Quasilinear Hyperbolic Systems. *AIMS Series on Applied Mathematics*, vol. 3. Springfield, MO: American Institute of Mathematical Sciences, 2010
- 6 张旭. 半线性分布参数系统的精确能控性. 北京: 高等教育出版社, 2004
- 7 Zuazua E. Controllability and observability of partial differential equations: Some results and open problems. In: *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Differential Equations*, vol. 3. Amsterdam: Elsevier Science, 2006, 527–621
- 8 Li X J, Yong J M. Optimal Control Theory for Infinite-Dimensional Systems. Boston, MA: Birkhäuser, 1995
- 9 Baudouin L, Puel J P. Uniqueness and satbility in an inverse problem for the Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 2002, 18: 1537–1554
- 10 Russell D L. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Stud Appl Math*, 1973, 52: 189–212
- 11 Li W, Zhang X. Controllability of parabolic and hyperbolic equations: Toward a unified theory. In: *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol. 242. Boca Raton, FL: Chapan & Hall/CRC, 2005, 157–174
- 12 López A, Zhang X, Zuazua E. Null controllability of the heat equation as singular limit of the exact controllability of dissipative wave equations. *J Math Pures Appl*, 2000, 79: 741–808
- 13 Zhang X. Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means of Carleman inequalities. *SIAM J Control Optim*, 2001, 39: 812–834
- 14 付晓玉. 分布参数系统能控能观性问题的统一处理. 博士学位论文. 成都: 四川大学, 2008
- 15 Fu X Y, Liu X, Zhang X. Well-posedness and local controllability for quasilinear complex Ginzburg-Landau equations. Submitted, 2013
- 16 Zhang X. A unified controllability/observability theory for some stochastic and deterministic partial differential equations. *ArXiv:1003.5819*, 2010
- 17 Fu X Y. Null controllability for the parabolic equation with a complex principal part. *J Funct Anal*, 2009, 257: 1333–1354
- 18 Fu X Y, Yong J M, Zhang X. Exact controllability for the multidimensional semilinear hyperbolic equations. *SIAM J Control Optim*, 2007, 46: 1578–1614
- 19 Fu X Y, Zhang X, Zuazua E. Analysis on the optimality of the observability inequalities for the plate equation with a potential. In: *Space Analysis of PDEs*. Boston, MA: Birkhäuser, 2006, 117–132
- 20 Fu X Y. A weighted identity for partial differential operators of second order and its applications. *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2006, 342: 579–584
- 21 Liu X, Zhang X. Local controllability of multidimensional quasi-linear parabolic equations. *SIAM J Control Optim*, 2012, 5: 2046–2064
- 22 Fu X Y, Yong J M, Zhang X. Controllability and observability of a heat equation with hyperbolic memory kernel. *J Differential Equations*, 2009, 247: 2395–2439
- 23 Bardos C, Lebeau G, Rauch J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J Control Optim*, 1992, 30: 1024–1065
- 24 Lebeau G, Robbiano L. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Duke Math J*, 1997, 86: 465–491
- 25 Fu X Y. Logarithmic decay of hyperbolic equations with arbitrary small boundary damping. *Comm Partial Differential Equations*, 2009, 34: 957–975
- 26 Fu X Y. Longtime behavior of the hyperbolic equations with an arbitrary internal damping. *Z Angew Math Phys*, 2011, 62: 667–680
- 27 Fu X Y. Stabilization of hyperbolic equations with mixed boundary conditions. Preparation, 2013
- 28 Fu X Y. Sharp decay rates for the weakly coupled hyperbolic system with one internal damping. *SIAM J Control Optim*, 2012, 50: 1643–1660
- 29 Fu X Y. Sharp observability inequalities for the 1-D plate equation with a potential. *Chin Ann Math Ser B*, 2012, 33: 91–106

A unified treatment on controllability/observability problems for distributed parameter systems and applications

FU XiaoYu

Abstract The purpose of this paper is to present a unified treatment on controllability/observability problems for distributed parameter systems, and give its applications in distributed parameter control theory. For this purpose, from a basic weighted identity of “parabolic-like” partial differential operator (i.e., without elliptic condition), we will give all the known controllability/observability results for the parabolic, hyperbolic, Schrödinger and plate equations that are derived via Carleman estimate. Meanwhile, based on this weighted identity, we also give its applications in the stabilization of hyperbolic equations and the controllability/observability for the complex Ginzburg-Landau equations, etc.

Keywords controllability, observability, hyperbolic equation, logarithmic stabilization, weighted identity

MSC(2010) 93B05, 93B07

doi: 10.1360/012013-123